Олимпиада «Phystech.International» по физике

Декабрь 2017 года

Класс 11

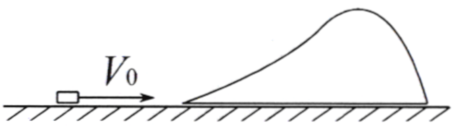
Шифр 06-038

(заполняется секретарём)

Вариант 11-03

1. Небольшой шарик висит на легкой нити длиной 50 см. Какую минимальную горизонтальную скорость надо сообщить шарику, чтобы он, двигаясь по окружности, совершил полный оборот в вертикальной плоскости? Принять g=10 м/с^2.

2. Небольшая шайба массой m скользит по гладкому горизонтальному столу со скоростью v_0 к неподвижной незакрепленной горке массой $3m$ (см. рис.). Шайба въезжает на горку, движется по ней без трения и отрыва и съезжает с горки в обратном направлении.

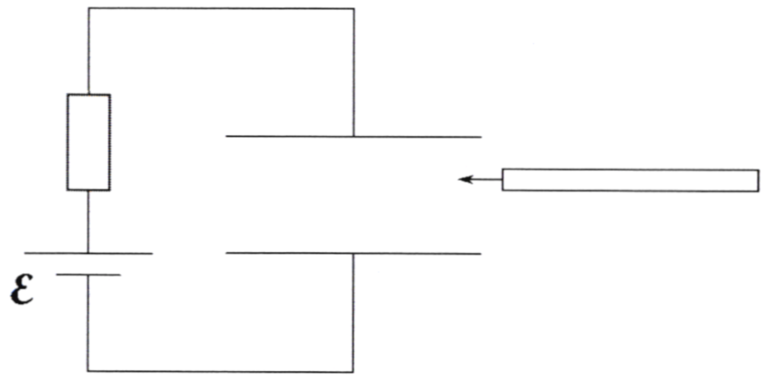


1) На какую максимальную высоту поднимается шайба?
2) С какой скоростью шайба съезжает с горки?

3. Теплоизолированный сосуд объемом $V = 8{,}31 \cdot 10^{-3}$ м^3 разделен перегородкой на две части с различными объемами. В первой части находится гелий при температуре 27 ^{0}C в количестве $\nu_1 = 0{,}2$ моль. Во второй части находится гелий при температуре 7 ^{0}C в количестве $\nu_2 = 0{,}3$ моль. Перегородка прорывается.

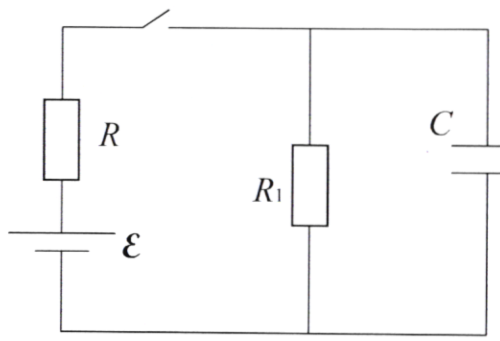
1) Какая температура (в градусах Цельсия) установится в сосуде после наступления термодинамического равновесия?
2) Найти конечное давление в сосуде.

4. Плоский воздушный конденсатор емкостью C_0 подсоединен через резистор к источнику с ЭДС ε (см. рис.). В конденсатор вводят параллельно обкладкам незаряженную проводящую пластину и располагают ее напротив обкладок. Форма поверхности пластины совпадает с формой поверхности обкладок. Толщина пластины в 4 раза меньше расстояния между обкладками.



1) Найти емкость конденсатора с пластиной.
2) Какой заряд пройдет через резистор после начала введения пластины?

5. В цепи, схема которой показана на рисунке, ключ разомкнут. Параметры цепи указаны на схеме. Внутреннее сопротивление источника «содержится» в R, R_1=3R. Ключ замыкают. После достижения в цепи установившегося режима ключ размыкают. Известными величинами считать C, ε, R.



1) Найти ток через источник сразу после замыкания ключа.
2) Найти установившееся напряжение на конденсаторе при замкнутом ключе.
3) Какое количество теплоты выделится в цепи после размыкания ключа?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

06-038

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

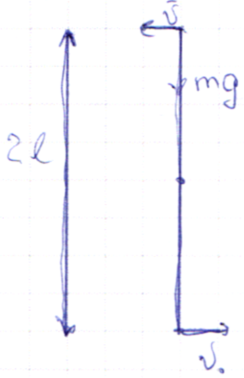
Дано:

$l = 0.5$ м

$g = 10$ м/с^2

$v_0 = ?$

Решение:



Из ЗСЭ: 1) $\frac{mv_0^2}{2} = 2mgl + \frac{mv^2}{2}$

2) Из условия минимальности скорости следует, что в верхней точке $T = 0$ (т.к. $\frac{mv^2}{l} = mg + T$) $\Rightarrow \frac{mv^2}{l} = mg \Rightarrow$

$\Rightarrow v^2 = gl$. Подставляя в 1) получим:

$\frac{v_0^2}{2} = 2gl + \frac{gl}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{5gl} = \sqrt{5 \cdot 10 \cdot 0{,}5} = 5$ м/с

Ответ: $v_0 = 5$ м/с

№2

Дано:

m; v_0; $3m$

$h = ?$

$u_1 = ?$

Решение:

В момент, когда $h' = 0$ относительная скорость шайбы равна нулю (относительно горки). Тогда

из ЗСИ: $mv_0 = mu_0 + 3mu_0 \Rightarrow$ 1) $u_0 = \frac{v_0}{4}$

из ЗСЭ: $\frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{mu_0^2}{2} + \frac{3mu_0^2}{2} \Leftrightarrow v_0^2 = 2gh + 4u_0^2 =$

$= 2gh + \frac{v_0^2}{4}$ (из 1)) $\Rightarrow 2gh = \frac{3}{4}v_0^2 \Rightarrow h = \frac{3v_0^2}{8g}$

ЗСИ для момента, когда шайба съезжает с горки:

3) $mv_0 = 3mu_2 - mu_1$ (принял что шайба после горки будет двигаться влево. Если это не так, то ответ выйдет по модулю)

ЗСЭ: 4) $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{3mu_2^2}{2} + \frac{mu_1^2}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\frac{\mathcal{E}}{R} = 4I_1 + I_2 \qquad I_1 = \frac{\frac{\mathcal{E}}{R} - I_2}{4}$

$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{4R}$

$y \cdot \frac{-4}{3CR} \cdot e^{-\frac{4t}{3CR}} = \frac{\mathcal{E}}{3CR^2}$

$y = -e^{\frac{4t}{3CR}} \cdot \frac{\frac{\mathcal{E}}{R}}{4} \cdot e^{-\frac{4t}{3CR}} = -\frac{\mathcal{E}}{4R}$

$\frac{q}{C} \cdot I_1 \qquad I_2 = \frac{dq}{dt}$

$3I_1 R = \frac{q}{C} \qquad I_1 = \frac{q}{3CR} \qquad I = xy = -\frac{\mathcal{E}}{4R} \cdot e^{\frac{4t}{3RC}}$

$\frac{q^2}{2C}$

$dQ = (I_1 + I_2)^2 R\,dt + 3I_1^2 R\,dt$

$\int (I_1 + I_2)^2 R\,dt \qquad \cancel{\int (I_1 + I_2)^2\,dt} \qquad \frac{I_1 + I_2}{2} \cdot \mathcal{E} = \frac{dQ}{dt} +$

$dQ = \left(\frac{\frac{\mathcal{E}}{R} + 3I_2}{4}\right)^2 R\,dt + 3\left(\frac{\frac{\mathcal{E}}{R} - I_2}{4}\right)^2 dt \qquad d\left(\frac{q^2}{2}\right) = dq$

$\frac{I_1 + I_2}{2} \cdot \mathcal{E}\,dt = dQ + \frac{q\,dq}{C}$

$dx = \frac{-4}{3CR} x$

$3CR\frac{dI_1}{dt} + 4I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R}$

$\frac{dI_1}{dt} = \frac{4}{3CR} I_1 dt \quad \frac{\mathcal{E}\,dt}{3CR^2} \qquad dx = -\frac{4}{3CR} x \Rightarrow$

$I_1 = x \cdot y \qquad \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{4\,dt}{3CR} \qquad dx = \frac{-4}{3CR} \cdot e$

$\frac{dI_1}{dt} = d(x \cdot y) = \frac{dx \cdot y + y\,dt}{dt} \qquad \ln x = \frac{-4t}{3CR}$

$\frac{\mathcal{E} \cdot 3CR}{4 \cdot 3CR^2} = \frac{\mathcal{E}}{4R} \qquad dxy + y\,dx + \frac{4}{3CR} xy = \frac{\mathcal{E}}{3CR^2} \qquad x = e^{-\frac{4t}{3CR}}$

$y\left(dx + \frac{4t}{3CR}\right) = 0 \qquad y\,dx = \frac{\mathcal{E}\,dt}{3CR^2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Перепишем 3) и 4): $m(\vartheta_0+u_1)=3mv_2$

$$m(\vartheta_0-u_1)(\vartheta_0+u_1)=3mv_2^2$$

Поделим друг на друга: $\frac{m(\vartheta_0-u_1)(\vartheta_0+u_1)}{m(\vartheta_0+u_1)}=\frac{3mv_2^2}{3mv_2} \Rightarrow \vartheta_0-u_1=u_2$

Подставляя значение для u_2 в 3) получим:

$$m\vartheta_0=3m\vartheta_0-3mu_1-mu_1 \Rightarrow 4mu_1=2m\vartheta_0 \Rightarrow u_1=\frac{\vartheta_0}{2}.$$

Ответ вышел положительным, следовательно шайба будет двигаться так, как мы предположили.

Ответ: $h=\frac{3\vartheta_0^2}{8g}$; $u_1=\frac{\vartheta_0}{2}$

№3

Дано:

$V=8{,}31\cdot10^{-3}\,м^3$

$t_1=27^\circ C \Rightarrow T_1=300K$

$t_2=7^\circ C \Rightarrow T_2=280K$

$\vartheta_1=0{,}2$ моль

$\vartheta_2=0{,}3$ моль

$t_0=?$

$P_0=?$

Решение:

Т.к. сосуд теплоизолирован: $A'=Q'=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow U=const.$

Тогда: $U_0=U_1+U_2$, где U_0 - внутренняя энергия после продития.

$$U_1=\frac{3}{2}\vartheta_1RT_1;\ U_2=\frac{3}{2}\vartheta_2RT_2;\ U_0=\frac{3}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2)RT_0.$$

Тогда: $\cancel{\frac{3}{2}}(\vartheta_1+\vartheta_2)RT_0=\cancel{\frac{3}{2}}\vartheta_1RT_1+\cancel{\frac{3}{2}}\vartheta_2RT_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow T_0=\frac{\vartheta_1T_1+\vartheta_2T_2}{\vartheta_1+\vartheta_2}=288K \Rightarrow t_0=15^\circ C$$

Уравнение состояния: $P_0V=(\vartheta_1+\vartheta_2)RT_0 \Rightarrow P_0=\frac{(\vartheta_1+\vartheta_2)RT_0}{V}=$
$=144$ кПа.

$$dI + \frac{4}{3CR} I dt = \frac{\mathcal{E}}{3CR^2} dt$$

$I = xy$ $$x dy + y dx + \frac{4}{3CR} xy dt = \frac{\mathcal{E}}{3CR^2} dt$$

$$dx = -\frac{4}{3CR} x\, dt$$

$$\ln x = \frac{-4t}{3CR} + C$$

$$x = e^{\frac{-4t}{3CR} + C}$$

$$\left(e^{\frac{4}{3CR}t}\right)' = \frac{4}{3CR} \cdot e$$

$$x dy = \frac{\mathcal{E}}{3CR^2} dt$$

$$\left(e^{bt}\right)' = b \cdot e^{\frac{b}{t}} \cdot \frac{a}{b}$$

$$dy = \frac{\mathcal{E}}{3CR^2} \cdot e^{\frac{4t}{3CR}} dt$$

$$\int a \cdot e^{bt} dt$$

$$y = \frac{\mathcal{E}}{3CR^2} \cdot \frac{3CR}{4} \cdot e^{\frac{4t}{3CR}}$$

$$\frac{a}{b} \cdot e^{\frac{b}{t}}$$

$$\frac{\mathcal{E}}{4R} \cdot e^{\frac{4t}{3CR} + C}$$

$$= y = \frac{\mathcal{E}}{4R} \cdot e^{\frac{4t}{3CR} + C} \cdot e^{\frac{-4t}{3CR} + C} = \frac{\mathcal{E}}{4R} \cdot e^{2C}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

06-038

ШИФР

(заполняется секретарём)

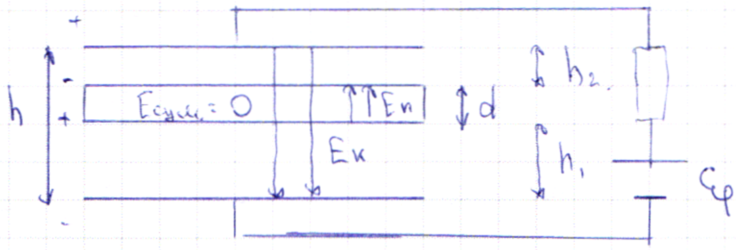
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $t_0 = 15^\circ C$; $P_0 = 144$ КПа

№4

Дано: C_0; $\mathcal{E}$; $h = 4d$; $C_0' = ?$; $\Delta q = ?$

Решение:



Т.к. в проводнике заряды под воздействием внешнего электрического поля распределяются таким образом, чтобы поле внутри отсутствовало $\Rightarrow$ на поверхности пластины индуцируются заряды, равные зарядам пластин конденсатора (т.к. $E = \frac{q}{2\varepsilon_0 S}$). Действительно, в этом случае поле внутри пластины равно: $E_к - E_п = \frac{q}{2\varepsilon_0 S}\cdot 2 - \frac{q}{2\varepsilon_0 S}\cdot 2 = 0$. Тогда полученную систему можно рассмотреть как два последовательно соединенных конденсатора (соединены через проводник). Обозначим расстояния от пластин до обкладок h_1 и h_2. Очевидно, что $h_1 + h_2 = h - d = \frac{3}{4}h$. Тогда ёмкости их: $C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{h_1}$ и $C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{h_2}$. Тогда $\frac{1}{C_0'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{h_1 + h_2}{\varepsilon_0 S} = \frac{3h}{4\varepsilon_0 S} \Rightarrow C_0' = \frac{4}{3}\frac{\varepsilon_0 S}{h}$. Но $C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{h} \Rightarrow C_0' = \frac{4}{3}C_0$

Ответ: $C_0' = \frac{4}{3}C_0$. (Вторая часть задачи на странице 5)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

III. После размыкания ключа, ток в цепи будет идти только в контуре с резистором R, и конденсатором.

Очевидно, что $Q = W = \frac{CU_0^2}{2} = \frac{C}{2} \cdot \frac{9}{16} \mathcal{E}^2 = C\mathcal{E}^2 \cdot \frac{9}{32}$.

Ответ: $Q = \frac{9}{32} C\mathcal{E}^2$; $U_0 = \frac{3}{4}\mathcal{E}$; $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$

Задача 4 (продолжение)

Заряд до введения найдём из II правила Кирхгофа:

$\mathcal{E} = \frac{q}{C_0} \Rightarrow q = C_0 \mathcal{E}$

После введения (в установившемся режиме): $\mathcal{E} = \frac{q_1'}{C_0'} \Rightarrow$

$\Rightarrow q_1 = \mathcal{E} \cdot C_0' = \mathcal{E} \cdot \frac{4}{3} C_0 = \frac{4}{3} C_0 \mathcal{E}$. Тогда $\Delta q = q_1 - q_0 = \frac{1}{3} C_0 \mathcal{E}$

Ответ: $\Delta q = \frac{1}{3} C_0 \mathcal{E}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Дано:

R; C; $\mathcal{E}$

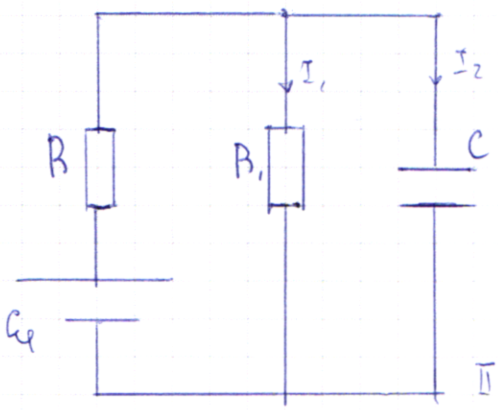
$R_1 = 3R$

$I_0 = ?$

$U_0 = ?$

$Q = ?$

Решение:



I. Сразу после замыкания $U_C = 0 \Rightarrow$ Второе правило Кирхгофа для контура ~~без~~ с конденсатором:

$\mathcal{E} = I_0 R \Rightarrow I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$.

II. В установившемся режиме правила Кирхгофа для двух малых контуров:

1) $\mathcal{E} = IR + IR_1$ (т.к. ток через конденсатор не течет ($q' = 0$));

2) $IR_1 = U_0$. Из 1): $I = \frac{\mathcal{E}}{R + R_1} = \frac{\mathcal{E}}{4R} \Rightarrow U_0 = IR_1 = \frac{\mathcal{E}}{4R} \cdot 3R = \frac{3}{4}\mathcal{E}$

~~III. После размыкания ключа правила Кирхгофа запишутся:~~

$\mathcal{E} = IR + I_1 R_1$

$I_1 R_1 = \frac{q}{C} \Rightarrow 3I_1' R = \frac{q'}{C} = \frac{I_2}{C} \Rightarrow I_2 = 3RCI_1'$

Продолжение на странице 5.

$I_1 + I_2 = I \Rightarrow \mathcal{E} = 4I_1 R + I_2 R \Rightarrow \frac{\mathcal{E}}{R} = 4I_1 + I_2 = 4I_1 + 3RCI_1'$

Перепишем уравнение в виде:

$dI_1 + \frac{4I_1 dt}{3RC} = \frac{\mathcal{E}}{3CR^2} dt$. Пусть $I_1(t) = x(t) \cdot y(t)$.

Тогда: $x\,dy + y\,dx + \frac{4\cancel{I_1}\, xy\, dt}{3RC} = \frac{\mathcal{E}}{3CR^2} dt$

$x\,dy + y\left(dx + \frac{4\cancel{I_1}\, x\, dt}{3RC}\right) = \frac{\mathcal{E}}{3CR^2} dt$.

Подберём функцию $x(t)$ такую, что выражение в скобках обратилось в нуль: $dx = -\frac{4I_1 x\, dt}{3RC} \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{4I_1 dt}{3RC} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln x = \frac{-4I_1 t}{3RC} + C_1$ (константа) $\Rightarrow x = e^{-\frac{4t}{3RC} + C_1}$

Подставив выражение для x, получим: $x\,dy = \frac{\mathcal{E}}{3CR^2}\,dt \Rightarrow$

$\Rightarrow dy \cdot e^{-\frac{4t}{3RC} + C_1} = \frac{\mathcal{E}}{3CR^2}\,dt \Rightarrow dy = \frac{\mathcal{E}}{3CR^2}\,dt \cdot e^{\frac{4t}{3RC} - C_1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad y = \frac{\mathcal{E}}{4R} \cdot e^{\frac{4t}{3RC} - C_1} + C_2$

Тогда $xy = I_1 = \frac{\mathcal{E}}{4R} \cdot e^{2C_1} + e^{-\frac{4t}{3RC} + C_1} \cdot C_2$

Для $t = 0$: $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{4R} \Rightarrow \frac{\mathcal{E}}{4R} \cdot e^{2C_1} + e^{C_1} \cdot C_2 = \frac{\mathcal{E}}{4R}$

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

06-038

ШИФР

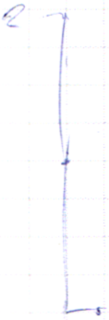
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $l = 50$ см

$v = ?$

$g = 10$ м/с^2



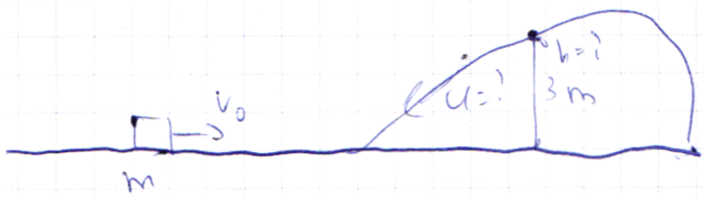
$\frac{mv_0^2}{2} = 2mgl + \frac{mv^2}{2}$

$\frac{mv^2}{l} = mg \Rightarrow v = \sqrt{gl}$

$\frac{v_0^2}{2} = 2gl + 0{,}5gl =$

$\Rightarrow v_0 = \sqrt{5gl} = \sqrt{\ }$

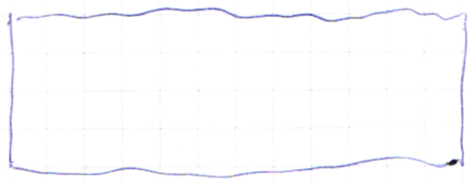
2.



$\Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{3m u^2}{2} + \frac{mu^2}{2}$

$mv_0 = 4mu \Rightarrow u = \frac{v_0}{4}$

3)



$U_0 = U_1 + U_2$

$28 \cdot 3 = 84$

$144 \cdot 2$

$\frac{0{,}2 \cdot 300 + 0{,}3 \cdot 280}{0{,}5} =$

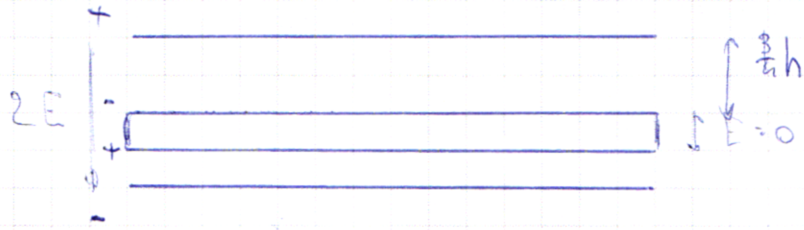
$\frac{60 + 84}{0{,}5} = 144 \cdot 2 = 288$К

$\frac{0{,}5 \cdot 8{,}31 \cdot 288}{8{,}31} \cdot 10^3 = 144 \cdot 1000 = 144000$ Па

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

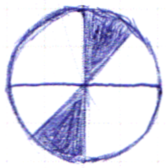
$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{h}$

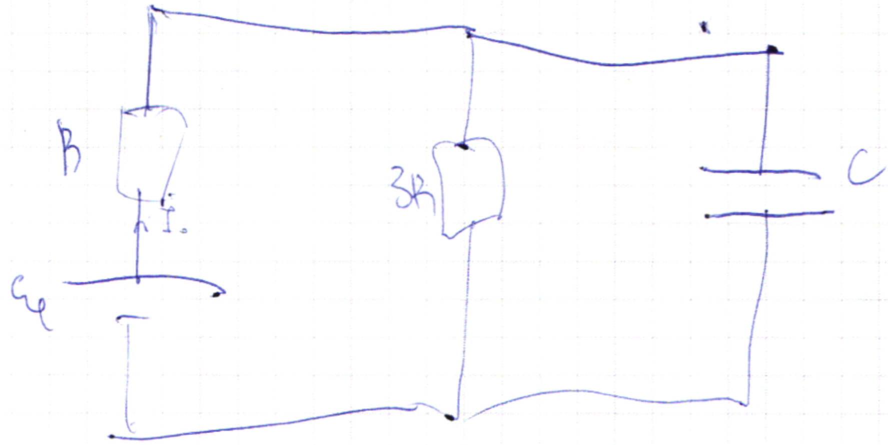


$\frac{q\,h}{\varepsilon_0 S} = U$

$E = \frac{q}{2\varepsilon_0 S}$

$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{3}{4}h - h_1}$ $\qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{h_1}$





$I_1 = \frac{q}{3RC}$

$I_2 = \frac{dq}{dt}$

$Q + W = A$

$\mathcal{E} = I_0 R + 3RI_1$

$\frac{CU^2}{2} = \frac{9C\mathcal{E}^2}{32} + Q = q \cdot A$

$3RI_1 = U_c$

$\frac{dU_c}{dt} = \frac{I_2}{C}$ $\qquad 3R\frac{dI_1}{dt} = \frac{I_2}{C} \Rightarrow I_2 = 3CRI_1'$

$dQ = (I_1 + I_2)^2 R\,dt + 3I_1^2 R\,dt$

$\mathcal{E} = I_1 R + I_2 R + 3RI_1 \Rightarrow \frac{\mathcal{E}}{R} = 4I_1 + I_2$

$\frac{\mathcal{E}}{R} = 4I_1 + 3CRI_1'$

$\left(\frac{q}{3RC} + \frac{dq}{dt}\right)^2 R\,dt + \frac{3q^2}{9R^2C^2} R\,dt$