

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

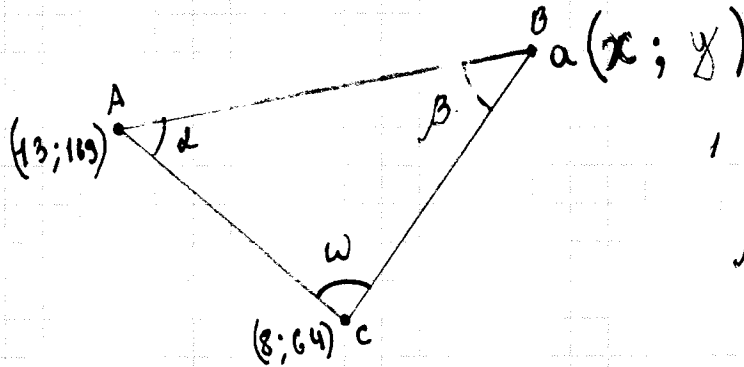
ШИФР

1-004

Заполняется ответственным секретарем

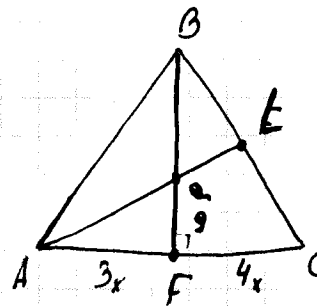
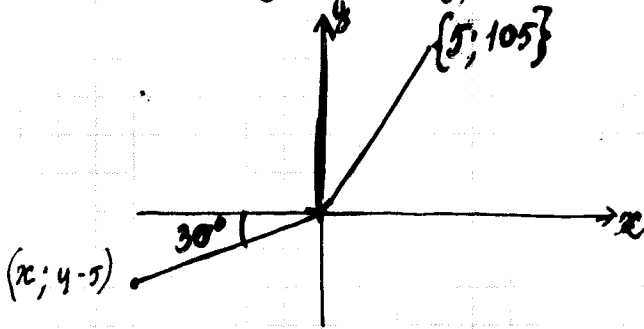
1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое наименьшее значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

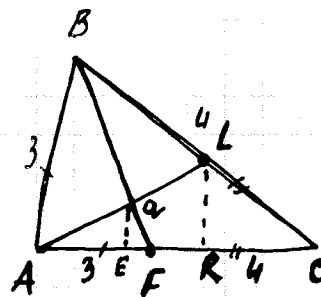


$$\begin{aligned} 1 \quad & \alpha + \gamma = 60^\circ \\ & \beta = 120^\circ \\ 2 \quad & \alpha + \beta = 60^\circ \\ & \gamma = 120^\circ \\ 3 \quad & \gamma + \beta = 60^\circ \\ & \alpha = 120^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad & AC \{5; 105\} \\ & CB \{8-x; 105-y\} \\ & \{5; 105\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} AF:FC &= 3:4 \\ SBQL:SBAC &= 1:16 \end{aligned}$$



$$AF:FC = 3:4$$

$$\begin{aligned} QE &= 9 \\ LR &=? \end{aligned}$$

$$\frac{574}{84x} = \frac{1}{16}$$

$$x = \frac{84x}{16}$$

$$x = \frac{21x}{4}$$

~~1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18~~

35 70 105 140 175

~~4 5 6~~

1) ~~1+2+3+4+...+25 = (26·12)+13~~

2) ~~36+37+38+...+75~~

3) ~~71+72+...+105~~

4) ~~106+107+...+140~~

5) ~~141+142+...+175~~

$$\begin{array}{r} 146 \\ \times 2 \\ \hline 292 \\ + 73 \\ \hline 365 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 432 \\ + 108 \\ \hline 540 \\ \times 2 \\ \hline 1080 \\ + 190 \\ \hline 1270 \\ \times 15 \end{array}$$

$1+2+3+4+5 = 6 \cdot 2 + 15 = 17$

$36+37+38+39+40 = 7 \cdot 6 \cdot 2 + 38 = 152 + 38 = 190$

$71+72+73+74+75 = 14 \cdot 6 \cdot 2 + 73 = 365$

$106+107+108+109+110 = 21 \cdot 6 \cdot 2 + 108 = 540$

$141+142+143+144+145 = 28 \cdot 6 \cdot 2 + 143 = 715$

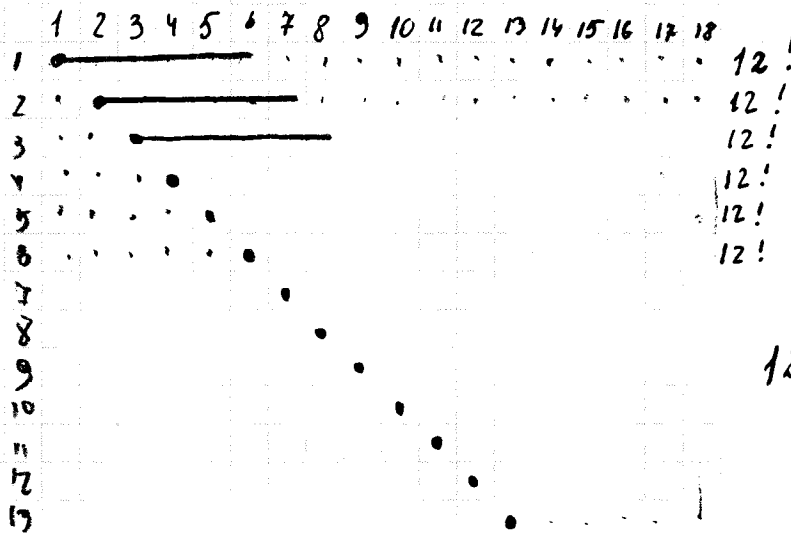
$$\begin{array}{r} 715 \\ + 365 \\ \hline 1080 \\ + 190 \\ \hline 1270 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1080 \\ + 730 \\ \hline 1810 \\ + 17 \\ \hline 1827 \end{array}$$

5

1 2 3 4 5 6

12 - "0", "9",



$12! \cdot 13 = 13!$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7) Для того, чтобы сумма 25 чисел из 5 отрезков была наименьшей, надо брать с каждого промежутка 5 минимальных чисел \Rightarrow

5 минимальных чисел \Rightarrow

1 отрезок числа от 1 до 5

2 отрезок от 36 до 40

3 отрезок от 71 до 75

4 отрезок от 106 до 110

5 отрезок от 141 до 145

$$1+2+3+4+5 = 6 \cdot 2 + 15 = 17$$

$$36+37+38+39+40 = 76 \cdot 2 + 38 = 190$$

$$71+72+73+74+75 = 146 \cdot 2 + 73 = 365$$

$$106+107+108+109+110 = 216 \cdot 2 + 108 = 540$$

$$141+142+143+144+145 = 286 \cdot 2 + 143 = 715$$

$$\begin{array}{r} 1080 \\ + 730 \\ + 17 \\ \hline 1827 \end{array}$$

1827 не делится на 35, т.к. на конце число 7, и не только.

и число 1827 состоит из наименьших 25 чисел по 5 из каждого отрезка, \Rightarrow 1827 - минимум.

Ответ: наименьшее значение суммы 25 чисел Тимошкино $= 1827$

3)

18-число

в числах из которого - цифры „5“ стоящие подряд =>

=> кол-во вариантов таких перестановок = 13

и остается 12 чисел „0“; „9“ => кол-во таких перестановок =

$$= \frac{12!}{2!} = \frac{12!}{2}$$

Общее кол-во вариантов перестановок =

$$= \frac{12!}{2} \cdot 13 = \frac{13!}{2}$$

$$\text{Ответ: } \frac{13!}{2}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1-СС4
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

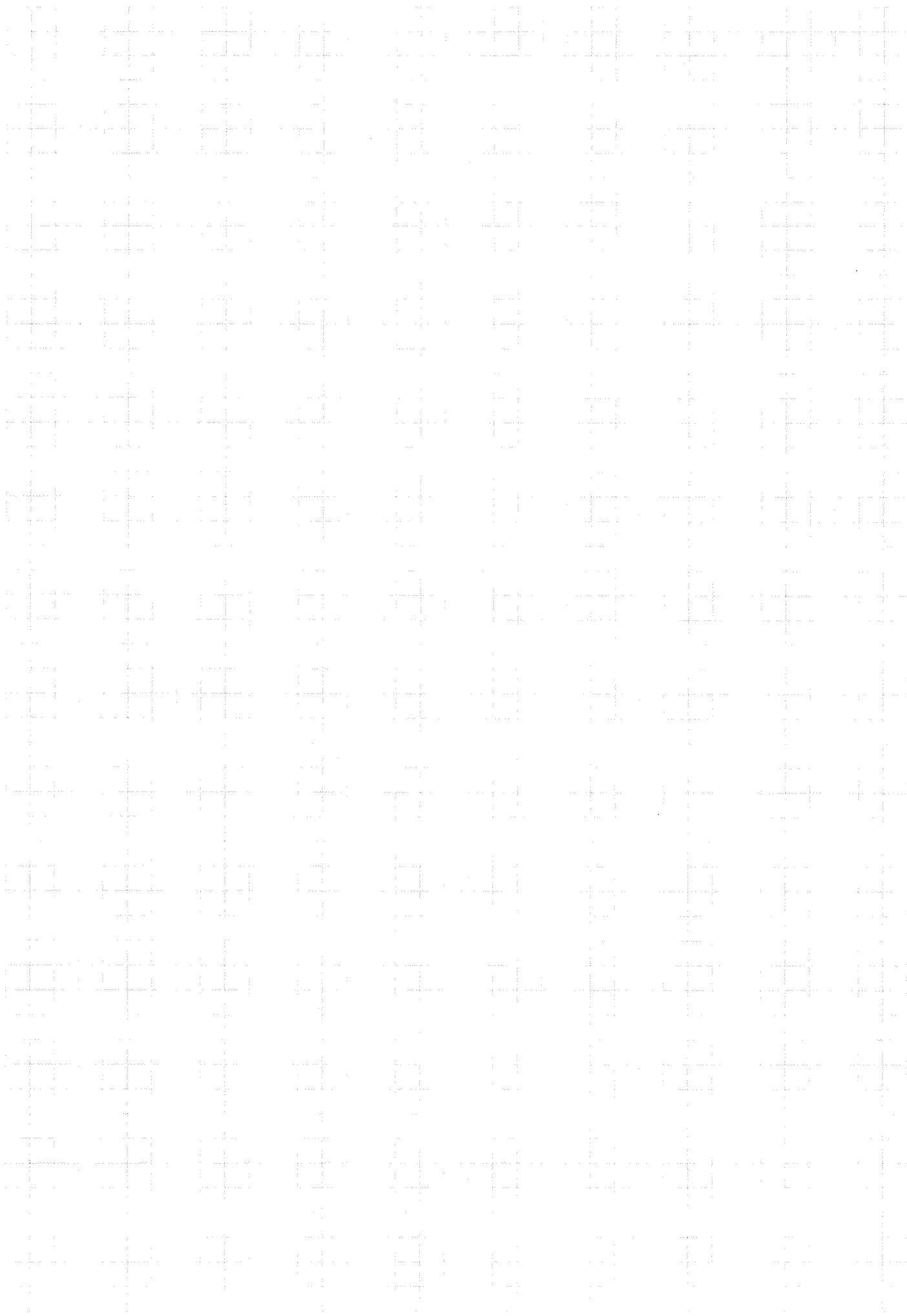


черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

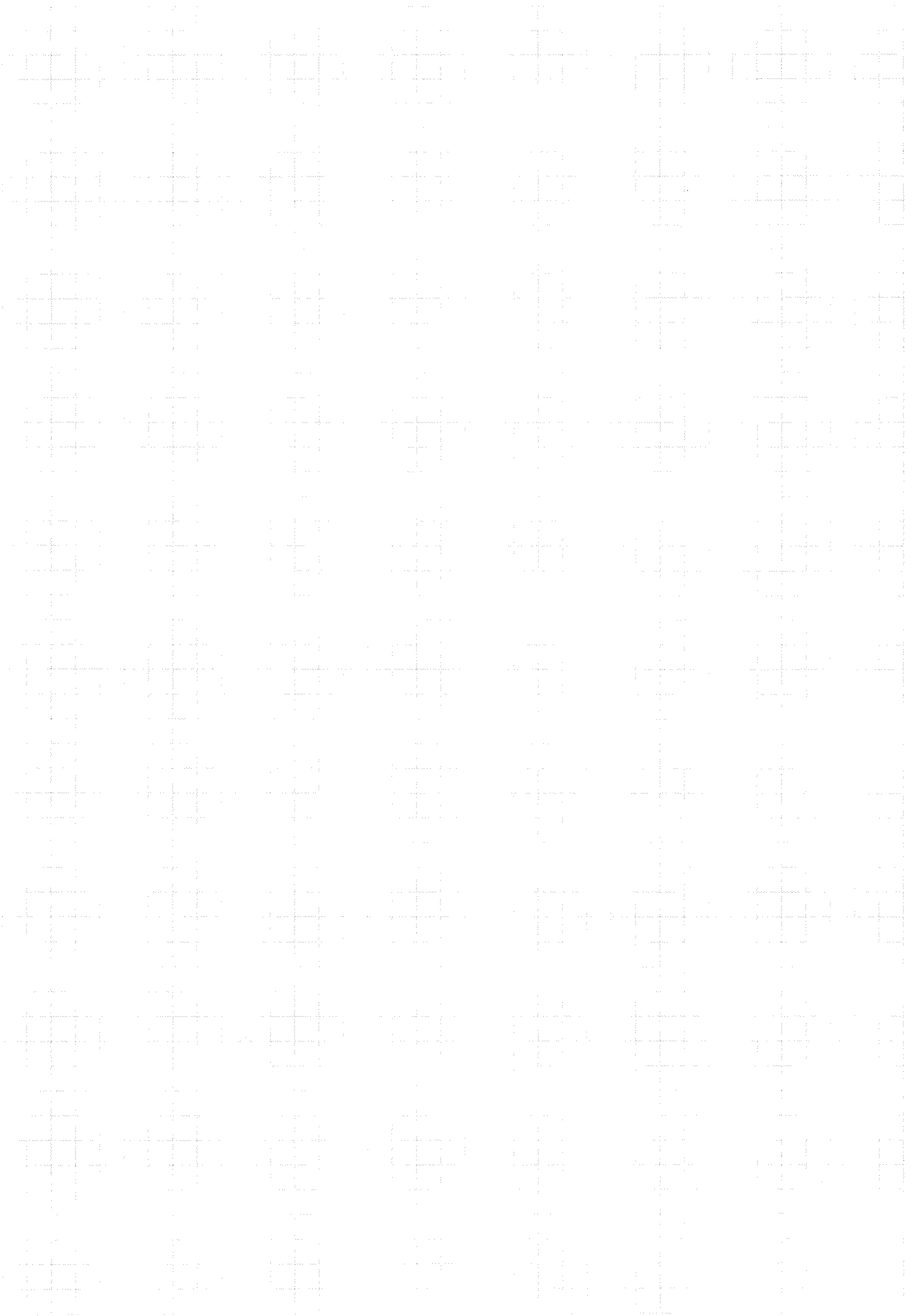
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)