18-я Столичная физико-математическая олимпиада МФТИ

Математика

Задания, решения, критерии оценивания

Общие указания по проведению

Время для решения заданий каждого класса – 2 часа.
Черновики не проверяются.

Общие указания по проверке

Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Максимально число баллов за олимпиаду 35.

Общие принципы выставления оценки:
– правильное решение – 7 баллов;
– решение с недочетами – 5 – 6 баллов;
– решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи – 4 балла;
– рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения – 1 балл;
– доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи – 2-3 балла.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

В работе все места с ошибками должны быть отмечены!

ЗАДАНИЯ

7 класс

7.1. Найдите какое-нибудь решение ребуса $AAAA \times B = BCAB + BAC$. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные.

7.2. На клетчатую доску 7×7 положили 16 трёхклеточных уголков так, что ровно одна клетка оказалась непокрытой. Верно ли, что всегда можно убрать один уголок так, что на освободившееся место можно положить трёхклеточный прямоугольник?

7.3. На острове живут 200 жителей – лжецов и рыцарей: лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду. Прибывший на остров путешественник встретил трёх островитян и спросил у каждого: «Сколько рыцарей живет на острове?». Первый ответил: «Сто», второй: «Больше ста», а третий: «Меньше ста». Когда путешественник спросил у них: «Сколько лжецов живет на острове?». Первый опять ответил: «Сто», второй: «Больше ста», а третий: «Меньше ста». Сколько рыцарей может жить на острове?

7.4. В конце каждого урока физкультуры учитель проводит забег и даёт победителю забега четыре конфеты, а всем остальным ученикам – по одной. К концу четверти Петя заслужил 29 конфет, Коля – 32, а Вася – 37 конфет. Известно, что один из них пропустил ровно один урок физкультуры, участвуя в олимпиаде по математике; остальные же уроков не пропускали. Кто из детей пропустил урок? Объясните свой ответ.

7.5. У каждого из 30 ребят ровно один враг среди остальных. (Вражда взаимна.) Они встали по кругу. После этого некоторые из ребят сказали: «Между мной и моим врагом стоят ровно трое ребят», а каждый из остальных сказал: «Между мной и моим врагом стоят ровно пять ребят». Могли ли все они сказать правду?

8 класс

8.1. За круглым столом сидят 11 человек. Какое наибольшее количество из них может сказать: «У меня на 10 рублей больше, чем у одного из моих соседей?»

8.2. Три действительных числа удовлетворяют равенству $x(y + z) = y(z + x) = z(x + y)$. Докажите, что среди этих чисел есть равные.

8.3. В треугольнике ABC проведена высота BH (H – на стороне AC). Найдите длины сторон треугольника ABC, если известно, что они – целые числа, $AH = 1$, $CH = 4$.

8.4. Существует ли восьмизначное число, которое при делении на свою первую цифру дает в остатке 1, при делении на вторую цифру дает в остатке 2, …, на восьмую цифру – 8?

8.5. Каких семизначных чисел без нулей в записи больше: тех, у которых сумма цифр равна 15, или тех, у которых она равна 48?

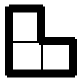
9 класс

9.1. Найдите шесть различных натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них делится на каждое из остальных чисел.

9.2. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузе AB выбраны точки E и F, а на катетах AC и BC точки P и Q соответственно так, что $AE=PE=QF=BF$. Пусть $AP=a$, $PC=b$, $CQ=c$. Найдите QB.

9.3. Пусть x, y, z – действительные числа такие, что все три числа $x+2y, y+2z, z+2x$ – рациональные. Докажите, что x, y, z – также рациональны.

9.4. Докажите, что любое число N, большее 101, можно представить в виде $N = a^3 - b^3 + c^2 - d^2$, где a, b, c, d – натуральные числа, большие 100.

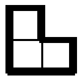
9.5. В клетках квадрата 10×10 расставлены действительные числа. Оказалось, что сумма чисел в любом трёхклеточном уголке  (повёрнутом как угодно) положительна. Обязательно ли сумма чисел во всем квадрате также положительна?

10 класс

10.1. Найдите четыре различных натуральных числа, ни одно из которых не делится ни на 2, ни на 3, ни на 4, но сумма любых двух делится на 2, сумма любых трех делится на 3, а сумма всех четырех делится на 4.

10.2. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC, пересекают описанную около этого треугольника окружность в точках Q и P соответственно. Известно, что прямые AP и CQ параллельны. Найдите угол ABC.

10.3. Учитель написал на доске три разных положительных числа. Петя записал в свою тетрадь три числа – их попарные суммы, а Коля в свою тетрадь записал три числа, обратных к числам, написанным на доске. Могли ли числа, записанные в тетрадях ребят совпасть?

10.4. В клетках квадрата 7×7 расставлены действительные числа. Оказалось, что сумма чисел в любом трёхклеточном уголке  (повёрнутом как угодно) положительна. Обязательно ли сумма чисел во всем квадрате также положительна?

10.5. Дана последовательность $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8, a_7 = 13, \ldots$, в которой каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Найдите значение выражения $(a_{2016})^2 - a_{2015} \cdot a_{2017}$.

11 класс

11.1. Найдите пять различных натуральных чисел, ни одно из которых не делится ни на 2, ни на 3, ни на 4, ни на 5, но сумма любых двух делится на 2, сумма любых трех делится на 3, сумма любых четырех делится на 4, а сумма всех пяти делится на 5.

11.2. Пусть x, y, z – действительные числа такие, что три числа $2x+5y, 2y+5z, 2z+5x$ – рациональные. Докажите, что x, y, z – также рациональны.

11.3. Пусть $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, $y = k_3x + b_3$ − уравнения трех касательных к параболе $y = x^2$. Докажите, что если $k_3 = k_1 + k_2$, то $b_3 \geq 2(b_1 + b_2)$.

11.4. Точки M и N делят ребро SA пирамиды SABC на три равные части (SM = MN = NA). Какой наибольший объем может иметь пирамида, если длины отрезков SA, BN и CM равны соответственно a, b и c?

11.5. В магазине продается 7 разных чашек и 7 разных блюдец. Покупатель хочет купить одинаковое количество чашек и блюдец (например, по три). Сколькими способами он может это сделать?

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

7 класс

7.1. Найдите какое-нибудь решение ребуса $AAAA \times B = BCAB + BAC$. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные.

Ответ. $1111 \times 2 = 2012 + 210$.

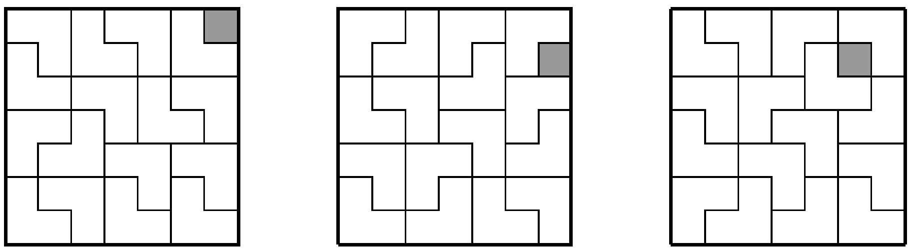
Замечание. Покажем, что решение единственно (в задаче это не требуется).
Заметим, что цифры A и B – ненулевые. В левой части равенства стоит число, большее $A \times B \times 1000$. В правой же части – число, меньшее $(B+2) \times 1000$. Таким образом, $A \times B < B+2$, или $B(A-1) < 2$. Значит, либо $A = 2$ и $B = 1$, либо $A = 1$.
Если $A = 2$ и $B = 1$, то получим $2222 \times 1 = \overline{1C21} + \overline{12C}$. Но правая часть не больше $1921 + 129 = 2050$. Значит, этот случай не реализуется.
Если $A = 1$, то получим $1111 \times B = \overline{BC1B} + \overline{B1C}$, или $\overline{BBBB} = \overline{BC1B} + \overline{B1C}$. Вычтем из обеих частей равенства число $\overline{BB00} = \overline{B000} + \overline{B00}$. Получим $\overline{BB} = \overline{C1B} + \overline{1C}$. Значит, $C = 0$, откуда $\overline{BB} = \overline{1B} + 10$, то есть $B = 2$.

Комментарий. Верный ответ – 7 баллов.

7.2. На клетчатую доску 7×7 положили 16 трёхклеточных уголков так, что ровно одна клетка оказалась непокрытой. Верно ли, что всегда можно убрать один уголок так, что на освободившееся место можно положить трёхклеточный прямоугольник?

Ответ. Неверно.

Решение. На рисунке приведены три возможных способа укладки уголков, при которых после убирания любого из уголков положить прямоугольник из трёх клеток не получится.



Замечание. Существуют и другие способы.

Комментарий. Верный ответ без объяснений – 0 баллов.

7.3. На острове живут 200 жителей – лжецов и рыцарей: лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду. Прибывший на остров путешественник встретил трёх островитян и спросил у каждого: «Сколько рыцарей живет на острове?». Первый ответил: «Сто», второй: «Больше ста», а третий: «Меньше ста». Когда путешественник спросил у них: «Сколько лжецов живет на острове?». Первый опять ответил: «Сто», второй: «Больше ста», а третий: «Меньше ста». Сколько рыцарей может жить на острове?

Ответ. 100.
Решение. Второй островитянин на оба вопроса ответил: «Больше ста». Но оба этих ответа не могут быть правдой. Значит, второй островитянин лжец. И он оба раза сказал неправду.

Поэтому на острове живут 100 рыцарей и 100 лжецов. Первый островитянин при этом рыцарь, третий – лжец.

Комментарий. Верный ответ без объяснений – 1 балл.
Верный ответ с примером – 2 балла.
Объяснено, что второй – лжец – 5 баллов.
Верный ответ с объяснениями – 7 баллов.

7.4. В конце каждого урока физкультуры учитель проводит забег и даёт победителю забега четыре конфеты, а всем остальным ученикам – по одной. К концу четверти Петя заслужил 29 конфет, Коля – 32, а Вася – 37 конфет. Известно, что один из них пропустил ровно один урок физкультуры, участвуя в олимпиаде по математике; остальные же уроков не пропускали. Кто из детей пропустил урок? Объясните свой ответ.

Ответ. Вася.

Решение. После каждого забега разность количества конфет, полученных любыми двумя из присутствовавших на уроке школьников, делится на 3 (эта разность равна 0 или 3). Значит, и в конце четверти разность количеств конфет, полученных любыми двумя из посетивших все уроки физкультуры школьников, делится на 3. А из данных чисел 29, 32, 37 разность, делящуюся на 3, дают только числа 29 и 32. Значит, пропустил урок тот школьник, который заработал 37 конфет.

Комментарий. Верный ответ без объяснений – 1 балл.

7.5. У каждого из 30 ребят ровно один враг среди остальных. (Вражда взаимна.) Они встали по кругу. После этого некоторые из ребят сказали: «Между мной и моим врагом стоят ровно трое ребят», а каждый из остальных сказал: «Между мной и моим врагом стоят ровно пять ребят». Могли ли все они сказать правду?

Ответ. Не могли.

Решение. Пусть ребята смогли встать по кругу так, что условие задачи выполняется. Дадим им 15 красных и 15 синих карточек – по одной каждому – так, чтобы у стоящих рядом карточки были бы разного цвета (то есть цвета карточек чередуются). Заметим, что тогда у пары врагов карточки будут одного цвета. Но ребята разбиваются на 15 пар врагов, поэтому карточек каждого цвета должно быть чётное количество, а их по 15. Противоречие.

Комментарий. Верный ответ без объяснений – 0 баллов.

8 класс

8.1. За круглым столом сидят 11 человек. Какое наибольшее количество из них может сказать: «У меня на 10 рублей больше, чем у одного из моих соседей?»

Ответ. 10.

Решение. Человек, у которого меньше всего денег, не мог сказать требуемую фразу. Поэтому количество людей, сказавших требуемую фразу не больше 10. Ровно 10 сказавших нужную фразу будет, например, в таком случае. Занумеруем людей по кругу. У первого будет 10 рублей, у второго – 20 рублей, …, у одиннадцатого – 110 рублей. Тогда все, кроме первого, могут сказать нужную фразу.

Комментарий. Верный ответ без объяснений – 0 баллов.
Доказано только, что фраз не больше 10 – 3 балла.
Только приведен пример, в котором сказано 10 фраз – 3 балла.

8.2. Три действительных числа удовлетворяют равенству $x(y + z) = y(z + x) = z(x + y)$. Докажите, что среди этих чисел есть равные.

Решение. Рассматривая разности, получаем: $xy - yz = 0$, $xy - yz = 0$. Если одна из переменных, например, z, равна нулю, то $xy = 0$, и еще одна из переменных должна быть равна нулю. Если же нулевых переменных нет, то получаем равенство $x(y - z) = 0$, откуда $y = z$.

Комментарий. Разобран только один случай – 2 балла.

8.3. В треугольнике ABC проведена высота BH (H – на стороне AC). Найдите длины сторон треугольника ABC, если известно, что они – целые числа, $AH = 1$, $CH = 4$.

Ответ. Ответ: $AB = 7$, $BC = 8$, $AC = 5$.

Решение. Пусть $AB = x$, $BC = y$. Тогда $BH^2 = x^2 - 1 = y^2 - 16$, то есть $y^2 - x^2 = 15$. Для натуральных чисел равенство $(y - x)(y + x) = 15$ возможно, только если $y - x = 1$, $y + x = 15$ или $y - x = 3$, $y + x= 5$. Первая система дает $y = 8$, $x = 7$, а вторая – $y = 4$, $x = 1$, то есть вырожденный треугольник.

Комментарий. Верный ответ без объяснений – 0 баллов.
Получен лишний ответ – не более 5 баллов.

8.4. Существует ли восьмизначное число, которое при делении на свою первую цифру дает в остатке 1, при делении на вторую цифру дает в остатке 2, …, на восьмую цифру – 8?

Ответ. Не существует.

Решение. Предположим, что такое число существует. Так как остатки при делении на 8 цифр – различные числа от 1 до 8, то цифры у восьмизначного числа различные. Остаток 8 при делении на цифру может быть только при делении на 9. Значит, последняя цифра равна 9. Остаток 7 при делении на цифру может быть только при делении на 8 или 9. Но 9 уже стоит на последнем месте. Поэтому предпоследняя цифра 8. Рассуждая аналогично, получим, что наше число может быть равно только 23456789. Однако это число, например, при делении на седьмую цифру (8) дает остаток 5, а не 7.

Комментарий. Верный ответ без объяснений – 0 баллов.
Доказано, что искомое число может быть равным только 23456789 – 5 баллов.

8.5. Каких семизначных чисел без нулей в записи больше: тех, у которых сумма цифр равна 15, или тех, у которых она равна 48?

Ответ. Чисел с суммой цифр 48 больше.

Решение. Обозначим первую группу чисел (с суммой цифр, равной 15), через M, а вторую группу (с суммой цифр, равной 48) – через N. Заметим, что $15+48=63=9\cdot 7$. Последнее равенство означает, что каждому числу A из M, не имеющему в записи цифр 0 и 9, соответствует число B из N, полученное заменой в A каждой цифры a на цифру $9-a$. При этом разным числам из M соответствуют разные числа из N, и полученные числа B также не имеют в записи цифр 0 и 9. Итак, оба множества содержат одинаковое количество чисел без нулей и девяток.
Осталось сравнить количества чисел в данных множествах, содержащих в своих десятичных записях цифру 9. Число с суммой цифр 15 может содержать только одну девятку, а остальные цифры должны быть равны 1, так как $9+1\cdot 6=15$. Количество таких чисел равно 7 – по количеству позиций, на которой стоит девятка. В то же время количество чисел в N, содержащих в своей записи хотя бы одну цифру 9, значительно больше. Даже у чисел с одной девяткой в записи сумма остальных шести цифр равна 39 и может быть набрана тремя шестёрками и тремя семёрками более, чем семью способами.

Комментарий. Верный ответ без объяснений – 0 баллов.
Содержательно используется идея соответствия – 3 балла.

9 класс

9.1. Найдите шесть различных натуральных чисел таких, что произведение любых двух из них делится на каждое из остальных чисел.

Ответ. Например, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}.

Комментарий. Любой верный пример – 7 баллов.

9.2. В прямоугольном треугольнике *ABC* на гипотенузе *AB* выбраны точки *E* и *F*, а на катетах *AC* и *BC* точки *P* и *Q* соответственно так, что *AE*=*PE*=*QF*=*BF*. Пусть *AP*=*a*, *PC*=*b*, *CQ*=*c*. Найдите *QB*.

Ответ. Ответ. $x=\dfrac{ac}{b}$.

Решение. Четырехугольник *PEFQ* – параллелограмм, так как его противоположные стороны *PE* и *QF* параллельны и равны. Тогда по теореме Фалеса *CP*:*PA*=*CQ*:*QB*, откуда $x=\dfrac{ac}{b}$.

Комментарий. Верный ответ без объяснений – 0 баллов.

9.3. Пусть x, y, z – действительные числа такие, что все три числа $x+2y, y+2z, z+2x$ – рациональные. Докажите, что x, y, z – также рациональны.

Решение. Сложив все три числа, получим, что $3x+3y+3z$, а, значит и $x+y+z$ – рациональные. Но тогда и $(x+y+z)-(x+2y)=z-y$, и $(x+y+z)-(y+2z)=x-z$ также рациональны. Пусть $z-y=r$, $x-z=q$, где p,q – рациональные. Тогда $y=z-r$, $x=z+q$ и $x+y+z=(z+q)+(z-r)+z=3z+q-r$ – рациональны. Откуда $3z$ а, значит и z рационально. Аналогично, x, y – рациональны.

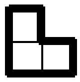
Комментарий. Доказано, что сумма трех чисел рациональна – 1 балл.
Доказано, что разности чисел рациональны – 3 балла.

9.4. Докажите, что любое число *N*, большее 101, можно представить в виде $N = a^3 - b^3 + c^2 - d^2$, где a, b, c, d – натуральные числа, большие 100.

Решение. Утверждение следует из тождества $n = n^3 - (n-1)^3 + n^2 - (2n-1)^2$.

Замечание. Существуют и другие решения.

Комментарий. Любой верный способ представления – 7 баллов.

9.5. В клетках квадрата 10×10 расставлены действительные числа. Оказалось, что сумма чисел в любом трёхклеточном уголке  (повёрнутом как угодно) положительна. Обязательно ли сумма чисел во всем квадрате также положительна?

Ответ. Обязательно.

Решение. Докажем, что сумма чисел в любом квадрате 2×2 клетки положительна. Действительно, рассмотрим любой квадрат 2×2. Пусть в нем записаны числа a,b,c,d. Рассмотрим трёхклеточный уголок с числами a,b,c. Их сумма положительна, значит, по крайней мере одно из них, например, a – тоже положительно. Сумма оставшихся трёх чисел квадрата 2×2 также положительна (так как числа стоят в уголке). Значит, сумма всех четырёх чисел любого квадрата 2×2 положительна.
Разобьем теперь квадрат 10×10 на 25 квадратов 2×2. В каждом из этих квадратов сумма чисел положительна. Значит, и сумма чисел во всем квадрате 10×10 положительна.

Комментарий. Верный ответ без объяснений – 0 баллов.
Доказано, что сумма чисел в любом квадрате 2×2 положительна – 4 балла.

10 класс

10.1. Найдите четыре различных натуральных числа, ни одно из которых не делится ни на 2, ни на 3, ни на 4, но сумма любых двух делится на 2, сумма любых трех делится на 3, а сумма всех четырех делится на 4.

Ответ. Подойдут, например, числа 1, 13, 25 и 37, то есть числа вида $12k+1$.

Комментарий. Любой верный пример – 7 баллов.

10.2. Биссектрисы углов *A* и *C* треугольника *ABC*, пересекают описанную около этого треугольника окружность в точках *Q* и *P* соответственно. Известно, что прямые *AP* и *CQ* параллельны. Найдите угол *ABC*.

Ответ. Ответ: $\dfrac{\pi}{3}$.

Решение. Пусть углы при вершинах A, B, C треугольника ABC равны, соответственно, $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$. Тогда $\angle QAB = \alpha$, значит, длина дуги *BQ* равна 2α.

Аналогично длина дуги BP равна 2γ. Из параллельности AP и CQ следует, что дуги PQ и AC равны. Но длина дуги AC равна 4β, значит, $2\alpha+2\gamma=4\beta$. С другой стороны, $2\alpha+2\beta+2\gamma=\pi$, значит, $2\beta=\dfrac{\pi}{3}$

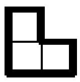
Комментарий. Верный ответ без объяснений (в том числе просто проверка того, что угол $\dfrac{\pi}{3}$ подходит) – 0 баллов.

10.3. Учитель написал на доске три разных положительных числа. Петя записал в свою тетрадь три числа – их попарные суммы, а Коля в свою тетрадь записал три числа, обратных к числам, написанным на доске. Могли ли числа, записанные в тетрадях ребят совпасть?

Ответ. Не могли.

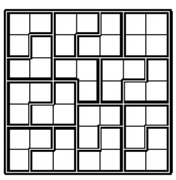
Решение. Пусть на доске написаны числа $0<a<b<c$. Тогда у Пети записаны числа $a+b<a+c<b+c$, а у Коли числа $\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}$. Предположим, что числа в тетрадях могли совпасть. Тогда меньшее число равно меньшему, среднее – среднему, большее – большему, то есть $a+b=\dfrac{1}{c}$, $a+c=\dfrac{1}{b}$, $b+c=\dfrac{1}{a}$. Из первых двух равенств получаем $ac+bc=1$ и $ab+bc=1$. Вычтем из первого полученного равенства второе. Получим $ac=ab$. Отсюда $c=b$ – противоречие.

Комментарий. Правильно найденное упорядочение чисел – 2 балла.
Верный ответ без объяснений – 0 баллов.

10.4. В клетках квадрата 7×7 расставлены действительные числа. Оказалось, что сумма чисел в любом трёхклеточном уголке  (повёрнутом как угодно) положительна. Обязательно ли сумма чисел во всем квадрате также положительна?

Ответ. Обязательно.

Решение. Докажем, что сумма чисел в любом квадрате 2×2 клетки положительна. Действительно, рассмотрим любой квадрат 2×2. Пусть в нем записаны числа a,b,c,d. Рассмотрим трёхклеточный уголок с числами a,b,c. Из сумма положительна, значит, по крайней мере одно из них, например, a – тоже положительно. Сумма оставшихся трёх чисел квадрата 2×2 положительна (так как числа стоят в уголке). Значит, сумма всех четырёх чисел квадрата 2×2 положительна.



Разобьем теперь квадрат 7×7 на квадраты 2×2 и трёхклеточные уголки, как показано на рисунке. В каждой фигурке сумма чисел положительна. Значит, и сумма чисел во всем квадрате 7×7 положительна.

Комментарий. Верный ответ без объяснений – 0 баллов.
Доказано, что сумма чисел в любом квадрате 2×2 положительна – 3 балла.

10.5. Дана последовательность $a_1=1, a_2=1, a_3=2, a_4=3, a_5=5, a_6=8, a_7=13, \ldots$, в которой каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Найдите значение выражения $(a_{2016})^2 - a_{2015}\cdot a_{2017}$.

Ответ. –1.

Решение. Пусть a, b, c, d – какие-то четыре последовательных члена нашей последовательности. Тогда $c=a+b$ и, значит, $b^2 - a\cdot c = b^2 - a\cdot b - a^2$. Далее, $d=b+c=a+2b$, поэтому $c^2 - b\cdot d = (a+b)^2 - b\cdot(a+2b) = a^2 + a\cdot b - b^2$. Значит, выражение ${a_n}^2 - a_{n-1}\cdot a_{n+1}$ постоянно по модулю и меняет свой знак при переходе от n к $n+1$. Следовательно, искомое выражение равно ${a_2}^2 - a_1\cdot a_3 = -1$.

Комментарий. Верный ответ без объяснений – 0 баллов.
Доказано, что выражение ${a_n}^2 - a_{n-1}\cdot a_{n+1}$ постоянно по модулю – 5 баллов.

11 класс

11.1. Найдите пять различных натуральных чисел, ни одно из которых не делится ни на 2, ни на 3, ни на 4, ни на 5, но сумма любых двух делится на 2, сумма любых трех делится на 3, сумма любых четырех делится на 4, а сумма всех пяти делится на 5.

Ответ. Подойдут, например, числа 1, 61, 121, 181 и 481, то есть числа вида 60k+1.

Комментарий. Любой верный пример – 7 баллов.

11.2. Пусть x, y, z – действительные числа такие, что три числа $2x+5y, 2y+5z, 2z+5x$ – рациональные. Докажите, что x, y, z – также рациональны.

Решение. Запишем систему $\begin{cases} 2x+5y=a, \\ 2y+5z=b, \\ 2z+5x=c, \end{cases}$ где a, b, c - рациональные числа.

Решая ее, получим, $x=\dfrac{4a-10b+25c}{133}$, $y=\dfrac{4b-10c+25a}{133}$, $x=\dfrac{4c-10a+25b}{133}$ – рациональные.

Комментарий. Верный ответ без объяснений – 0 баллов.

11.3. Пусть $y=k_1x+b_1, y=k_2x+b_2, y=k_3x+b_3$ – уравнения трех касательных к параболе $y=x^2$. Докажите, что если $k_3=k_1+k_2$, то $b_3 \ge 2(b_1+b_2)$.

Решение. Прямая $y = kx + b$ касается параболы $y = x^2$, если уравнение $x^2 = kx + b$ имеет единственное решение, то есть $D = k^2 + 4b = 0$, откуда $4b_i = -k_i^2$, $i = 1, 2, 3$. Тогда $4b_3 = -k_3^2 = -(k_1 + k_2)^2 = -k_1^2 - 2k_1k_2 - k_2^2 \geq -2k_1^2 - 2k_2^2 = 8b_1 + 8b_2$, так как $k_1^2 + k_2^2 \geq 2k_1k_2$.

Комментарий. Верный ответ без объяснений – 0 баллов.

11.4. Точки M и N делят ребро SA пирамиды SABC на три равные части (SM = MN = NA). Какой наибольший объем может иметь пирамида, если длины отрезков SA, BN и CM равны соответственно a, b и c?

Ответ. $\dfrac{abc}{6}$.

Решение. Пусть *K* – середина ребра *AC*. Тогда в пирамиде *NAKB* длины ребер: *NA* = *a*/3, *NB* = *b*, *NK* = *c*/2 (*NK* – средняя линия треугольника *AMC*). Площадь треугольника *KNB* не превосходит полупроизведения длин его сторон, а длина высоты, проведенной из точки *A* к плоскости *KNB*, не больше длины наклонной, то есть длины *AN*. Значит, $V \leq \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{bc}{2} \cdot \dfrac{a}{3}$.

Значит, максимальный объем пирамиды *NAKB* равен $\dfrac{abc}{36}$, и он достигается, когда все плоские углы при вершине *N* пирамиды *NAKB* – прямые. В то же время объем пирамиды *SABC* в 6 раз больше, так как у них общий трехгранный угол с вершиной *A*, а выходящие из этой вершины ребра относятся как: AB : AB = 1 : 1, AN : AS = 1 : 3, AK : AC = 1 : 2.

Комментарий. Верный ответ без объяснений – 0 баллов.

Доказано только, что объем не больше $\dfrac{abc}{6}$ – 4 балла.

Только приведен пример пирамиды с объемом $\dfrac{abc}{6}$ – 2 балла.

11.5. В магазине продается 7 разных чашек и 7 разных блюдец. Покупатель хочет купить одинаковое количество чашек и блюдец (например, по три). Сколькими способами он может это сделать?

Ответ. 3431.

Решение.
Пусть имеется некоторый набор из *k* чашек и *k* блюдец. Поставим ему в соответствие множество из 7 предметов, в которое включим *k* чашек, вошедших в набор, и 7 – *k* блюдец, не вошедших в него. Установленное соответствие является взаимно однозначным. Значит, общее количество способов равно числу способов выбрать 7 предметов из 14, то есть равно $C_{14}^7 = 3432$. Однако мы посчитали способ, в котором участвует 0 чашек (и 0 блюдец). Поэтому итоговый ответ 3431.
Комментарий. Верный ответ без объяснений – 2 балла.