

1. Решите уравнение $\frac{|\cos x| - \cos 3x}{\cos x \sin 2x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Возможны два случая.

а) $\cos x \geq 0$. Тогда $\frac{\cos x - \cos 3x}{\cos x \sin 2x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{2 \sin x \sin 2x}{\cos x \sin 2x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Учитывая условие,

получаем $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) $\cos x < 0$. Тогда $\frac{-\cos x - \cos 3x}{\cos x \sin 2x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{-2 \cos x \cos 2x}{\cos x \sin 2x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \operatorname{ctg} 2x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Косинус

отрицателен при $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ и при $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Решите уравнение $\left(\frac{3x}{2}\right)^{\log_3(8x)} = \frac{x^7}{8}$.

Ответ. $x = \frac{729}{8}$, $x = 2$.

Решение. Логарифмируя по основанию 3, получаем уравнение, равносильное исходному:

$$\log_3(8x) \cdot \log_3\left(\frac{3x}{2}\right) = \log_3\left(\frac{x^7}{8}\right) \Leftrightarrow (\log_3 x + 3 \log_3 2)(1 + \log_3 x - \log_3 2) = 7 \log_3 x - 3 \log_3 2.$$

Обозначим $\log_3 x = y$, $\log_3 2 = a$. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых уравнение принимает вид $y^2 + (2a - 6)y - 3a^2 + 6a = 0$. Решаем квадратное уравнение относительно y :

$$\frac{D}{4} = (a - 3)^2 + (3a^2 - 6a) = 4a^2 - 12a + 9 = (2a - 3)^2, \quad y = 3 - a \pm (2a - 3) \Leftrightarrow \begin{cases} y = a, \\ y = 6 - 3a. \end{cases}$$

Находим x : если $y = a$, то $\log_3 x = \log_3 2$ и $x = 2$; если $y = 6 - 3a$, то $\log_3 x = 6 - 3 \log_3 2$ и $x = \frac{729}{8}$.

3. Найдите количество натуральных чисел k , не превосходящих 291000 и таких, что $k^2 - 1$ делится нацело на 291.

Ответ. 4000.

Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $(k - 1)(k + 1) : (3 \cdot 97)$. Значит, одно из чисел $(k + 1)$ или $(k - 1)$ делится на 97. Рассмотрим два случая.

а) $(k + 1) : 97$, т.е. $k = 97p + 96$, $p \in \mathbb{Z}$. Тогда получаем $(97p + 95)(97p + 97) : (3 \cdot 97) \Leftrightarrow (97p + 95)(p + 1) : 3$. Первый множитель делится на 3 при $p = 3q + 1$, $q \in \mathbb{Z}$, а второй – при $p = 3q + 2$, $q \in \mathbb{Z}$, откуда получаем, что $k = 291q + 193$, $k = 291q + 290$, $q \in \mathbb{Z}$.

б) $(k - 1) : 97$, т.е. $k = 97p + 1$, $p \in \mathbb{Z}$. Тогда получаем $97p(97p + 2) : (3 \cdot 97) \Leftrightarrow (97p + 2)p : 3$. Первый множитель делится на 3 при $p = 3q + 1$, $q \in \mathbb{Z}$, а второй – при $p = 3q$, $q \in \mathbb{Z}$, откуда получаем, что $k = 291q + 98$, $k = 291q + 1$, $q \in \mathbb{Z}$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки 193, 290, 98, 1 при делении на 291, то есть подходят каждые 4 из 291 подряд идущих чисел. Так как $291000 = 291 \cdot 1000$, получаем $4 \cdot 1000 = 4000$ чисел.

4. Решите систему $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2, \\ 81x^4 - 18x^2y^2 + y^4 - 360x^2 - 40y^2 + 400 = 0. \end{cases}$

Ответ. $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы:

$$81x^4 - 18x^2y^2 + y^4 - 360x^2 - 40y^2 + 400 = 0 \Leftrightarrow 81x^4 + 18x^2y^2 + y^4 - 360x^2 - 40y^2 + 400 = 36x^2y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (9x^2 + y^2)^2 - 40(9x^2 + y^2) + 400 = 36x^2y^2 \Leftrightarrow (9x^2 + y^2 - 20)^2 = (6xy)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 + y^2 - 20 = 6xy, \\ 9x^2 + y^2 - 20 = -6xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x - y)^2 = 20, \\ (3x + y)^2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = \pm 2\sqrt{5}, \\ 3x + y = \pm 2\sqrt{5}. \end{cases}$$

В каждом из четырёх случаев выражаем y и подставляем в неравенство.

Если $y = 3x + 2\sqrt{5}$, то $x^2 + (3x + 2\sqrt{5})^2 \leq 2$, $10x^2 + 12x\sqrt{5} + 18 \leq 0$, $(x\sqrt{10} + 3\sqrt{2})^2 \leq 0$, $x = -\frac{3}{\sqrt{5}}$. Тогда $y = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Остальные случаи разбираются аналогично. В итоге получаем 4 решения: $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

5. На ребре AA_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка T такая, что $AT : A_1T = 4 : 1$. Точка T является вершиной прямого кругового конуса такого, что три вершины призмы принадлежат окружности его основания.

а) Найдите отношение высоты призмы к ребру её основания.

б) Пусть дополнительно известно, что $BB_1 = 5$. Найдите объём конуса.

Ответ. а) $\sqrt{\frac{5}{3}}$; б) $V = \frac{1280\pi}{29\sqrt{29}}$.

Решение. Если три вершины призмы лежат на окружности основания конуса, то это означает, что три вершины призмы равноудалены от точки T , т.е. три из отрезков TA , TB , TC , TA_1 , TB_1 , TC_1 равны между собой.

Заметим, что $TB_1 = TC_1 < TB = TC$; кроме того $TB > TA$, $TB_1 > TA_1$. Из этих неравенств следует, что отрезки TB и TC самые длинные, а отрезок TA_1 – самый короткий. Значит, равны между собой отрезки TA , TB_1 и TC_1 .

а) Обозначим $TA_1 = x$, $TA = 4x$. Тогда $TB_1 = 4x$. По теореме Пифагора для треугольника A_1B_1T находим, что

$$A_1B_1 = x\sqrt{15}. \text{ Значит, искомое отношение равно } \frac{5x}{x\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

б) Из треугольника A_1B_1A по теореме Пифагора получаем, что $AB_1 = 2x\sqrt{10}$. Радиус основания конуса – это радиус окружности, описанной около треугольника AB_1C_1 . Его стороны: $AB_1 = AC_1 = 2x\sqrt{10}$, $B_1C_1 = x\sqrt{15}$.

Тогда находим его высоту: $AH = \frac{x\sqrt{145}}{2}$, площадь: $S = \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{15} \cdot \frac{x\sqrt{145}}{2} = \frac{5x^2\sqrt{87}}{4}$, радиус описанной

$$\text{окружности: } R = \frac{2x\sqrt{10} \cdot 2x\sqrt{10} \cdot x\sqrt{15}}{4S} = \frac{8x\sqrt{5}}{\sqrt{29}}.$$

Образующая конуса – это отрезок AT , т.е. она равна $4x$. Тогда высота конуса $h = \sqrt{16x^2 - \frac{320x^2}{29}} = \frac{12x}{\sqrt{29}}$.

Находим объём конуса: $V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{320x^2}{29} \cdot \frac{12x}{\sqrt{29}} = \frac{1280\pi x^3}{29\sqrt{29}}$. Так как $x = 1$, окончательно получаем $V = \frac{1280\pi}{29\sqrt{29}}$.

6. Найдите все значения параметра b , для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x = |y - b| + \frac{3}{b}, \\ x^2 + y^2 + 32 = a(2y - a) + 12x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

Ответ. $b \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{3}{8}; +\infty\right)$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x-6)^2 + (y-a)^2 = 2^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 2 с центром $(6; a)$. При всевозможных $a \in \mathbb{R}$ эти окружности заметают полосу $4 \leq x \leq 8$.

Первое уравнение задаёт “уголок” с ветвями, направленными вправо, с вершиной в точке $\left(\frac{3}{b}; b\right)$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы “уголок”, задаваемый первым уравнением, имел хотя бы одну общую точку с полосой $4 \leq x \leq 8$, а для этого нужно, чтобы абсцисса его вершины удовлетворяла неравенству $x_{\text{в}} \leq 8$, т.е. $\frac{3}{b} \leq 8$ откуда $b \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{3}{8}; +\infty\right)$.

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O . Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы BAD и BCD соответственно, при этом первая касается стороны AD в точке K , а вторая касается стороны BC в точке T .

а) Найдите радиус окружности Ω_1 , если $AK = 2$, $CT = 8$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_2 является центром окружности, описанной около треугольника BOC . Найдите угол BDC .

Ответ. а) $r = 4$, б) $\angle BDC = \arctg \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ или $\angle BDC = \pi - \arctg \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Решение. а) Отрезки AO_1 и CO_2 являются биссектрисами углов BAD и BCD (центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла). Так как четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов BAD и BCD равна 180° , поэтому сумма их половин – углов KAO_1 и TCO_2 – равна 90° . Пусть $\angle O_1AK = \alpha$. Тогда $\angle TO_2C = 90^\circ - \angle TCO_2 = \alpha$. Выражая двумя способами $\tg \alpha$, получаем:

$$\tg \alpha = \frac{O_1K}{AK} = \frac{CT}{O_2T}, \quad \frac{r}{2} = \frac{8}{r}, \quad r = 4.$$

б) $O_2B = O_2C$ как радиусы окружности, описанной около треугольника BOC , поэтому высота этого треугольника O_2T также является его медианой. Точки O , O_2 и T лежат на одной прямой (на серединном перпендикуляре к отрезку BC). Далее находим: $O_2C = \sqrt{O_2T^2 + CT^2} = 4\sqrt{5}$, $O_2O = O_2C = 4\sqrt{5}$ (как радиусы одной окружности)

Возможны два случая: точки O_2 и O могут лежать либо по одну сторону от прямой BC , либо по разные стороны от неё.

В первом случае получаем: $\angle BDC = \frac{1}{2} \angle BOC = \angle COT = \arctg \frac{CT}{OT} = \arctg \frac{8}{4 + 4\sqrt{5}} = \arctg \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Во втором случае: $\angle BDC = \pi - \frac{1}{2} \angle BOC = \pi - \angle COT = \pi - \arctg \frac{CT}{OT} = \pi - \arctg \frac{8}{4\sqrt{5}-4} = \pi - \arctg \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

1. Решите уравнение $\frac{|\sin x| - \sin 3x}{\cos x \cos 2x} = 2\sqrt{3}$.

Ответ. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Возможны два случая.

а) $\sin x \geq 0$. Тогда $\frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x \cos 2x} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{-2 \sin x \cos 2x}{\cos x \cos 2x} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Учитывая условие, получаем $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

б) $\sin x < 0$. Тогда $\frac{-\sin x - \sin 3x}{\cos x \cos 2x} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{-2 \cos x \sin 2x}{\cos x \cos 2x} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Синус отрицателен при $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ и при $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. Решите уравнение $\left(\frac{x}{243}\right)^{\log_2\left(\frac{9x}{4}\right)} = \frac{729}{x^4}$.

Ответ. $x = \frac{243}{4}$, $x = \frac{1}{9}$.

Решение. Логарифмируя по основанию 2, получаем уравнение, равносильное исходному:

$$\log_2\left(\frac{x}{243}\right) \cdot \log_2\left(\frac{9x}{4}\right) = \log_2\left(\frac{729}{x^4}\right) \Leftrightarrow (\log_2 x - 5 \log_2 3)(-2 + \log_2 x + 2 \log_2 3) = 6 \log_2 3 - 4 \log_2 x.$$

Обозначим $\log_2 x = y$, $\log_2 3 = a$. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых уравнение принимает вид $y^2 - (3a - 2)y + 4a - 10a^2 = 0$. Решаем квадратное уравнение относительно y :

$$D = (3a - 2)^2 - 4(4a - 10a^2) = 49a^2 - 28a + 4 = (7a - 2)^2, y = \frac{3a - 2 \pm (7a - 2)}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5a - 2, \\ y = -2a. \end{cases}$$

Находим x : если $y = -2a$, то $\log_2 x = -2 \log_2 3$ и $x = \frac{1}{9}$; если $y = 5a - 2$, то $\log_2 x = 5 \log_2 3 - 2$ и $x = \frac{243}{4}$.

3. Найдите количество натуральных чисел k , не превосходящих 445000 и таких, что $k^2 - 1$ делится нацело на 445.

Ответ. 4000.

Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $(k - 1)(k + 1) : (5 \cdot 89)$. Значит, одно из чисел $(k + 1)$ или $(k - 1)$ делится на 89. Рассмотрим два случая.

а) $(k + 1) : 89$, т.е. $k = 89p + 88, p \in \mathbb{Z}$. Тогда получаем $(89p + 87)(89p + 89) : (5 \cdot 89) \Leftrightarrow (89p + 87)(p + 1) : 5$. Первый множитель делится на 5 при $p = 5q + 2, q \in \mathbb{Z}$, а второй – при $p = 5q + 4, q \in \mathbb{Z}$, откуда получаем, что $k = 445q + 276, k = 445q + 444, q \in \mathbb{Z}$.

б) $(k - 1) : 89$, т.е. $k = 89p + 1, p \in \mathbb{Z}$. Тогда получаем $89p(89p + 2) : (5 \cdot 89) \Leftrightarrow (89p + 2)p : 5$. Первый множитель делится на 5 при $p = 5q + 2, q \in \mathbb{Z}$, а второй – при $p = 5q, q \in \mathbb{Z}$, откуда получаем, что $k = 445q + 179, k = 445q + 1, q \in \mathbb{Z}$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки 276, 444, 179, 1 при делении на 445, то есть подходят каждые 4 из 445 подряд идущих чисел. Так как $445000 = 445 \cdot 1000$, получаем $4 \cdot 1000 = 4000$ чисел.

4. Решите систему $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ 16x^4 - 8x^2y^2 + y^4 - 40x^2 - 10y^2 + 25 = 0. \end{cases}$

Ответ. $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы:

$$16x^4 - 8x^2y^2 + y^4 - 40x^2 - 10y^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow 16x^4 + 8x^2y^2 + y^4 - 40x^2 - 10y^2 + 25 = 16x^2y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (4x^2 + y^2)^2 - 10(4x^2 + y^2) + 25 = 16x^2y^2 \Leftrightarrow (4x^2 + y^2 - 5)^2 = (4xy)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + y^2 - 5 = 4xy, \\ 4x^2 + y^2 - 5 = -4xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x - y)^2 = 5, \\ (2x + y)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = \pm\sqrt{5}, \\ 2x + y = \pm\sqrt{5}. \end{cases}$$

В каждом из четырёх случаев выражаем y и подставляем в неравенство.

Если $y = 2x + \sqrt{5}$, то $x^2 + (2x + \sqrt{5})^2 \leq 1$, $5x^2 + 4x\sqrt{5} + 4 \leq 0$, $(x\sqrt{5} + 2)^2 \leq 0$, $x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$. Тогда $y = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Остальные случаи разбираются аналогично. В итоге получаем 4 решения: $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

5. На ребре BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка T такая, что $BT : B_1T = 2 : 5$. Точка T является вершиной прямого кругового конуса такого, что три вершины призмы принадлежат окружности его основания.

а) Найдите отношение высоты призмы к ребру её основания.

б) Пусть дополнительно известно, что $CC_1 = 7$. Найдите объём конуса.

Ответ. а) $\sqrt{\frac{7}{3}}$; б) $V = \frac{3500\pi}{37\sqrt{37}}$.

Решение. Если три вершины призмы лежат на окружности основания конуса, то это означает, что три вершины призмы равноудалены от точки T , т.е. три из отрезков TA , TB , TC , TA_1 , TB_1 , TC_1 равны между собой.

Заметим, что $TA_1 = TC_1 > TA = TC$; кроме того $TA > TB$, $TA_1 > TB_1$. Из этих неравенств следует, что отрезки TA_1 и TC_1 самые длинные, а отрезок TB – самый короткий. Значит, равны между собой отрезки TA , TC и TB_1 .

а) Обозначим $TB_1 = 5x$, $TB = 2x$. Тогда $TA = 5x$. По теореме Пифагора для треугольника ABT находим, что

$$AB = x\sqrt{21}. \text{ Значит, искомое отношение равно } \frac{7x}{x\sqrt{21}} = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

б) Из треугольника BB_1A по теореме Пифагора получаем, что $AB_1 = x\sqrt{70}$. Радиус основания конуса – это радиус окружности, описанной около треугольника AB_1C . Его стороны: $AB_1 = CB_1 = x\sqrt{70}$, $AC = x\sqrt{21}$.

Тогда находим его высоту: $B_1H = \frac{x\sqrt{259}}{2}$, площадь: $S = \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{21} \cdot \frac{x\sqrt{259}}{2} = \frac{7x^2\sqrt{111}}{4}$, радиус описанной

$$\text{окружности: } R = \frac{x\sqrt{70} \cdot x\sqrt{70} \cdot x\sqrt{21}}{4S} = \frac{10x\sqrt{7}}{\sqrt{37}}.$$

Образующая конуса – это отрезок AT , т.е. она равна $5x$. Тогда высота конуса $h = \sqrt{25x^2 - \frac{700x^2}{37}} = \frac{15x}{\sqrt{37}}$.

Находим объём конуса: $V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{700x^2}{37} \cdot \frac{15x}{\sqrt{37}} = \frac{3500\pi x^3}{37\sqrt{37}}$. Так как $x = 1$, окончательно получаем $V = \frac{3500\pi}{37\sqrt{37}}$.

6. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases} x = |y + a| + \frac{4}{a}, \\ x^2 + y^2 + 24 + b(2y + b) = 10x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

Ответ. $a \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x-5)^2 + (y+b)^2 = 1^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 1 с центром $(5; -b)$. При всевозможных $b \in \mathbb{R}$ эти окружности заметают полосу $4 \leq x \leq 6$.

Первое уравнение задаёт “уголок” с ветвями, направленными вправо, с вершиной в точке $\left(\frac{4}{a}; -a\right)$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы “уголок”, задаваемый первым уравнением, имел хотя бы одну общую точку с полосой $4 \leq x \leq 6$, а для этого нужно, чтобы абсцисса его вершины удовлетворяла неравенству $x_{\text{в}} \leq 6$, т.е. $\frac{4}{a} \leq 6$ откуда $a \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O . Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы ABC и ADC соответственно, при этом первая касается стороны BC в точке K , а вторая касается стороны AD в точке T .

а) Найдите радиус окружности Ω_1 , если $BK = 3\sqrt{3}$, $DT = \sqrt{3}$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника BOC . Найдите угол BDC .

Ответ. а) $r = 3$, б) $\angle BDC = 30^\circ$.

Решение. а) Отрезки BO_1 и DO_2 являются биссектрисами углов ABC и ADC (центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла). Так как четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов ABC и ADC равна 180° , поэтому сумма их половин – углов KBO_1 и TDO_2 – равна 90° . Пусть $\angle O_1BK = \alpha$. Тогда $\angle TO_2D = 90^\circ - \angle TDO_2 = \alpha$. Выражая двумя способами $\operatorname{tg} \alpha$,

получаем: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{O_1K}{BK} = \frac{DT}{O_2T}$, $\frac{r}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{r}$, $r = 3$.

б) $O_1B = O_1C$ как радиусы окружности, описанной около треугольника BOC , поэтому высота O_1K этого треугольника также является его медианой. Точки O , O_1 и K лежат на одной прямой (на серединном перпендикуляре к отрезку BC). Далее находим: $O_1B = \sqrt{O_1K^2 + KB^2} = 6$, $O_1O = O_1B = 6$ (как радиусы одной окружности).

Возможны два случая: точки O_1 и O могут лежать либо по одну сторону от прямой BC , либо по разные стороны от неё.

В первом случае получаем: $\angle BDC = \frac{1}{2} \angle BOC = \angle BOK = \operatorname{arctg} \frac{BK}{KO} = \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{3}}{9} = 30^\circ$.

Рассмотрим второй случай. Точка O_1 лежит на биссектрисе угла ABC , поэтому

$$\angle ABC = 2\angle O_1BK = 2 \operatorname{arctg} \frac{O_1K}{BK} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = 60^\circ.$$

Это означает, что вписанный угол ABC опирается на дугу AC , равную 120° . Вместе с тем дуга BC равна углу BOC , а $\angle BOC = 2\angle BOK = 2 \operatorname{arctg} \frac{BK}{O_1O - r} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{3} = 120^\circ$, что невозможно, так как в этом случае дуга AC должна быть меньше дуги BC .

1. Решите уравнение $\frac{|\cos x| + \cos 3x}{\sin x \cos 2x} = -2\sqrt{3}$.

Ответ. $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Возможны два случая.

а) $\cos x \geq 0$. Тогда $\frac{\cos x + \cos 3x}{\sin x \cos 2x} = -2\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{2 \cos x \cos 2x}{\sin x \cos 2x} = -2\sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{ctg} x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Учитывая условие, получаем $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

б) $\cos x < 0$. Тогда $\frac{-\cos x + \cos 3x}{\sin x \cos 2x} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{-2 \sin x \sin 2x}{\sin x \cos 2x} = -2\sqrt{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Косинус отрицателен при $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ и при $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. Решите уравнение $\left(\frac{x}{400}\right)^{\log_5\left(\frac{x}{8}\right)} = \frac{1024}{x^3}$.

Ответ. $x = \frac{8}{5}$, $x = 16$.

Решение. Логарифмируя по основанию 3, получаем уравнение, равносильное исходному:

$$\log_5\left(\frac{x}{400}\right) \cdot \log_5\left(\frac{x}{8}\right) = \log_5\left(\frac{1024}{x^3}\right) \Leftrightarrow (\log_5 x - 2 - 4 \log_5 2)(\log_5 x - 3 \log_5 2) = 10 \log_5 2 - 3 \log_5 x.$$

Обозначим $\log_5 x = y$, $\log_5 2 = a$. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых уравнение принимает вид $y^2 - (7a - 1)y + 12a^2 - 4a = 0$. Решаем квадратное уравнение относительно y :

$$D = (7a - 1)^2 - 4(12a^2 - 4a) = a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2, y = \frac{7a - 1 \pm (a + 1)}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4a, \\ y = 3a - 1. \end{cases}$$

Находим x : если $y = 4a$, то $\log_5 x = 4 \log_5 2$ и $x = 16$; если $y = 3a - 1$, то $\log_5 x = 3 \log_5 2 - 1$ и $x = \frac{8}{5}$.

3. Найдите количество натуральных чисел k , не превосходящих 485000 таких, что $k^2 - 1$ делится нацело на 485.

Ответ. 4000.

Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $(k - 1)(k + 1) : (5 \cdot 97)$. Значит, одно из чисел $(k + 1)$ или $(k - 1)$ делится на 97. Рассмотрим два случая.

а) $(k + 1) : 97$, т.е. $k = 97p + 96, p \in \mathbb{Z}$. Тогда получаем $(97p + 95)(97p + 97) : (5 \cdot 97) \Leftrightarrow (97p + 95)(p + 1) : 5$. Первый множитель делится на 5 при $p = 5q, q \in \mathbb{Z}$, а второй – при $p = 5q + 4, q \in \mathbb{Z}$, откуда получаем, что $k = 485q + 96, k = 485q + 484, q \in \mathbb{Z}$.

б) $(k - 1) : 97$, т.е. $k = 97p + 1, p \in \mathbb{Z}$. Тогда получаем $97p(97p + 2) : (5 \cdot 97) \Leftrightarrow (97p + 2)p : 5$. Первый множитель делится на 5 при $p = 5q + 4, q \in \mathbb{Z}$, а второй – при $p = 5q, q \in \mathbb{Z}$, откуда получаем, что $k = 485q + 389, k = 485q + 1, q \in \mathbb{Z}$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки 96, 484, 389, 1 при делении на 485, то есть подходят каждые 4 из 485 подряд идущих чисел. Так как $485000 = 485 \cdot 1000$, получаем $4 \cdot 1000 = 4000$ чисел.

4. Решите систему $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2, \\ x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4 - 20x^2 - 80y^2 + 100 = 0. \end{cases}$

Ответ. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы:

$$\begin{aligned}
 x^4 - 8x^2y^2 + 16y^4 - 20x^2 - 80y^2 + 100 = 0 &\Leftrightarrow x^4 + 8x^2y^2 + 16y^4 - 20x^2 - 80y^2 + 100 = 16x^2y^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x^2 + 4y^2)^2 - 20(x^2 + 4y^2) + 100 = 16x^2y^2 \Leftrightarrow (x^2 + 4y^2 - 10)^2 = (4xy)^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4y^2 - 10 = 4xy, \\ x^2 + 4y^2 - 10 = -4xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2y)^2 = 10, \\ (x + 2y)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = \pm\sqrt{10}, \\ x + 2y = \pm\sqrt{10}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

В каждом из четырёх случаев выражаем x и подставляем в неравенство.

Если $x = 2y + \sqrt{10}$, то $y^2 + (2y + \sqrt{10})^2 \leq 2$, $5y^2 + 4y\sqrt{10} + 8 \leq 0$, $(y\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2 \leq 0$, $y = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$. Тогда $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

Остальные случаи разбираются аналогично. В итоге получаем 4 решения: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$.

5. На ребре CC_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка T такая, что $CT : C_1T = 1 : 3$. Точка T является вершиной прямого кругового конуса такого, что три вершины призмы принадлежат окружности его основания.

- а) Найдите отношение высоты призмы к ребру её основания.
 б) Пусть дополнительно известно, что $BB_1 = 8$. Найдите объём конуса.

Ответ. а) $\sqrt{2}$; б) $V = \frac{576\pi\sqrt{3}}{11\sqrt{11}}$.

Решение. Если три вершины призмы лежат на окружности основания конуса, то это означает, что три вершины призмы равноудалены от точки T , т.е. три из отрезков TA , TB , TC , TA_1 , TB_1 , TC_1 равны между собой. Заметим, что $TA_1 = TB_1 > TA = TB$; кроме того $TA > TC$, $TA_1 > TC_1$. Из этих неравенств следует, что отрезки TA_1 и TB_1 самые длинные, а отрезок TC – самый короткий. Значит, равны между собой отрезки TA , TB и TC_1 .

а) Обозначим $TC_1 = 3x$, $TC = x$. Тогда $TA = 3x$. По теореме Пифагора для треугольника ACT находим, что $AC = 2x\sqrt{2}$. Значит, искомое отношение равно $\frac{4x}{2x\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

б) Из треугольника CC_1A по теореме Пифагора получаем, что $AC_1 = 2x\sqrt{6}$. Радиус основания конуса – это радиус окружности, описанной около треугольника AC_1B . Его стороны: $AC_1 = BC_1 = 2x\sqrt{6}$, $AB = 2x\sqrt{2}$. Тогда находим его высоту: $C_1H = x\sqrt{22}$, площадь: $S = \frac{1}{2} \cdot 2x\sqrt{2} \cdot x\sqrt{22} = 2x^2\sqrt{11}$, радиус описанной окружности: $R = \frac{2x\sqrt{6} \cdot 2x\sqrt{6} \cdot 2x\sqrt{2}}{4S} = \frac{6x\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

Образующая конуса – это отрезок AT , т.е. она равна $3x$. Тогда высота конуса $h = \sqrt{9x^2 - \frac{72x^2}{11}} = \frac{3x\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$.

Находим объём конуса: $V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{72x^2}{11} \cdot \frac{3x\sqrt{3}}{\sqrt{11}} = \frac{72\pi x^3\sqrt{3}}{11\sqrt{11}}$. Так как $x = 2$, окончательно получаем $V = \frac{576\pi\sqrt{3}}{11\sqrt{11}}$.

6. Найдите все значения параметра b , для каждого из которых найдётся число a такое, что система

$$\begin{cases} x = \frac{7}{b} - |y + b|, \\ x^2 + y^2 + 96 = -a(2y + a) - 20x \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

Ответ. $b \in \left(-\infty; -\frac{7}{12}\right] \cup (0; +\infty)$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x+10)^2 + (y+a)^2 = 2^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 2 с центром $(-10; -a)$. При всевозможных $a \in \mathbb{R}$ эти окружности заметают полосу $-12 \leq x \leq -8$.

Первое уравнение задаёт “уголок” с ветвями, направленными влево, с вершиной в точке $\left(\frac{7}{b}; -b\right)$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы “уголок”, задаваемый первым уравнением, имел хотя бы одну общую точку с полосой $-12 \leq x \leq -8$, а для этого нужно, чтобы абсцисса его вершины удовлетворяла неравенству $x_{\text{в}} \geq -12$, т.е. $\frac{7}{b} \geq -12$ откуда $b \in \left(-\infty; -\frac{7}{12}\right] \cup (0; +\infty)$.

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O . Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы BAD и BCD соответственно, при этом первая касается стороны AB в точке L , а вторая касается стороны BC в точке F .

а) Найдите радиус окружности Ω_2 , если $AL = \sqrt{2}$, $CF = 2\sqrt{2}$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_2 является центром окружности, описанной около треугольника BOC . Найдите угол BDC .

Ответ. а) $r = 2$, б) $\angle BDC = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$.

Решение. а) Отрезки AO_1 и CO_2 являются биссектрисами углов BAD и BCD (центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла). Так как четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов BAD и BCD равна 180° , поэтому сумма их половин – углов LAO_1 и FCO_2 – равна 90° . Пусть $\angle O_1AL = \alpha$. Тогда $\angle FO_2C = 90^\circ - \angle FCO_2 = \alpha$. Выражая двумя способами $\operatorname{tg} \alpha$, получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{O_1L}{AL} = \frac{CF}{O_2F}, \quad \frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{r}, \quad r = 2.$$

б) $O_2B = O_2C$ как радиусы окружности, описанной около треугольника BOC , поэтому высота этого треугольника O_2F также является его медианой. Точки O , O_2 и F лежат на одной прямой (на серединном перпендикуляре к отрезку BC). Далее находим: $O_2C = \sqrt{O_2F^2 + CF^2} = 2\sqrt{3}$, $O_2O = O_2C = 2\sqrt{3}$ (как радиусы одной окружности).

Возможны два случая: точки O_2 и O могут лежать либо по одну сторону от прямой BC , либо по разные стороны от неё.

В первом случае получаем: $\angle BDC = \frac{1}{2} \angle BOC = \angle COF = \operatorname{arctg} \frac{CF}{OF} = \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{3}} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$.

Рассмотрим второй случай. Точка O_2 лежит на биссектрисе угла BCD , поэтому

$$\angle BCD = 2\angle O_2CF = 2 \operatorname{arctg} \frac{O_2F}{CF} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} = \operatorname{arctg}(2\sqrt{2}).$$

Это означает, что вписанный угол BCD опирается на дугу BD , равную $2 \operatorname{arctg}(2\sqrt{2})$. Вместе с тем дуга BC равна углу BOC , а $\angle BOC = 2\angle COF = 2 \operatorname{arctg} \frac{CF}{O_2O-r} = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$, что невозможно, так как в этом случае дуга BD должна быть меньше дуги BC .

1. Решите уравнение $\frac{|\sin x| + \sin 3x}{\cos x \cos 2x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Ответ. $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$, $x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$, $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Возможны два случая.

а) $\sin x \geq 0$. Тогда $\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x \cos 2x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{2 \cos x \sin 2x}{\cos x \cos 2x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Учитывая условие,

получаем $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ и $x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) $\sin x < 0$. Тогда $\frac{-\sin x + \sin 3x}{\cos x \cos 2x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{2 \cos 2x \sin x}{\cos x \cos 2x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Синус отрицателен

при $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Решите уравнение $\left(\frac{x}{4}\right)^{\log_5(50x)} = x^6$.

Ответ. $x = \frac{1}{2}$, $x = 2500$.

Решение. Логарифмируя по основанию 5, получаем уравнение, равносильное исходному:

$$\log_5(50x) \cdot \log_5\left(\frac{x}{4}\right) = \log_5(x^6) \Leftrightarrow (\log_5 x + 2 + \log_5 2)(\log_5 x - 2 \log_5 2) = 6 \log_5 x.$$

Обозначим $\log_5 x = y$, $\log_5 2 = a$. После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых уравнение принимает вид $y^2 - (a+4)y - 2a^2 - 4a = 0$. Решаем квадратное уравнение относительно y :

$$D = (a+4)^2 + 4(2a^2 + 4a) = 9a^2 + 24a + 16 = (3a+4)^2, \quad y = \frac{4+a \pm (3a+4)}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2a+4, \\ y = -a. \end{cases}$$

Находим x : если $y = -a$, то $\log_5 x = -\log_5 2$ и $x = \frac{1}{2}$; если $y = 2a+4$, то $\log_5 x = 2 \log_5 2 + 4$ и $x = 2500$.

3. Найдите количество натуральных чисел k , не превосходящих 267 000 и таких, что $k^2 - 1$ делится нацело на 267.

Ответ. 4000.

Решение. Разложив делимое и делитель на множители, получаем условие $(k-1)(k+1):(3 \cdot 89)$. Значит, одно из чисел $(k+1)$ или $(k-1)$ делится на 89. Рассмотрим два случая.

а) $(k+1):89$, т.е. $k = 89p + 88$, $p \in \mathbb{Z}$. Тогда получаем $(89p+87)(89p+89):(3 \cdot 89) \Leftrightarrow (89p+87)(p+1):3$. Первый множитель делится на 3 при $p = 3q$, $q \in \mathbb{Z}$, а второй – при $p = 3q+2$, $q \in \mathbb{Z}$, откуда получаем, что $k = 267q + 88$, $k = 267q + 266$, $q \in \mathbb{Z}$.

б) $(k-1):89$, т.е. $k = 89p + 1$, $p \in \mathbb{Z}$. Тогда получаем $89p(89p+2):(3 \cdot 89) \Leftrightarrow (89p+2)p:3$. Первый множитель делится на 3 при $p = 3q+2$, $q \in \mathbb{Z}$, а второй – при $p = 3q$, $q \in \mathbb{Z}$, откуда получаем, что $k = 267q + 179$, $k = 267q + 1$, $q \in \mathbb{Z}$.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа, дающие остатки 88, 266, 179, 1 при делении на 267, то есть подходят каждые 4 из 267 подряд идущих чисел. Так как $267\,000 = 267 \cdot 1000$, получаем $4 \cdot 1000 = 4000$ чисел.

4. Решите систему $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ x^4 - 18x^2y^2 + 81y^4 - 20x^2 - 180y^2 + 100 = 0. \end{cases}$

Ответ. $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}; -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}; -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

Решение. Преобразуем уравнение системы:

$$\begin{aligned}
 x^4 - 18x^2y^2 + 81y^4 - 20x^2 - 180y^2 + 100 = 0 &\Leftrightarrow x^4 + 18x^2y^2 + 81y^4 - 20x^2 - 180y^2 + 100 = 36x^2y^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x^2 + 9y^2)^2 - 20(x^2 + 9y^2) + 100 = 36x^2y^2 \Leftrightarrow (x^2 + 9y^2 - 10)^2 = (6xy)^2 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 9y^2 - 10 = 6xy, \\ x^2 + 9y^2 - 10 = -6xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 3y)^2 = 10, \\ (x + 3y)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = \pm\sqrt{10}, \\ x + 3y = \pm\sqrt{10}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

В каждом из четырёх случаев выражаем x и подставляем в неравенство.

Если $x = 3y + \sqrt{10}$, то $y^2 + (3y + \sqrt{10})^2 \leq 1$, $10y^2 + 6y\sqrt{10} + 9 \leq 0$, $(y\sqrt{10} + 3)^2 \leq 0$, $y = -\frac{3}{\sqrt{10}}$. Тогда $x = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Остальные случаи разбираются аналогично. В итоге получаем 4 решения: $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}; -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}; -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

5. На ребре BB_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка T такая, что $BT : B_1T = 2 : 3$. Точка T является вершиной прямого кругового конуса такого, что три вершины призмы принадлежат окружности его основания.

а) Найдите отношение высоты призмы к ребру её основания.

б) Пусть дополнительно известно, что $CC_1 = 5$. Найдите объём конуса.

Ответ. а) $\sqrt{5}$; б) $V = \frac{180\pi\sqrt{3}}{23\sqrt{23}}$.

Решение. Если три вершины призмы лежат на окружности основания конуса, то это означает, что три вершины призмы равноудалены от точки T , т.е. три из отрезков TA , TB , TC , TA_1 , TB_1 , TC_1 равны между собой.

Заметим, что $TA_1 = TC_1 > TA = TC$; кроме того $TA > TB$, $TA_1 > TB_1$. Из этих неравенств следует, что отрезки TA_1 и TC_1 самые длинные, а отрезок TB – самый короткий. Значит, равны между собой отрезки TA , TC и TB_1 .

а) Обозначим $TB_1 = 3x$, $TB = 2x$. Тогда $TA = 3x$. По теореме Пифагора для треугольника ABT находим, что $AB = x\sqrt{5}$. Значит, искомое отношение равно $\frac{5x}{x\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

б) Из треугольника BB_1A по теореме Пифагора получаем, что $AB_1 = x\sqrt{30}$. Радиус основания конуса – это радиус окружности, описанной около треугольника AB_1C . Его стороны: $AB_1 = CB_1 = x\sqrt{30}$, $AC = x\sqrt{5}$. Тогда находим его высоту: $B_1H = \frac{x\sqrt{115}}{2}$, площадь: $S = \frac{1}{2} \cdot x\sqrt{5} \cdot \frac{x\sqrt{115}}{2} = \frac{5x^2\sqrt{23}}{4}$, радиус описанной окружности: $R = \frac{x\sqrt{30} \cdot x\sqrt{30} \cdot x\sqrt{5}}{4S} = \frac{6x\sqrt{5}}{\sqrt{23}}$.

Образующая конуса – это отрезок AT , т.е. она равна $3x$. Тогда высота конуса $h = \sqrt{9x^2 - \frac{180x^2}{23}} = \frac{3x\sqrt{3}}{\sqrt{23}}$.

Находим объём конуса: $V = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{180x^2}{23} \cdot \frac{3x\sqrt{3}}{\sqrt{23}} = \frac{180\pi x^3\sqrt{3}}{23\sqrt{23}}$. Так как $x = 1$, окончательно получаем $V = \frac{180\pi\sqrt{3}}{23\sqrt{23}}$.

6. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых найдётся число b такое, что система

$$\begin{cases} x = \frac{6}{a} - |y - a|, \\ x^2 + y^2 + b^2 + 63 = 2(by - 8x) \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение $(x; y)$.

Ответ. $a \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup (0 + \infty)$.

Решение. Второе уравнение системы может быть преобразовано к виду $(x+8)^2 + (y-b)^2 = 1^2$, следовательно, оно задаёт окружность радиуса 1 с центром $(-8; b)$. При всевозможных $b \in \mathbb{R}$ эти окружности заметают полосу $-9 \leq x \leq -7$.

Первое уравнение задаёт “уголок” с ветвями, направленными влево, с вершиной в точке $\left(\frac{6}{a}; a\right)$.

Для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы “уголок”, задаваемый первым уравнением, имел хотя бы одну общую точку с полосой $-9 \leq x \leq -7$, а для этого нужно, чтобы абсцисса его вершины удовлетворяла неравенству $x_{\text{в}} \geq -9$, т.е. $\frac{6}{a} \geq -9$ откуда $a \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup (0 + \infty)$.

7. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O . Две окружности Ω_1 и Ω_2 равных радиусов с центрами O_1 и O_2 вписаны в углы ABC и ADC соответственно, при этом первая касается стороны BC в точке F , а вторая касается стороны AD в точке P .

а) Найдите радиус окружности Ω_2 , если $BF = 3\sqrt{2}$, $DP = \sqrt{2}$.

б) Пусть дополнительно известно, что точка O_1 является центром окружности, описанной около треугольника BOC . Найдите угол BDC .

Ответ. а) $r = \sqrt{6}$, б) $\angle BDC = 30^\circ$.

Решение. а) Отрезки BO_1 и DO_2 являются биссектрисами углов ABC и ADC (центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла). Так как четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов ABC и ADC равна 180° , поэтому сумма их половин – углов FBO_1 и PDO_2 – равна 90° . Пусть $\angle O_1BF = \alpha$. Тогда $\angle PO_2D = 90^\circ - \angle PDO_2 = \alpha$. Выражая двумя способами $\operatorname{tg} \alpha$, получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{O_1F}{BF} = \frac{DP}{O_2P}, \quad \frac{r}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{r}, \quad r = \sqrt{6}.$$

б) $O_1B = O_1C$ как радиусы окружности, описанной около треугольника BOC , поэтому высота O_1F этого треугольника также является его медианой. Точки O , O_1 и F лежат на одной прямой (на серединном перпендикуляре к отрезку BC). Далее находим: $O_1B = \sqrt{O_1F^2 + FB^2} = 2\sqrt{6}$, $O_1O = O_1B = 2\sqrt{6}$ (как радиусы одной окружности).

Возможны два случая: точки O_1 и O могут лежать либо по одну сторону от прямой BC , либо по разные стороны от неё.

В первом случае получаем: $\angle BDC = \frac{1}{2} \angle BOC = \angle BOF = \operatorname{arctg} \frac{BF}{FO} = \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = 30^\circ$.

Рассмотрим второй случай. Точка O_1 лежит на биссектрисе угла ABC , поэтому

$$\angle ABC = 2\angle O_1BF = 2 \operatorname{arctg} \frac{O_1F}{BF} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = 60^\circ.$$

Это означает, что вписанный угол ABC опирается на дугу AC , равную 120° . Вместе с тем дуга BC равна углу BOC , а $\angle BOC = 2\angle BOF = 2 \operatorname{arctg} \frac{BF}{OF} = 2 \operatorname{arctg} \frac{BF}{O_1O - r} = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{3} = 120^\circ$, что невозможно, так как в этом случае дуга AC должна быть меньше дуги BC .