9 и 10 КЛАССЫ. БИЛЕТ 1

1. Пассажир автобуса, выглянув в окно, замечает своего друга, идущего в противоположном направлении. Он выходит на ближайшей остановке, через 3 минуты после того, как увидел своего друга, и начинает идти в направлении, противоположном движению автобуса, чтобы догнать его. Сколько времени ему для этого потребуется (считая с момента выхода из автобуса), если он идёт в 2.5 раза быстрее друга, но в 6 раз медленнее автобуса? (Все скорости постоянны.)

   Ответ: 32 минуты.

   Решение. Пусть v – скорость друга. Тогда скорость пассажира автобуса, когда он идёт пешком, равна $2.5v$, а скорость автобуса равна $6 \cdot 2.5v = 15v$. Спустя 3 минуты, которые проходят после того, как пассажир увидел своего друга, расстояние между ними становится равно $3 \cdot (15v + v) = 48v$. Когда пассажир начинает догонять своего друга, он сокращает расстояние между ними на $1.5v$ каждую минуту. Итак, всего ему необходимо $\frac{48v}{1.5v} = 32$ минуты.

2. Джек и Джилл обменивались марками дважды. При каждом обмене Джилл отдавала $\frac{2}{11}$ всех своих марок Джеку, а Джек отдавал половину своих марок Джилл (например, если у Джилл было 11 марок, а у Джека 10, это означает, что Джилл передаст 2 марки Джеку, а Джек передаст 5 марок Джилл). Выяснилось, что после первого обмена у Джека было 110 марок, а после второго обмена у Джилл было 334 марки. Сколько марок было у Джилл до всех обменов?

   Ответ: 363.

   Решение. Пусть первоначальные количества марок у Джека и Джилл равны соответственно x и y. Тогда после первого обмена у Джека окажется $\frac{1}{2}x + \frac{2}{11}y$ марок, а у Джилл – $\left(\frac{1}{2}x + \frac{9}{11}y\right)$ марок. После второго обмена эти количества равны соответственно $\frac{15}{44}x + \frac{29}{121}y$ и $\frac{29}{44}x + \frac{92}{121}y$. Из условия получаем, что $\frac{1}{2}x + \frac{2}{11}y = 110$, а $\frac{29}{44}x + \frac{92}{121}y = 334$. Следовательно, $x = 88$, $y = 363$.

3. Несократимая дробь, числитель и знаменатель которой являются натуральными числами, больше $\frac{1}{11}$. Если её знаменатель увеличить на 1, а её числитель увеличить на 6, то получающаяся дробь меньше 0,2. Найдите первоначальную дробь, если известно, что её знаменатель на 8 меньше квадрата её числителя.

   Ответ: $\frac{11}{113}$.

   Решение. Пусть числитель дроби равен k. Тогда её знаменатель есть $k^2 - 8$. Известно, что $\frac{k}{k^2-8} > \frac{1}{11}$, а $\frac{k+6}{k^2-7} < \frac{1}{5}$. Поскольку знаменатель дроби положителен, а её числитель является целым числом, можно сделать вывод, что $k \geqslant 3$. Следовательно, можно умножить обе части первого неравенства на *положительное* выражение $11\,(k^2 - 8)$, а обе части второго – на *положительное* выражение $5\,(k^2 - 7)$; таким образом приходим к системе

$$\begin{cases} k^2 - 11k - 8 < 0, \\ k^2 - 5k - 37 > 0. \end{cases}$$

   Принимая во внимание, что k – целое число, большее 2, из первого неравенства получаем, что $3 \leqslant k \leqslant 11$, а из второго – что $k \geqslant 10$. Пересекая эти ограничения, находим, что $k = 10$ или $k = 11$. Если $k = 10$, данная в условии дробь равна $\frac{10}{92}$, то есть она сократима на 2. Если $k = 11$, то дробь равна $\frac{11}{113}$, что является несократимой дробью. Это единственный вариант, удовлетворяющий условию задачи.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy^3 - x = 182, \\ xy^2 - xy = 42. \end{cases}$

   Ответ: $(7;\, 3)$, $(-189;\, \frac{1}{3})$.

© МФТИ, 2019

Решение. Для начала раскладываем на множители левые части обоих уравнений:

$$\begin{cases} x(y-1)\,(1+y+y^2) = 182, \\ xy(y-1) = 42. \end{cases}$$

Ввиду того, что правые части уравнений отличны от нуля (а левые части равны им), можем почленно разделить первое уравнение на второе. В результате $\frac{1+y+y^2}{y} = \frac{13}{3}$, $3y^2 - 10y + 3 = 0$, поэтому, $y = 3$ или $y = \frac{1}{3}$. Подставляя эти значения в первое уравнение исходной системы, находим соответствующие значения x:

если $y = 3$, то $9x - 3x = 42 \Leftrightarrow x = 7$;

если $y = \frac{1}{3}$, то $\frac{x}{9} - \frac{x}{3} = 42 \Leftrightarrow x = -189$.

5. Периметр прямоугольного треугольника равен 30. Гипотенуза AB касается окружности, вписанной в этот треугольник, в точке Q, причём $AQ : QB = 10 : 3$. Найдите площадь треугольника.

Ответ: 30.

Решение. Обозначим точки касания вписанной окружности со сторонами AC и BC как D и F соответственно. Пусть $AQ = 10x$, $CD = y$. Так как $AQ : QB = 10 : 3$, находим, что $BQ = 3x$. Мы также получаем, что $AD = AQ = 10x$, $CF = CD = y$, $BF = BQ = 3x$ ввиду того, что отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны между собой. Поскольку периметр треугольника равен 30, получаем соотношение $2y + 26x = 30$, $y = 15 - 13x$. Значит, $AC = 10x + y = 15 - 3x$, $BC = 3x + y = 15 - 10x$, $AB = 3x + 10x = 13x$. Тогда по теореме Пифагора $(15 - 3x)^2 + (15 - 10x)^2 = (13x)^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 13x - 15 = 0$, и, следовательно, $x = 1$ или $x = -\frac{15}{2}$. Отрицательное значение x не подходит. Таким образом, $x = 1$, $AC = 12$, $BC = 5$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = 30$.

6. Найдите все пары целых чисел $(x;\, y)$, удовлетворяющие неравенствам $x^2 + 16y + 193 < 24x - y^2$ и $38x - y^2 > x^2 + 8y + 354$.

Ответ: $(15; -6)$.

Решение. Выделяя полные квадраты, получаем $\begin{cases} (x-12)^2 + (y+8)^2 < 15, \\ (x-19)^2 + (y+4)^2 < 23 \end{cases}$. Так как квадраты неотрицательны, из этих неравенств следует, что $(x-12)^2 < 15$, а $(x-19)^2 < 23$. Единственное целое значение x, удовлетворяющее этим неравенствам – это $x = 15$. Подставляем его в систему, которая принимает вид $\begin{cases} (y+8)^2 < 6, \\ (y+4)^2 < 7 \end{cases}$. Единственное целое значение y, подходящее сюда – это $y = -6$. Итак, получилась единственная пара целых чисел $(15; -6)$, которая удовлетворяет данным неравенствам.

7. KT – биссектриса треугольника KLM. Центр окружности Ω радиуса 6 расположен на стороне KM, при этом окружность Ω проходит через точки K, L и T. Найдите KL, если известно, что $LT : MT = 1 : 3$.

Ответ: 8.

Решение. Пусть $LT = y$. Тогда $MT = 3y$. Так как KT –биссектриса треугольника, $KL : KM = LT : MT = y : 3y = 1 : 3$. Пусть $KL = x$, тогда $KM = 3x$. ML и MK -две секущие, проведённые к окружности из одной точки; следовательно, $MT \cdot ML = MK \cdot MP$ (P – точка пересечения отрезка KM с окружностью), т.е. $3y \cdot 4y = 3x \cdot (3x - 12) \Leftrightarrow 4y^2 = 3x^2 - 12x$. Поскольку KP диаметр, он виден из точки L под прямым углом, а, значит, $\cos \angle LKP = \frac{KL}{KP} = \frac{x}{12}$. Тогда по теореме косинусов для треугольника KLM получаем, что $(4y)^2 = (x)^2 + (3x)^2 - 2 \cdot x \cdot 3x \cdot \frac{x}{12}$.

© МФТИ, 2019

Подставляя сюда выражение для $4y^2$, найденное выше, приходим к уравнению $12x^2 - 48x = 10x^2 - \frac{1}{2}x^3 \Leftrightarrow x(x-8)(x+12) = 0$. У этого уравнения единственный положительный корень – это $x = 8$. Значит, $KL = x = 8$.

© МФТИ, 2019

9 и 10 КЛАССЫ. БИЛЕТ 2

1. Пассажир автобуса, выглянув в окно, замечает своего друга, идущего в противоположном направлении. Он выходит на ближайшей остановке, через 1,5 минуты после того, как увидел своего друга, и начинает идти в направлении, противоположном движению автобуса, чтобы догнать его. Сколько времени ему для этого потребуется (считая с момента выхода из автобуса), если он идёт в 1,8 раза быстрее друга, но в 11 раз медленнее автобуса? (Все скорости постоянны.)

   Ответ: 39 минут.

   Решение. Пусть v – скорость друга. Тогда скорость пассажира автобуса, когда он идёт пешком, равна $1.8v$, а скорость автобуса равна $11 \cdot 1.8v = 19.8v$. Спустя 1.5 минуты, которые проходят после того, как пассажир увидел своего друга, расстояние между ними становится равно $1.5 \cdot (19.8v + v) = 31.2v$. Когда пассажир начинает догонять своего друга, он сокращает расстояние между ними на $0.8v$ каждую минуту. Итак, всего ему необходимо $\frac{31.2v}{0.8v} = 39$ минут.

2. Джек и Джилл обменивались марками дважды. При каждом обмене Джилл отдавала $\frac{3}{7}$ всех своих марок Джеку, а Джек отдавал треть своих марок Джилл (например, если у Джилл было 14 марок, а у Джека 12, это означает, что Джилл передаст 6 марок Джеку, а Джек передаст 4 марки Джилл). Выяснилось, что после первого обмена у Джека было 273 марки, а после второго обмена у Джилл было 199 марок. Сколько марок было у Джилл до всех обменов?

   Ответ: 147.

   Решение. Пусть первоначальные количества марок у Джека и Джилл равны соответственно x и y. Тогда после первого обмена у Джека окажется $\frac{2}{3}x + \frac{3}{7}y$ марок, а у Джилл – $\left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{7}y\right)$ марок. После второго обмена эти количества равны соответственно $\frac{37}{63}x + \frac{26}{49}y$ и $\frac{26}{63}x + \frac{23}{49}y$. Из условия получаем, что $\frac{2}{3}x + \frac{3}{7}y = 273$, а $\frac{26}{63}x + \frac{23}{49}y = 199$. Следовательно, $x = 315$, $y = 147$.

3. Несократимая дробь, числитель и знаменатель которой являются натуральными числами, больше $\frac{1}{9}$. Если её знаменатель увеличить на 1, а её числитель увеличить на 3, то получающаяся дробь меньше 0,2. Найдите первоначальную дробь, если известно, что её знаменатель на 3 меньше квадрата её числителя.

   Ответ: $\frac{8}{61}$.

   Решение. Пусть числитель дроби равен k. Тогда её знаменатель есть $k^2 - 3$. Известно, что $\frac{k}{k^2-3} > \frac{1}{9}$, а $\frac{k+3}{k^2-2} < \frac{1}{5}$. Поскольку знаменатель дроби положителен, а её числитель является целым числом, можно сделать вывод, что $k \geqslant 2$. Следовательно, можно умножить обе части первого неравенства на *положительное* выражение $9\,(k^2 - 3)$, а обе части второго – на *положительное* выражение $5\,(k^2 - 2)$; таким образом приходим к системе

$$\begin{cases} k^2 - 9k - 3 < 0, \\ k^2 - 5k - 17 > 0. \end{cases}$$

   Принимая во внимание, что k – целое число, большее 1, из первого неравенства получаем, что $2 \leqslant k \leqslant 9$, а из второго – что $k \geqslant 8$. Пересекая эти ограничения, находим, что $k = 8$ или $k = 9$. Если $k = 9$, данная в условии дробь равна $\frac{9}{78}$, то есть она сократима на 3. Если $k = 8$, то дробь равна $\frac{8}{61}$, что является несократимой дробью. Это единственный вариант, удовлетворяющий условию задачи.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + xy^3 = -70, \\ xy + xy^2 = 20. \end{cases}$

   Ответ: $(10; -2)$, $(-80; -\frac{1}{2})$.

© МФТИ, 2019

Решение. Для начала раскладываем на множители левые части обоих уравнений:

$$\begin{cases} x(1+y)\,(1-y+y^2) = -70, \\ xy(1+y) = 20. \end{cases}$$

Ввиду того, что правые части уравнений отличны от нуля (а левые части равны им), можем почленно разделить первое уравнение на второе. В результате $\frac{1-y+y^2}{y} = -\frac{7}{2}$, $2y^2+5y+2=0$, поэтому, $y=-2$ или $y=-\frac{1}{2}$. Подставляя эти значения в первое уравнение исходной системы, находим соответствующие значения x:

если $y=-2$, то $x-8x=-70 \Leftrightarrow x=10$;

если $y=-\frac{1}{2}$, то $x-\frac{1}{8}x=-70 \Leftrightarrow x=80$.

5. Периметр прямоугольного треугольника равен 40. Гипотенуза AB касается окружности, вписанной в этот треугольник, в точке Q, причём $AQ:QB=5:12$. Найдите площадь треугольника.

Ответ: 60.

Решение. Обозначим точки касания вписанной окружности со сторонами AC и BC как D и F соответственно. Пусть $AQ=5x$, $CD=y$. Так как $AQ:QB=5:12$, находим, что $BQ=12x$. Мы также получаем, что $AD=AQ=5x$, $CF=CD=y$, $BF=BQ=12x$ ввиду того, что отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны между собой. Поскольку периметр треугольника равен 40, получаем соотношение $2y+34x=40$, $y=20-17x$. Значит, $AC=5x+y=20-12x$, $BC=12x+y=20-5x$, $AB=5x+12x=17x$. Тогда по теореме Пифагора $(20-5x)^2+(20-12x)^2=(17x)^2 \Leftrightarrow 3x^2+17x-20=0$, и, следовательно, $x=1$ или $x=-\frac{20}{3}$. Отрицательное значение x не подходит. Таким образом, $x=1$, $AC=8$, $BC=15$, $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=60$.

6. Найдите все пары целых чисел $(x;\,y)$, удовлетворяющие неравенствам $x^2+26y+159<4x-y^2$ и $18x-y^2>x^2+18y+140$.

Ответ: $(5;-11)$.

Решение. Выделяя полные квадраты, получаем $\begin{cases} (x-2)^2+(y+13)^2<14, \\ (x-9)^2+(y+9)^2<22 \end{cases}$. Так как квадраты неотрицательны, из этих неравенств следует, что $(x-2)^2<14$, а $(x-9)^2<22$. Единственное целое значение x, удовлетворяющее этим неравенствам – это $x=5$. Подставляем его в систему, которая принимает вид $\begin{cases} (y+13)^2<5, \\ (y+9)^2<6 \end{cases}$. Единственное целое значение y, подходящее сюда – это $y=-11$. Итак, получилась единственная пара целых чисел $(5;-11)$, которая удовлетворяет данным неравенствам.

7. KT – биссектриса треугольника KLM. Центр окружности Ω радиуса 6 расположен на стороне KM, при этом окружность Ω проходит через точки K, L и T. Найдите KL, если известно, что $LT:MT=2:3$.

Ответ: 10.

Решение. Пусть $LT=2y$. Тогда $MT=3y$. Так как KT –биссектриса треугольника, $KL:KM=LT:MT=2y:3y=2:3$. Пусть $KL=2x$, тогда $KM=3x$. ML и MK -две секущие, проведённые к окружности из одной точки; следовательно, $MT\cdot ML=MK\cdot MP$ (P – точка пересечения отрезка KM с окружностью), т.е. $3y\cdot 5y=3x\cdot(3x-12) \Leftrightarrow 5y^2=3x^2-12x$. Поскольку KP – диаметр, он виден из точки L под прямым углом, а, значит, $\cos\angle LKP=\frac{KL}{KP}=\frac{x}{6}$. Тогда по теореме косинусов для треугольника KLM получаем, что $(5y)^2=(2x)^2+(3x)^2-2\cdot 2x\cdot 3x\cdot\frac{x}{6}$.

© МФТИ, 2019

Подставляя сюда выражение для $5y^2$, найденное выше, приходим к уравнению $15x^2 - 60x = 13x^2 - 2x^3 \Leftrightarrow x(x-5)(x+6) = 0$. У этого уравнения единственный положительный корень – это $x = 5$. Значит, $KL = 2x = 10$.

© МФТИ, 2019

11 КЛАСС. БИЛЕТ 3

1. Решите уравнение $x^4 \cdot 2^{11-x} + 2^{2+\sqrt{2x+2}} = x^4 \cdot 2^{\sqrt{2x+2}} + 2^{13-x}$.

   Ответ: 7; $\sqrt{2}$.

   Решение. Перенося все члены влево и раскладывая выражение на множители, приходим к уравнению $(x^4-4)\left(2^{11-x} - 2^{\sqrt{2x+2}}\right) = 0$. Первый множитель равен 0 при $x = \pm\sqrt{2}$, и только $x = \sqrt{2}$ принадлежит области определения второго множителя. Второй множитель обращается в 0, если

   $$\sqrt{2+2x} = 11 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 2+2x = x^2 - 22x + 121, \\ 11 - x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 17, \\ x = 7, \end{array}\right. \\ x \leqslant 11 \end{cases} \Leftrightarrow x = 7.$$

   Окончательно получаем $x = 7$ или $x = \sqrt{2}$.

2. Числа a, b и c (в указанном порядке) образуют геометрическую прогрессию. Числа $c-a$, $2a-b$ и $a+b$ (в указанном порядке) образуют арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

   Ответ: -4 или 1.

   Решение. В силу того, что $c-a$, $2a-b$ и $a+b$ есть арифметическая прогрессия, среднее число равно полусумме двух других; следовательно, $2(2a-b) = (c-a)+(a+b) \Leftrightarrow c = 4a-3b$. Для того, чтобы последовательность была геометрической прогрессией, квадрат любого из её членов должен быть равен произведению двух соседних членов. Значит, $b^2 = ac$, или, учитывая равенство $c = 4a-3b$, мы получаем $a(4a-3b) = b^2$, $b^2+3ab-4a^2 = 0$. Решая это уравнение как квадратное относительно b, мы находим, что $b = -4a$ или $b = a$. Знаменатель q геометрической прогрессии равен $\frac{b}{a}$, следовательно, $q = -4$ или $q = 1$.

3. Найдите значение выражения $\cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$.

   Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

   Решение. Преобразуя произведение тригонометрических функций в сумму, получаем $\cos 10^\circ \cos 50^\circ = \frac{1}{2}\cos 40^\circ + \frac{1}{2}\cos 60^\circ = \frac{1}{2}\cos 40^\circ + \frac{1}{4}$. Следовательно, исходное выражение равно $\left(\frac{1}{2}\cos 40^\circ + \frac{1}{4}\right) cos 70^\circ = \frac{1}{2}\cos 40^\circ \cos 70^\circ + \frac{1}{4}\cos 70^\circ = \frac{1}{4}\cos 110^\circ + \frac{1}{4}\cos 30^\circ + \frac{1}{4}\cos 70^\circ$. Поскольку $\cos 110^\circ = \cos(180^\circ - 70^\circ) = -\cos 70^\circ$, окончательно находим, что $\frac{1}{4}\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

4. Найдите координаты точки M такой, что она лежит на оси Oy и касательные, проведённые к параболе $y = 7 - 5x - 3x^2$ из точки M, перпендикулярны друг другу.

   Ответ: $\left(0;\ \frac{55}{6}\right)$.

   Решение. Возьмём точку с ординатой a на оси Oy. Очевидно, интересующие нас прямые не могут быть параллельны осям координат. Тогда произведение угловых коэффициентов этих прямых равно (-1). Обозначим эти угловые коэффициенты через k и $-\frac{1}{k}$. Уравнения прямых могут быть записаны в виде $y = kx + a$ и $y = -\frac{1}{k}x + a$. Каждая из них должна иметь ровно одну общую точку с параболой, поэтому системы

   $$\begin{cases} y = 7 - 5x - 3x^2, \\ y = kx + a \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = 7 - 5x - 3x^2, \\ y = -\frac{1}{k}x + a \end{cases}$$

   должны иметь одно решение каждая. Приравнивая правые части в каждой из систем мы приходим к уравнениям

   $$kx + a = 7 - 5x - 3x^2 \quad \text{и} \quad -\frac{1}{k}x + a = 7 - 5x - 3x^2,$$

© МФТИ, 2019

каждое из которых должно иметь ровно одно решение.

Рассмотрим сначала первое уравнение. Оно равносильно уравнению $3x^2+(k+5)x+(a-7)=0$. Для того, чтобы у него было ровно одно решение, его дискриминант должен быть равен 0, откуда $(k+5)^2-12(a-7)=0$. Аналогично, рассматривая второе уравнение, получаем условие $\left(\frac{1}{k}-5\right)^2-12(a-7)=0$.

Так как числа k и a должны удовлетворять обоим указанным выше равенствам, мы можем вычесть второе равенство из первого, тем самым $(k+5)^2-\left(\frac{1}{k}-5\right)^2=0$; значит, $k+5=-\frac{1}{k}+5$ или $k+5=\frac{1}{k}-5$. Из первого уравнения следует, что $k^2=-1$, т.е. решений нет. Второе уравнение даёт $k^2+10k-1=0$, откуда $k=-5\pm\sqrt{26}$. Подставляя значения k в равенство $(k+5)^2=12(a-7)$, мы находим, что $12(a-7)=26$, $a=\frac{55}{6}$.

5. Точка P лежит на стороне LM параллелограмма $KLMN$. Известно, что $LP=MP=2$, $\angle KPN=\arccos\frac{11}{12}$, $KL=9$. Найдите площадь этого параллелограмма.

Ответ: $7\sqrt{23}$.

Решение. Пусть $\angle KLM=\varphi$, тогда $\angle LMN=180^\circ-\varphi$. Записываем теорему косинусов для треугольников KLP и MNP: $KP^2=81+4-36\cos\varphi$, $NP^2=81+4+36\cos\varphi$. Далее применяем теорему косинусов к треугольнику KPN:

$$KN^2=(85+36\cos\varphi)+(85-36\cos\varphi)-2\sqrt{(85+36\cos\varphi)(85-36\cos\varphi)}\cdot\frac{11}{12}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{85^2-36^2\cos^2\varphi}=84\Leftrightarrow\cos^2\varphi=\frac{13^2}{36^2}.$$

Значит, $\sin^2\varphi=\left(1-\frac{13}{36}\right)\left(1+\frac{13}{36}\right)=\frac{49\cdot23}{36^2}$, $\sin\varphi=\frac{7\sqrt{23}}{36}$, и поэтому площадь параллелограмма равна $KL\cdot LM\cdot\sin\varphi=7\sqrt{23}$.

6. Изобразите на плоскости множество точек, координаты $(x;\,y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases}\log_{|y-2|-2|y-4|+6}(x+3)>\log_{|y-2|-2|y-4|+6}(1+y),\\ x<13.\end{cases}$$

Найдите площадь этого множества.

Ответ: Множество точек есть совокупность трапеций $ABCD$, $CKLM$ and $MPQR$, граница не принадлежит множеству; координаты вершин следующие: $A(-3;\,0)$, $B(-3;\,1)$, $C(-1;\,1)$, $D(-2;\,0)$, $K(13;\,1)$, $L(13;\,11)$, $M(9;\,11)$, $P(10;\,12)$, $Q(-3;\,12)$, $R(-3;\,11)$. Площадь множества равна 104.

Решение. Рассмотрим две возможности.

(a) Основание логарифма больше 1. Это происходит тогда и только тогда, когда

$$|y-2|-2|y+4|+6>1\Leftrightarrow|2y-8|<|y-2|+5\Leftrightarrow\begin{cases}2y-8<|y-2|+5,\\2y-8>-|y-2|-5\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}|y-2|>2y-13,\\|y-2|>3-2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y-2>2y-13,\\y-2<13-2y,\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}y-2>3-2y,\\y-2<2y-3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y<11,\\y<5,\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{l}y>\frac{5}{3},\\y>1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y<11,\\y>1\end{cases}\Leftrightarrow1<y<11.$$

При этом $x+3>1+y$, т.е. $y<x+2$. Если мы также учтём, что $x<13$, получим трапецию $CKLM$ со следующими координатами вершин: $C(-1;\,1)$, $K(13;\,1)$, $L(13;\,11)$, $M(9;\,11)$.

© МФТИ, 2019

(b) Основание логарифма заключено между 0 и 1. Чтобы определить значения y, при которых это выполнено, мы решаем неравенство $|y-2|-2|y+4|+6>0$, а затем исключаем отрезок $[1;\,11]$ из полученного множества решений.

$$|y-2|-2|y+4|+6>0 \Leftrightarrow |2y-8|<|y-2|+6 \Leftrightarrow \begin{cases} 2y-8<|y-2|+6, \\ 2y-8>-|y-2|-6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |y-2|>2y-14, \\ |y-2|>2-2y \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} y-2>2y-14, \\ y-2<14-2y, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y-2>2-2y, \\ y-2<2y-2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} y<12, \\ y<\dfrac{16}{3}, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} y>\dfrac{4}{3}, \\ y>0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} y<12, \\ y>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<y<12.$$

Итак, основание логарифма принимает значения между 0 и 1 для $y\in(0;\,1)\cup(11;\,12)$. При этих значениях y исходное неравенство принимает вид $x+3<1+y$, или $y>x+2$. Если мы также учтём, что $x>-3$ (следует из области определения в первом неравенстве), получаем две трапеции $ABCD$ и $MPQR$, вершины которых расположены в точках $A(-3;\,0)$, $B(-3;\,1)$, $C(-1;\,1)$, $D(-2;\,0)$, $M(9;\,11)$, $P(10;\,12)$, $Q(-3;\,12)$, $R(-3;\,11)$.

Площадь множества равна сумме площадей всех трёх трапеций. $S_{ABCD}=\frac{1+2}{2}\cdot 1=1{,}5$, $S_{CKLM}=\frac{14+4}{2}\cdot 10=90$, $S_{ABCD}=\frac{12+13}{2}\cdot 1=12{,}5$; значит, $S_{\text{total}}=104$.

7. Равнобедренные трапеции $APRS$ и $PQRS$, наибольшими основаниями которых являются PR и PS соответственно ($PR=PS$), вписаны в окружность Ω. Диагонали трапеции $PQRS$ пересекаются в точке O, угол POS равен 120°. Найдите радиус Ω, если известно, что площадь треугольника APS равна $4+4\sqrt{3}$.

Ответ: 4.

Решение. Угол QOP, равный 60°, – это угол между пересекающимися хордами, поэтому он равен полусумме дуг PQ и RS. Так как эти дуги равны между собой (они заключены между параллельными хордами QR и PS), каждая из них равна 60°. Хорды AS и PR также параллельны друг другу (как основания трапеции), поэтому дуга AP также равна 60°. Хорды PR и PS равны между собой; следовательно, равны и соответствующие им дуги, а именно, дуга PQR равна дуге PAS. Отсюда $\smile QR = \smile AS$. Поскольку вся окружность составляет 360°, получаем, что $\smile QR = \smile AS = 90^\circ$.

Угол APS вписан в окружность Ω, и поэтому он равен $\frac{1}{2}\smile AS=\frac{1}{2}90^\circ=45^\circ$. Таким же образом находим, что $\angle APS=\frac{1}{2}\smile AP=30^\circ$. Тогда $\angle PAS=180^\circ-\angle APS-\angle ASP=105^\circ$. Пусть диаметр окружности равен d. По теореме синусов для треугольника APS получаем $AP=d\sin 30^\circ=\frac{d}{2}$, $AS=d\sin 45^\circ=\frac{d}{\sqrt{2}}$. Чтобы выразить площадь треугольника APS, нам также нужно, что $\sin 105^\circ=\sin(45^\circ+60^\circ)=\sin 45^\circ\cos 60^\circ+\cos 45^\circ\sin 60^\circ=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Следовательно, площадь треугольника APS равна $\frac{1}{2}AP\cdot AS\cdot\sin 105^\circ=\frac{d^2\left(\sqrt{3}+1\right)}{16}$. Приравнивая её к $4\left(\sqrt{3}+1\right)$, находим, что $d^2=64$, т.е. $d=8$, а радиус равен 4.

© МФТИ, 2019

11 КЛАСС. БИЛЕТ 4

1. Решите уравнение $x^4 \cdot 3^{\sqrt{1-3x}} + 3^{x+11} = x^4 \cdot 3^{x+9} + 3^{2+\sqrt{1-3x}}$.

   Ответ: $-5;\ -\sqrt{3}$.

   Решение. Перенося все члены влево и раскладывая выражение на множители, приходим к уравнению $(x^4-9)\left(3^{\sqrt{1-3x}} - 3^{x+9}\right) = 0$. Первый множитель равен 0 при $x = \pm\sqrt{3}$, и только $x = -\sqrt{3}$ принадлежит области определения второго множителя. Второй множитель обращается в 0, если

   $$\sqrt{1-3x} = x+9 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-3x = x^2+18x+81, \\ x+9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -16, \\ x = -5, \end{array}\right. \\ x \geq -9 \end{cases} \Leftrightarrow x = -5.$$

   Окончательно получаем $x = -5$ или $x = -\sqrt{3}$.

2. Числа a, b и c (в указанном порядке) образуют геометрическую прогрессию. Числа $3c-2a$, $a-b$ и $a-2c$ (в указанном порядке) образуют арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

   Ответ: -3 или 1.

   Решение. В силу того, что $3c-2a$, $a-b$ и $a-2c$ есть арифметическая прогрессия, среднее число равно полусумме двух других; следовательно, $2(a-b) = (a-2c)+(3c-2a) \Leftrightarrow c = 3a-2b$. Для того, чтобы последовательность была геометрической прогрессией, квадрат любого из её членов должен быть равен произведению двух соседних членов. Значит, $b^2 = ac$, или, учитывая равенство $c = 3a-2b$, мы получаем $a(3a-2b) = b^2$, $b^2+2ab-3a^2 = 0$. Решая это уравнение как квадратное относительно b, мы находим, что $b = -3a$ или $b = a$. Знаменатель q геометрической прогрессии равен $\frac{b}{a}$, следовательно, $q = -3$ или $q = 1$.

3. Найдите значение выражения $\sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ$.

   Ответ: $\frac{1}{8}$.

   Решение. Преобразуя произведение тригонометрических функций в сумму, получаем $\sin 10^\circ \sin 50^\circ = \frac{1}{2}\cos 40^\circ - \frac{1}{2}\cos 60^\circ = \frac{1}{2}\cos 40^\circ - \frac{1}{4}$. Следовательно, исходное выражение равно $\left(\frac{1}{2}\cos 40^\circ - \frac{1}{4}\right)\sin 70^\circ = \frac{1}{2}\cos 40^\circ \sin 70^\circ - \frac{1}{4}\sin 70^\circ = \frac{1}{4}\sin 110^\circ + \frac{1}{4}\sin 30^\circ - \frac{1}{4}\sin 70^\circ$. Поскольку $\sin 110^\circ = \sin(180^\circ - 70^\circ) = \sin 70^\circ$, окончательно находим, что $\frac{1}{4}\sin 30^\circ = \frac{1}{8}$.

4. Найдите координаты точки M такой, что она лежит на оси Oy и касательные, проведённые к параболе $y = 1+6x-4x^2$ из точки M, перпендикулярны друг другу.

   Ответ: $\left(0;\ \frac{53}{16}\right)$.

   Решение. Возьмём точку с ординатой a на оси Oy. Очевидно, интересующие нас прямые не могут быть параллельны осям координат. Тогда произведение угловых коэффициентов этих прямых равно (-1). Обозначим эти угловые коэффициенты через k и $-\frac{1}{k}$. Уравнения прямых могут быть записаны в виде $y = kx+a$ и $y = -\frac{1}{k}x+a$. Каждая из них должна иметь ровно одну общую точку с параболой, поэтому системы

   $$\begin{cases} y = 1+6x-4x^2, \\ y = kx+a \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = 1+6x-4x^2, \\ y = -\frac{1}{k}x+a \end{cases}$$

   должны иметь одно решение каждая. Приравнивая правые части в каждой из систем мы приходим к уравнениям

   $$kx+a = 1+6x-4x^2 \quad \text{и} \quad -\frac{1}{k}x+a = 1+6x-4x^2,$$

© МФТИ, 2019

каждое из которых должно иметь ровно одно решение.

Рассмотрим сначала первое уравнение. Оно равносильно уравнению $4x^2+(k-6)x+(a-1)=0$. Для того, чтобы у него было ровно одно решение, его дискриминант должен быть равен 0, откуда $(k-6)^2-16(a-1)=0$. Аналогично, рассматривая второе уравнение, получаем условие $\left(\frac{1}{k}+6\right)^2-16(a-1)=0$.

Так как числа k и a должны удовлетворять обоим указанным выше равенствам, мы можем вычесть второе равенство из первого, тем самым $(k-6)^2-\left(\frac{1}{k}+6\right)^2=0$; значит, $k-6=-\frac{1}{k}-6$ или $k-6=\frac{1}{k}+6$. Из первого уравнения следует, что $k^2=-1$, т.е. решений нет. Второе уравнение даёт $k^2-12k-1=0$, откуда $k=6\pm\sqrt{37}$. Подставляя значения k в равенство $(k-6)^2=16(a-1)$, мы находим, что $16(a-1)=37$, $a=\frac{53}{16}$.

5. Точка P лежит на стороне LM параллелограмма $KLMN$. Известно, что $LP=MP=3$, $\angle KPN=\arccos\frac{8}{9}$, $KL=5$. Найдите площадь этого параллелограмма.

Ответ: $2\sqrt{17}$.

Решение. Пусть $\angle KLM=\varphi$, тогда $\angle LMN=180^\circ-\varphi$. Записываем теорему косинусов для треугольников KLP и MNP: $KP^2=25+9-30\cos\varphi$, $NP^2=25+9+30\cos\varphi$. Далее применяем теорему косинусов к треугольнику KPN:

$$KN^2=(34+30\cos\varphi)+(34-30\cos\varphi)-2\sqrt{(34+30\cos\varphi)(34-30\cos\varphi)}\cdot\frac{8}{9}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{34^2-30^2\cos^2\varphi}=18\Leftrightarrow\cos^2\varphi=\frac{13\cdot16}{15^2}.$$

Значит, $\sin^2\varphi=1-\frac{13\cdot16}{15^2}=\frac{17}{15^2}$, $\sin\varphi=\frac{\sqrt{17}}{15}$, и поэтому площадь параллелограмма равна $KL\cdot LM\cdot\sin\varphi=2\sqrt{17}$.

6. Изобразите на плоскости множество точек, координаты $(x;\,y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases}\log_{|x+2|-2|x+3|+4}(y-2)>\log_{|x+2|-2|x+3|+4}(1-x),\\ y<13.\end{cases}$$

Найдите площадь этого множества.

Ответ: Множество точек есть совокупность трапеций $ABCD$, $APQR$ and $KLMR$, граница не принадлежит множеству; координаты вершин следующие: $A(-1;\,4)$, $B(-1;\,2)$, $C(0;\,2)$, $D(0;\,3)$, $P(-1;\,13)$, $Q(-7;\,13)$, $R(-7;\,10)$, $K(-8;\,11)$, $L(-8;\,2)$, $M(-7;\,2)$. Площадь множества равна 49.

Решение. Рассмотрим две возможности.

(a) Основание логарифма больше 1. Это происходит тогда и только тогда, когда

$$|x+2|-2|x+3|+4>1\Leftrightarrow|2x+6|<|x+2|+3\Leftrightarrow\begin{cases}2x+6<|x+2|+3,\\2x+6>-|x+2|-3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}|x+2|>2x+3,\\|x+2|>-2x-9\end{cases}\Leftrightarrow\left\{\left[\begin{array}{c}x+2>2x+3,\\x+2<-2x-3,\\x+2>-2x-9,\\x+2<2x+9\end{array}\right.\right.\Leftrightarrow\left\{\left[\begin{array}{l}x<-1,\\x<-\dfrac{5}{3},\\x>-\dfrac{11}{3},\\x>-7\end{array}\right.\right.\Leftrightarrow\begin{cases}x<-1,\\x>-7\end{cases}\Leftrightarrow-7<x<-1.$$

При этом $y-2>1-x$, i.e. $y>3-x$. Если мы также учтём, что $y<13$, получим трапецию $APQR$ со следующими координатами вершин: $A(-1;\,4)$, $P(-1;\,13)$, $Q(-7;\,13)$, $R(-7;\,10)$.

© МФТИ, 2019

(b) Основание логарифма заключено между 0 и 1. Чтобы определить значения x, при которых это выполнено, мы решаем неравенство $|x+2|-2|x+3|+4>0$, а затем исключаем отрезок $[-7;-1]$ из полученного множества решений.

$$|x+2|-2|x+3|+4>0 \Leftrightarrow |2x+6|<|x+2|+4 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+6<|x+2|+4, \\ 2x+6>-|x+2|-4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} |x+2|>2x+2, \\ |x+2|>-2x-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+2>2x+2, \\ x+2<-2x-2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x+2>-2x-10, \\ x+2<2x+10 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<0, \\ x<-\dfrac{4}{3}, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x>-4, \\ x>-8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<0, \\ x>-8 \end{cases} \Leftrightarrow -8<x<0.$$

Итак, основание логарифма принимает значения между 0 и 1 для $x \in (-8;-7) \cup (-1;0)$. При этих значениях x исходное неравенство принимает вид $y-2<1-x$, или $y<3-x$. Если мы также учтём, что $y>2$ (следует из области определения в первом неравенстве), получаем две трапеции $ABCD$ и $KLMR$, вершины которых расположены в точках $A(-1;4)$, $B(-1;2)$, $C(0;2)$, $D(0;3)$, $R(-7;10)$, $K(-8;11)$, $L(-8;2)$, $M(-7;2)$.

Площадь множества равна сумме площадей всех трёх трапеций. $S_{ABCD}=\frac{1+2}{2}\cdot 1=1{,}5$, $S_{APQR}=\frac{9+3}{2}\cdot 6=36$, $S_{KLMR}=\frac{9+8}{2}\cdot 1=8{,}5$; значит, $S_{\text{total}}=46$.

7. Равнобедренные трапеции $APRS$ и $PQRS$, наибольшими основаниями которых являются PR и PS соответственно ($PR=PS$), вписаны в окружность Ω. Диагонали трапеции $APRS$ пересекаются в точке O, угол AOP равен 60°. Найдите радиус Ω, если известно, что площадь треугольника PQR равна $9+9\sqrt{3}$.

Ответ: 6.

Решение. Угол AOP, равный 60°,– это угол между пересекающимися хордами, поэтому он равен полусумме дуг AP и RS. Так как эти дуги равны между собой (они заключены между параллельными хордами PR и AS), каждая из них равна 60°. Хорды QR и PS также параллельны друг другу (как основания трапеции), поэтому дуга PQ также равна 60°. Хорды PR и PS равны между собой; следовательно, равны и соответствующие им дуги, а именно, дуга PQR равна дуге PAS. Отсюда $\smile QR = \smile AS$. Поскольку вся окружность составляет 360°, получаем, что $\smile QR = \smile AS = 90^\circ$.

Угол QPR вписан в окружность Ω, и поэтому он равен $\frac{1}{2}\smile QR=\frac{1}{2}90^\circ=45^\circ$. Таким же образом находим, что $\angle PRQ=\frac{1}{2}\smile PQ=30^\circ$. Тогда $\angle PQR=180^\circ-\angle QRP-\angle PRQ=105^\circ$. Пусть диаметр окружности равен d. По теореме синусов для треугольника PQR получаем $PQ=d\sin 30^\circ=\frac{d}{2}$, $QR=d\sin 45^\circ=\frac{d}{\sqrt{2}}$. Чтобы выразить площадь треугольника PQR, нам также нужно, что $\sin 105^\circ=\sin(45^\circ+60^\circ)=\sin 45^\circ\cos 60^\circ+\cos 45^\circ\sin 60^\circ=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Следовательно, площадь треугольника PQR равна $\frac{1}{2}PQ\cdot QR\cdot\sin 105^\circ=\frac{d^2\left(\sqrt{3}+1\right)}{16}$. Приравнивая её к $9\left(\sqrt{3}+1\right)$, находим, что $d^2=144$, т.е. $d=12$, а радиус равен 6.

© МФТИ, 2019