Олимпиада «Phystech.International» по физике

Декабрь 2017 года

Класс 10

Шифр 5-004

(заполняется секретарём)

Вариант 10-04

1. Мальчик бьет ногой по мячу, который лежал на горизонтальной поверхности земли на некотором расстоянии от вертикальной стены дома. Мяч полетел под углом α=60° к горизонту и после упругого столкновения со стеной упал через время t_0=2 секунды после начала полета на то же место, где лежал вначале.

1) На каком расстоянии L от стены лежал мяч вначале?

2) Найти высоту H от поверхности земли до места удара мяча о стену.

Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

2. Шарик массой m_1, скользивший по гладкой горизонтальной поверхности, сталкивается с шариком массой m_2, который покоился на той же поверхности. После центрального упругого удара шарик массой m_1 начал двигаться в обратном направлении со скоростью в 2 раза меньшей начальной.

1) Найти отношение масс $\frac{m_2}{m_1}$.

2) Найти отношение скорости шарика массой m_2 после столкновения к скорости шарика массой m_1 до столкновения.

3. Навстречу шарику, скользящему по гладкой горизонтальной поверхности, движется по той же поверхности брусок. Шарик и брусок движутся вдоль одной прямой. Скорость шарика перпендикулярна грани бруска, о которую он ударяется. Масса бруска много больше массы шарика. После упругого удара шарик движется в обратном направлении со скоростью, которая в 4 раза больше его начальной скорости.

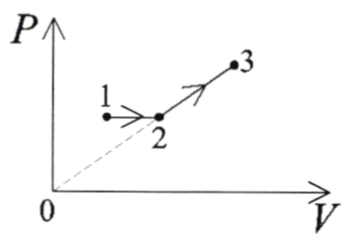
Найти отношение скоростей движения шарика и бруска до столкновения.

4. В двух теплоизолированных сосудах одинакового объема, соединенных короткой трубкой с закрытым краном, находятся υ_1= 1/2 моль одноатомного идеального газа при температуре T_1=200 К и υ_2=1/3 моль другого одноатомного газа при температуре T_2=300 К. Кран открывается, газы в сосудах смешиваются.

1) Найти температуру в сосудах после установления теплового равновесия.

2) Найти отношение конечного давления в смеси газов к начальному давлению в сосуде с температурой T_1.

5. Объем идеального газа увеличивается в n=2 раза в изобарическом процессе, а затем еще раз увеличивается в n=2 раза в процессе прямо пропорциональной зависимости давления газа P от его объема V.



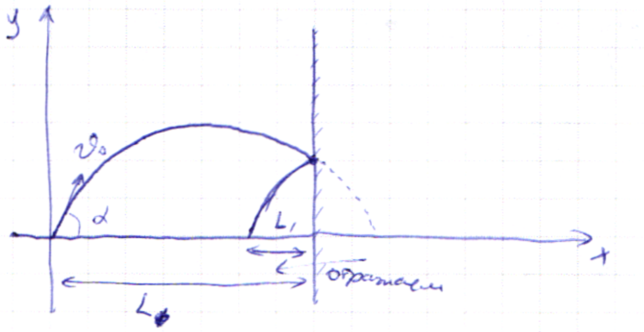
1) Во сколько раз увеличивается конечная температура газа по сравнению с начальной?

2) Найти отношение работы, которую совершает газ в изобарическом процессе, к работе, которую он совершает в процессе прямо пропорциональной зависимости давления газа P от его объема V.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3 1. Размышление над условием:

При ударе о стенку мяч меняет свою горизонтальную компоненту скорости на противоположную. Таким образом движение (траекторию) мяча можно представить как ~~в~~ наложение ~~траектории~~ траекторий его движения до удара и отраженной относительно плоскости стенки траектории его движения после удара. В общем, см. рис.



Таким образом, если $L_0 = L_1$ (как в нашем случае), то исходя из того, что движения в поле тяжести Земли происходит по параболе (а она симметрична относ. вертикальной линии проходящей через вершину) (будет доказано ниже), получаем, что стенка проходит ровно через вершину траектории.

Формулы, выводы...: Условимся рассматривать „чистое" движение (без учета стенки)
Запишем ур-ние проекций скоростей в зависимости от времени:

$$\begin{cases} v_x = v\cos\alpha \\ v_y = v\sin\alpha - gt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \int v_x dt = vt\cos\alpha + x_0 = vt\cos\alpha \\ y = \int v_y dt = vt\sin\alpha + y_0 - \frac{gt^2}{2} = vt\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \end{cases} \Bigg| \begin{matrix} x_0 = y_0 = 0 \\ (1) \end{matrix}$$

~~Условимся рассмат~~

Тогда в момент касания Земли $y = 0$, т.е.

$vt\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = 0 \Rightarrow t_н = 0$ или $t_к = \frac{2v\sin\alpha}{g}$, что соответствует началу движения и его окончанию.

Тогда $x(t_к) = 2L$ (исходя из того, что стенка посередине)

$$2L = \frac{2\upsilon^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{\upsilon^2 \cdot \sin(2\alpha)}{g}$$

Таким образом: $L = \dfrac{\upsilon^2 \cdot \sin(2\alpha)}{2g}$

Зная, что $t_k - t_0 = 2c$ (т.е. время всего движения)

$$\upsilon = \frac{g t_k}{2\sin(\alpha)} = \cancel{\frac{g t_k}{\sqrt{3}}}$$

$$L = \frac{g t_k^2 \sin(2\alpha)}{8 g \sin^2(\alpha)} = \frac{g t_k^2 \cdot ctg(\alpha)}{4} = \frac{1}{4} g t_k^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \approx \frac{10 \cdot 4}{4 \cdot 1,7} = \frac{100}{17} = \overset{5,88}{\cancel{23,53}} \text{ м}$$

Нахождение H сводится к нахождению высшей точки траектории, т.е.

$\dfrac{dy}{dt} = 0$ $\quad \upsilon_y = 0 \quad \Rightarrow \upsilon \sin\alpha - gt = 0$, т.е. $t_{верх} = \dfrac{\upsilon \sin\alpha}{g}$, где

$t_{верх}$ – момент времени достижения верхней точки.

Тогда $H = y(t_{верх}) = \upsilon \cdot \dfrac{\upsilon \sin\alpha}{g} \sin\alpha - \dfrac{g\, \upsilon^2 \sin^2\alpha}{2 g^2} = \dfrac{\upsilon^2 \sin^2\alpha}{2g} =$

$$= \frac{g^2 t_k^2 \cdot \cancel{\sin^2\alpha}}{2g \cdot 4\cancel{\sin^2\alpha}} = \frac{g t_k^2}{8} = \frac{40}{8} = 5 \text{ м}$$

Напоследок, док-во параболичности траектории:

Из сист. ур. (1) выражаем t через x:

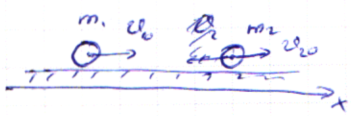
$t = \dfrac{x}{\upsilon \cos\alpha}$ подставим в y:

$y = \dfrac{x}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha - \dfrac{g x^2}{2\upsilon^2 \cos^2\alpha}$ – явная ~~парабола~~ квадратичная ф-я $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ее график – парабола.

Ответ: 1) $L \approx \overset{5,88}{\cancel{23,53}}$ м
2) $H = 5$ м.

Задача 2.



Будем рассматривать все в проекции на Ox.

Т.к. удар центральный и упругий, можно записать

$$\left\{ \begin{aligned} & m_1 \upsilon_{10} + m_2 \upsilon_{20} = m_1 \upsilon_1' + m_2 \upsilon_2' \quad - \text{ЗСИ } (1.1) \\ & \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1 \upsilon_1'^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2'^2}{2} \quad - \text{ЗСЭ } (1.2) \end{aligned} \right. \quad (1)$$

где $\upsilon_{10}, \upsilon_{20}$ – скорости до столкновения, υ_1', υ_2' – скорости после столкновения.

Скорости считаю направлеными по Ox (как на рис). Потом, если что, можно будет со знаком '–'.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Перепишем (1.2) в виде:

$$m_1(v_{10}^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_{20}^2), \text{ или}$$

$$m_1(v_{10} - v_1')(v_{10} + v_1') = m_2(v_2' - v_{20})(v_2' + v_{20}) \quad (2)$$

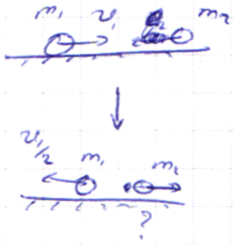
А (1.1) в виде

$$m_1(v_{10} - v_1') = m_2(v_2' - v_{20}) \quad (3)$$

Тогда, разделив (2) на (3):

$$v_{10} + v_1' = v_{20} + v_2' \quad (4).$$

Теперь перейдем к задаче:



Здесь $v_{10} = v_1$, $v_{20} = 0$, а $v_1' = -\frac{v_1}{2}$

Тогда v_2' из (4): $v_2' = v_{10} + v_1' - v_{20} = \frac{v_1}{2}$

Исходя из (3), обозначив $\frac{m_2}{m_1} = \xi$

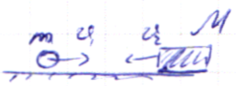
$$(v_{10} - v_1') = \xi(v_2' - v_{20}), \text{ или}$$

$$\left(v_1 - \left(-\frac{v_1}{2}\right)\right) = \xi \cdot \frac{v_1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2}v_1 = \xi\frac{v_1}{2} \Rightarrow \xi = 3.$$

$\frac{v_2'}{v_{10}} = \frac{v_1/2}{v_1} = \frac{1}{2}$ ~~(т.к. до столкновения II-ой шар покоился)~~

Ответ: 1) $\frac{m_2}{m_1} = 3$; 2) $\frac{\text{скорость 2 после столкн.}}{\text{скорость 1 до столкн.}} = \frac{1}{2}$.

Задача 3.

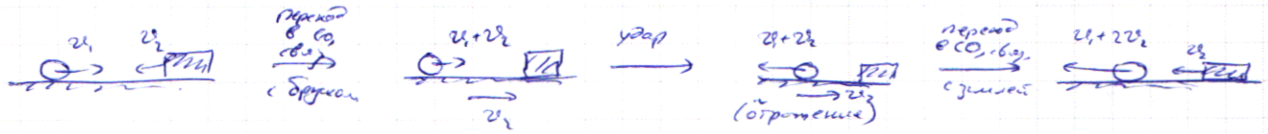


Т.к. по условию $m \ll M$, то по сравнению с шариком брусок можно считать намного более инертным, а следовательно, пренебречь изменением его скорости при столкновении.

Очень просто получить выражение для скорости v_1' (скорость шарика после соударения), Если использовать формулу (4) задачи 2 при условии $v_{20} = v_2' = -v_2$:

$$v_1 + v_1' = -2v_2 \Rightarrow v_1' = -v_1 - 2v_2 .$$

Этот же результат получается при рассмотрении бруска в качестве стенки в хорошо известной задаче. Рассмотрим такую последовательность:



Итак, раз $v_1' = -4v_1$ по условию с учетом направлений:

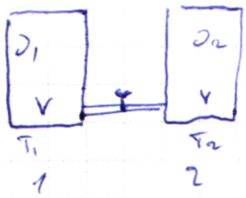
$$+4v_1 = +v_1 + 2v_2 \Rightarrow 3v_1 = 2v_2$$, т.е. искомое отношение

$$\sigma = \frac{v_1}{v_2} = \frac{2}{3}$$

Ответ: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{2}{3}$.

Задача 4.

Запишем для начала уравнения состояния в 1-ом, 2-ом сосуде и в конечной системе: за V обозначу объем одного сосуда:



$$p_1 V = \nu_1 R T_1 \quad (1)$$

$$p_2 V_2 = \nu_2 R T_2 \quad (2)$$

$$2p_k V = (p_{парц.1} + p_{парц.2})V = \left(\frac{\nu_1 R T_k}{V} + \frac{\nu_2 R T_k}{V}\right)V = (\nu_1+\nu_2)RT_k \quad (3)$$

где T_k — температура конечная. Ясно, что так эта система не решится, поэтому исходя из того, что система: а) теплоизолирована, б) не изменяет объема $\Rightarrow$ не совершает никакой! работы, запишем равенство внутренней энергии в начальном ее состоянии и в конечном:

$$\frac{3}{2}\nu_1 R T_1 + \frac{3}{2}\nu_2 R T_2 = \frac{3}{2}\nu_1 R T_k + \frac{3}{2}\nu_2 R T_k$$

$$\Downarrow$$

$$\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2 = (\nu_1+\nu_2)T_k \quad (4)$$

$$\Downarrow$$

$$T_k = \frac{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}{\nu_1+\nu_2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 200 + \frac{1}{3}\cdot 300}{5/6} = \frac{200\cdot 6}{5} = 240 \ (K)$$

Теперь остается лишь выразить и приравнять объемы из (1) и (3):

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-004

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$V = \frac{\nu_1 R T_1}{p_1}$ из (1) и $V = \frac{(\nu_1+\nu_2) R T_K}{2p_K}$ из (3) $\Rightarrow$

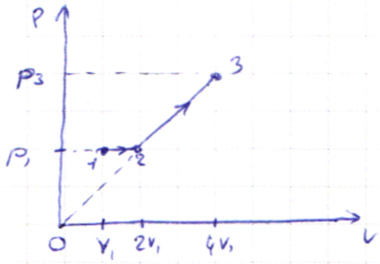
$$\frac{\nu_1 R T_1}{p_1} = \frac{(\nu_1+\nu_2) R T_K}{2p_K} \Rightarrow \psi = \frac{p_K}{p_1} = \frac{\cancel{(\nu_1+\nu_2)}\cdot \frac{\nu_1 T_1+\nu_2 T_2}{\cancel{\nu_1+\nu_2}}}{\nu_1 T_1} = \frac{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}{\nu_1 T_1} = \frac{200}{100} =$$

$= 2.$

Ответ: 1) $T_K = 240\ K$

2) $\psi = \frac{p_K}{p_1} = 2.$

Задача 5.



Пусть изначально давление газа p_1, объём V_1, температура T_1, кол-во ν_1.

знак «или»

В т. 2-3 p и V равны соотв. p_2 / p_3 и V_2 / V_3

Итак, т.к. процесс 1-2 изобарный, то $p_1 = p_2$, по условию $V_2 = 2V_1$

Работа за 1-2 A_{12} = либо площадь под графиком 1-2 $A_{1-2} = p_1 \cdot (2V_1 - V_1) = p_1 V_1$, либо $A_{1-2} = \int_{V_1}^{2V_1} p_1 dV = p_1 V_1$;

Процесс 2-3: т.к. $p(V) = \alpha V$, то из т. 2 получим: $p_2 = \alpha V_2 \Rightarrow \alpha = \frac{p_2}{V_2}$

$\alpha = \frac{p_1}{2V_1}$. Тогда, раз по условию $V_3 = 2V_2 = 4V_1$, то $p_3 = \alpha \cdot 4V_1 = 2p_1$

Работа за 2-3: опять так, либо площадь прямоугольной трапеции, ~~без~~ ограниченной 2-3 и вертикальными линиями, через т. 2 и т. 3, т.е. $A_{2-3} = \frac{p_2+p_3}{2}\cdot(V_3 - V_2) =$
$= \frac{3p_1}{2}\cdot 2V_1 = 3p_1 V_1$, либо:

$$A_{2-3} = \int_{2V_1}^{4V_1} \frac{p_1}{2V_1} V\, dV = \frac{p_1}{4V_1}(16V_1^2 - 4V_1^2) = 3p_1 V_1$$

Итого: для нахождения отношения $\gamma = \frac{T_3}{T_1}$ используем закон Менделеева-Клапейрона:

$T_1 = \frac{p_1 V_1}{\nu_1 R}$ $T_3 = \frac{p_3 V_3}{\nu_3 R} = \frac{2p_1 \cdot 4V_1}{\nu_1 \cdot R}$, т.к. $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = const$, т.к. газ не выходит и не входит в систему.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\gamma = \frac{T_3}{T_1} = \frac{\frac{2p_1 \cdot 4V_1}{\cancel{\nu R}}}{\frac{p_1 V_1}{\cancel{\nu R}}} = 8.$$

Отношение работ: $\beta = \frac{A_{1-2}}{A_{2-3}} = \frac{p_1 V_1}{3 p_1 V_1} = \frac{1}{3}$

Ответ: 1) $\gamma = \frac{T_3}{T_1} = 8$

2) $\beta = \frac{A_{12}}{A_{23}} = \frac{1}{3}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5 - 004

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-004

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2{,}7 \times 1{,}7 = 189 + 54$

$1{,}7 \times 1{,}7 = 119 + 17 = 2{,}89$

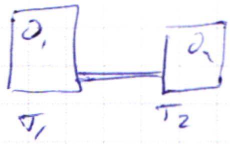
$400 : 17 = 23{,}53$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$

$40 \times 5 = 200$ $\quad 40 \times 6 = 240$

$17 \times 5 = 85$ $\quad 17 \times 8 = 136$

$V = \frac{p_1}{\nu_1 R T_1} = \frac{p_2}{\nu_2 R T_2}$



$p_1 V = \nu_1 R T_1$

$p_2 V = \nu_2 R T_2$

$p_1 = \frac{\nu_1 R T_1}{V}$

$p_2 = \frac{\nu_2 R T_1}{V}$

$2V p_k = (\nu_1 + \nu_2) R T_k$

$100 : 17 = 5{,}88$

$\frac{2v^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{g^2 t_k^2 \sin\alpha\cos\alpha}{4\sin^2\alpha} = \frac{1}{4} g t_k^2 \operatorname{ctg}\alpha$

$p_{k1} = \frac{\nu_1 R T_k}{2V}$

$2\frac{p_1}{\nu_1 R T_1} p_k = (\nu_1 + \nu_2) R T_k$

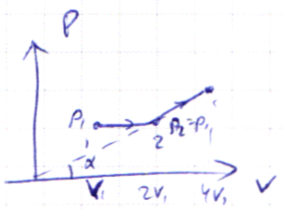
$V = \frac{\nu_1 R T_1}{p_1} = \frac{\nu_2 R T_2}{p_2} = \frac{(\nu_1+\nu_2) R T_k}{p_k}$

$\frac{p_k}{p_1} = \frac{(\nu_1+\nu_2) T_k}{\nu_1 T_1}$

$\frac{3}{2}\nu_1 R(T_k - T_1) + \frac{3}{2}\nu_2 R(T_k - T_2) = 0$

$\nu_1 T_k + \nu_2 T_k = \nu_1 T_1 + \nu_2 T_2$

$T_k = \frac{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}{\nu_1 + \nu_2}$



$\operatorname{tg}\alpha = \frac{p_1}{2V_1}$

$p_3 = \frac{p_1}{2V_1} \cdot 4V_1 = p_1 \cdot 2$

$T = \frac{pV}{\nu R}$

$\frac{T_3}{T_1} = \frac{\frac{p_3 V_3}{\nu R}}{\frac{p_1 V_1}{\nu R}} = \frac{2p_1 \cdot 4V_1}{p_1 V_1} = 8$

$p = \frac{p_1}{2V_1} V \qquad A = \int_{2V_1}^{4V_1} \frac{p_1 V}{2V_1} dV =$

$= \frac{p_1}{4V_1}(16V_1^2 - 4V_1^2) = 3p_1 V_1$

$S = \frac{p_1 + 2p_1}{2} \cdot 2V_1 = 3p_1 V_1$

$p_1 \cdot V_1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)