Теория вероятностей — Листок 2: Условные вероятности, независимость событий, формулы полной вероятности и Байеса

1. Из множества чисел $\{1, 2, \ldots, N\}$ по схеме выбора без возвращения выбираются три числа. Найдите условную вероятность того, что третье число попадет в интервал, образованный первыми двумя, если известно, что первое число меньше второго.

2. Среди 25 экзаменационных билетов 5 "хороших". Два студента по очереди берут по одному билету. Найдите вероятность того, что а) первый студент взял "хороший" билет; б) второй студент взял "хороший" билет.

3. Из совокупности всех подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, N\}$ по схеме выбора с возвращением выбираются подмножества A_1, A_2. Для любых l_1, l_2 найдите условную вероятность
$$\mathbb{P}(|A_1| = l_1, |A_2| = l_2 | A_1 \cap A_2 = \emptyset).$$

4. Бросаются две игральные кости. Выясните какие из следующих событий являются независимыми:
$$A = \{\text{на первой кости выпало 6}\}, \quad B = \{\text{на второй кости выпало не более 2}\},$$
$$C = \{\text{сумма очков на костях равна 7}\},$$
$$D = \{\text{разность очков на первой и второй кости равна 1}\},$$
$$E = \{\text{очки на костях различаются на 3}\}.$$

5. Приведите пример трех попарно независимых, но зависимых в совокупности событий.

6. Существуют ли три попарно зависимых события, для которых выполнено равенство $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$?

7. Докажите, что если события A и B независимы, то независимы также пары событий A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

8. В одной урне содержится 1 белый и 2 черных шара, а в другой урне — 2 белых и 3 черных шара. В третью урну кладут два шара, случайно выбранных из первой урны, и два шара, случайно выбранных из второй. Какова вероятность того, что шар, извлеченный из третьей урны, будет белым?

9. Студент сдает тест. На очередную задачу имеется K вариантов ответа. Студент действует так: либо он умеет решать задачу, и тогда он с определенностью находит правильный ответ, либо он не умеет ее решать, и тогда он выбирает ответ наугад. Считается, априори, что студент умеет решать задачу с вероятностью p. Найдите вероятность того, что студент умел решать задачу, коль скоро полученный им ответ оказался верным.

10. Имеется 10 белых и 10 черных шаров. Вам предлагают каким-то образом разложить эти шары по двум урнам. Далее случайно выбирается одна из урн, а из нее вытаскивается шар. Если он оказывается белым, то Вы получаете приз. Как нужно разложить шары по урнам, чтобы вероятность выиграть приз была наибольшей?

11. Предположим, что в условиях предыдущей задачи будет n белых и n черных шаров. а) Докажите, что при любом $n > 1$ их можно разложить по урнам таким образом, чтобы вероятность вытащить белый шар была больше половины. б) Докажите, что при любой раскладке шаров вероятность вытащить белый шар меньше трех четвертей. в) Каким образом нужно разложить шары по урнам, чтобы эта вероятность была наибольшей?