

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

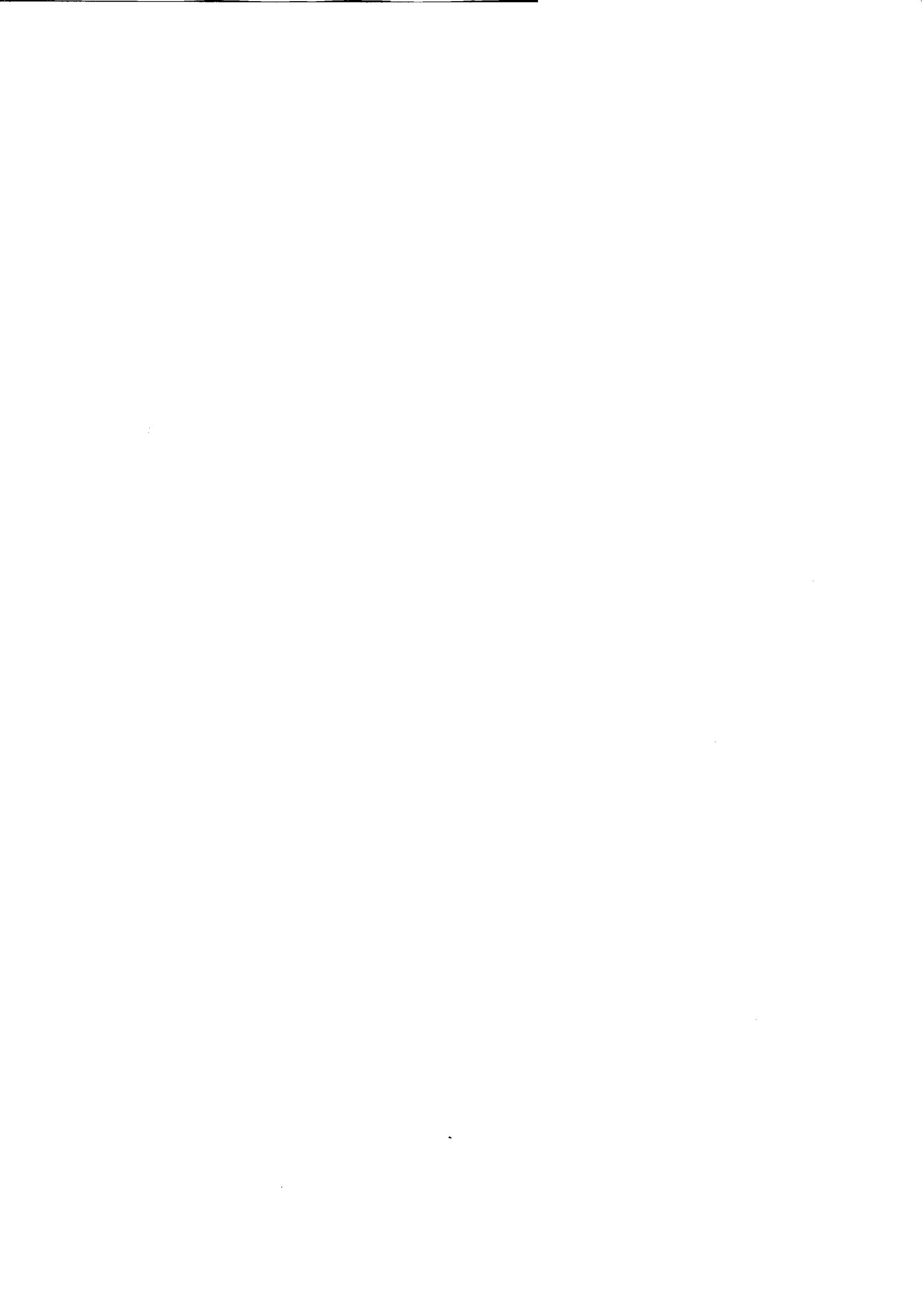
БИЛЕТ 2

ШИФР

1-011

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) Найдите ко-во 18-значных чисел ...

Решение.

1. т.к в 18-значных числах цифра "5" равно шесть, и они идут подряд, то есть только 13 возможных вариантов, при этом условии.

2. т.к помимо цифры "5", есть еще цифры "0" и "9" и при этом они встречаются хотя бы один раз, и учитывая то свободных мест для цифр 12 (т.к 6 мест занимает число "5"), то получим, что

$$\underbrace{11 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 9 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2}_{\text{числа для цифры, которые начинаются с "5"}}, (x)$$

Это для цифры, которые начинаются с "5"

а в остальных случаях, при которых число начинается с "9".
будет: ~~(x-1)~~ (x-11) \cdot 2, случаев 12

3. получим:

$$x + (x-22) \cdot 12 = 132 + 1332 = 1464$$

Ответ: 1464.

7) Тимокко выбрал по 5 целых чисел ...

Решение.

1. Чтобы сумма двадцати пяти выбранных Тимокко чисел была наименьшей, необходимо взять пять наименьших чисел из наибольшего промежутка, т.е. [141; 175].

Это числа 141, 142, 143, 144, 145, далее находим при каких вычетаемых, разность будет кратна 35:

141	142	143	144	145
1	2	3	4	5
36	37	38	39	40
71	72	73	74	75
106	107	108	109	110

Эти числа мы исключаем!

2. Далее т.к числа от 106 до 110 не входят в выбранные Тимокко числа, но входят в промежуток [106; 140], то мы берем числа после 110, это числа 111, 112, 113, 114, 115, и находим вычетаемое, при которых разность будет кратна 35:

111	112	113	114	115
6	7	8	9	10
41	42	43	44	45
76	77	78	79	80

} Эти числа исключаем!

3. В промежутке $[71; 105]$, наим. числа входящие в числа Питокио, ~~71, 72, 73, 74, 75~~. Найдём вычитаемые, при которых разность кратна 35. 35.

~~(71 72 73 74 75)~~

81	82	83	84	85
11	12	13	14	15
46	47	48	49	50

} Эти числа исключаем!

4. В промежутке $[36; 70]$, наименьшие числа входящие в числа Питокио: 51, 52, 53, 54, 55.

Найдём вычитаемые, при которых разность кратна 35.

51	52	53	54	55
16	17	18	19	20

- эти числа исключаем!

5. Из последнего промежутка $[1; 35]$, наим. числа входящие в числа Питокио: 21, 22, 23, 24, 25.

6. Найдём сумму всех двадцати пяти чисел:

$$\underbrace{145+144+143+142+141}_{111+112+113+114+115} + \underbrace{85+84+83+82+81}_{51+52+53+54+55} +$$

$$+ \underbrace{25+24+23+22+21} = 2075$$

Ответ: 2075.

2) Найдите наибольшее и наименьшее значения ср-ции:

$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3.$$

Решение.

$$1. g'(x) = 5 \cos x \cdot \cos 9x - 9 - \frac{1}{2} \cos 2x \cdot 14 - \sin^2 x$$

$$g'(x) = 45 \cos^2 x - 7 \cos x + \cos^2 x - 1$$

$$g'(x) = 46 \cos^2 x - 7 \cos x - 1$$

$$2. g'(x) = 0.$$

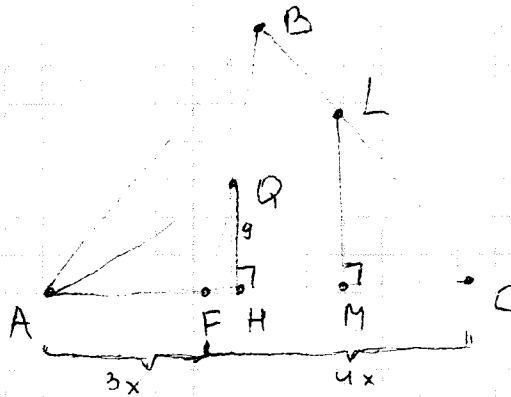
$$46 \cos^2 x - 7 \cos x - 1 = 0.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

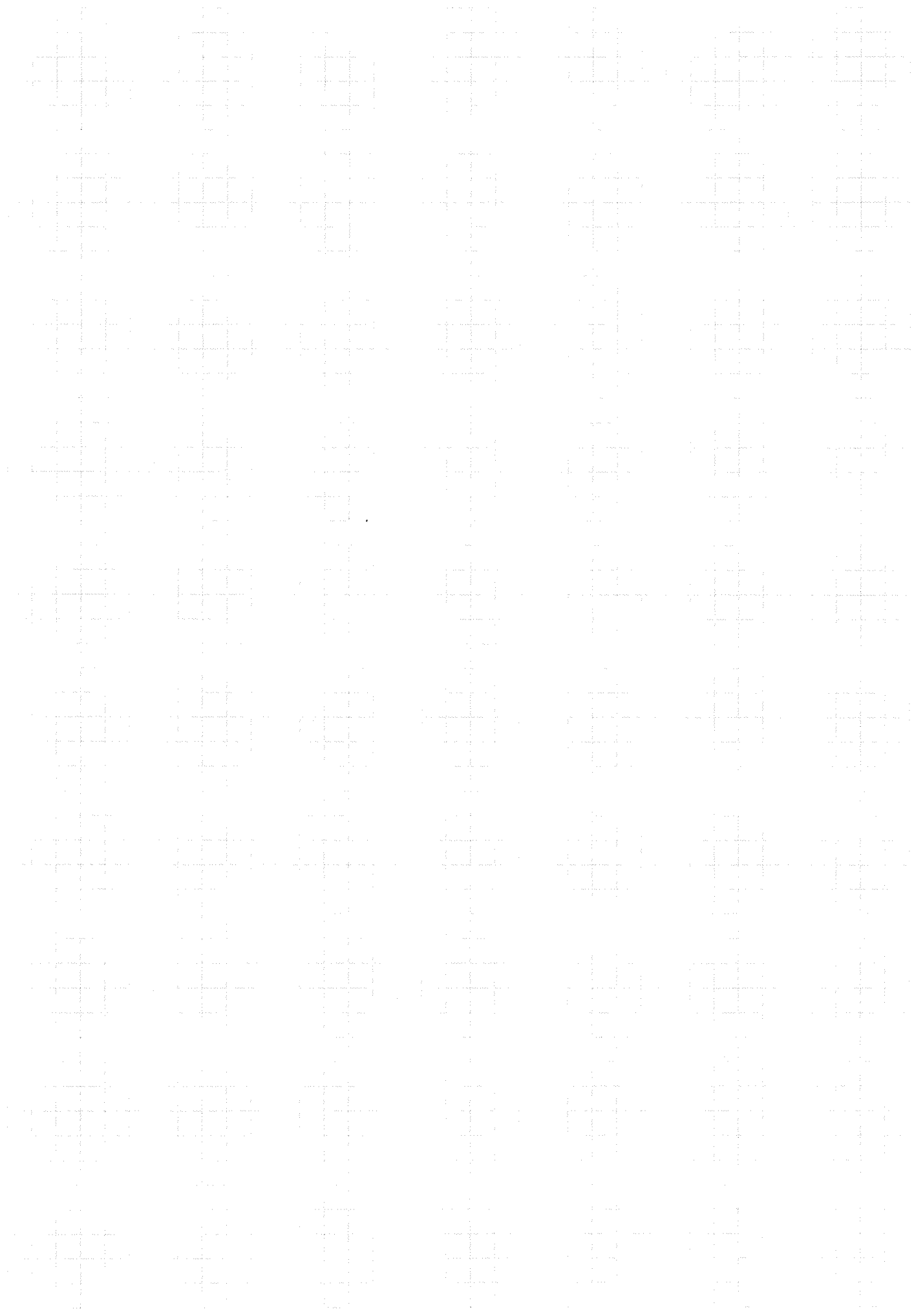
6) Дано: $F \in [AC]$, $L \in [BC]$, $\frac{|AF|}{|FC|} = \frac{3}{4}$; $\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$, $|QH| = 9$.

$\triangle ABC$.

Найти: $|LM|$ - ?



Решение.



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

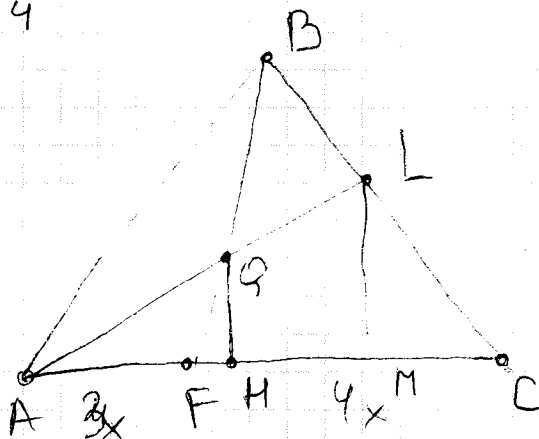
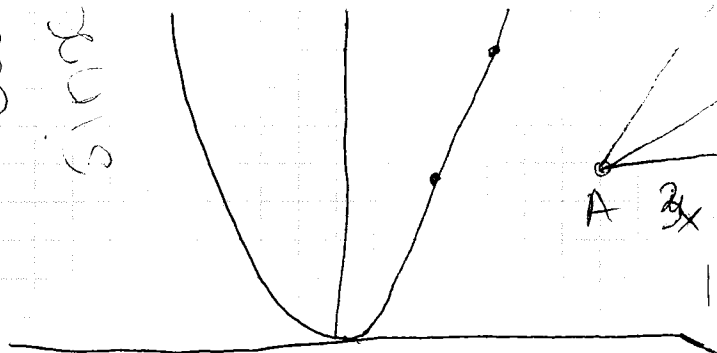
$$\sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x + \sin^2 x - 1 - 3 = 0.$$

$$\cos^2 x$$

$$\cos x \cos x$$

$$\sin x \sin x$$

-4



$$\log \sqrt{x+3} - x(x+5) \geq 1$$

$$x^3 = 125$$

$$\log_3 125 = 5$$

$$\log_a c = b$$

Минимум

$$\log_b c = a$$

$$a^b = c$$

$$\log_a a^b = b$$

$$\cos x \cos^2 x = 5$$

$$45 \cos^2 x - 7 \cos x + \cos^2 x - 1 - 3 = 0$$

$$46 \cos^2 x - 7 \cos x - 3 = 0$$

$$46x^2 - 7x - 3 = 0$$

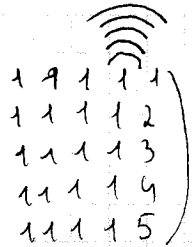
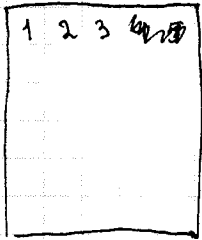
$$x^2 - \frac{7}{46}x - \frac{3}{46} = 0$$



$$\left(\frac{7}{46} \pm \frac{\sqrt{49 + 46 \cdot 12}}{46} \right) / 46$$

$$- \sin^2 x = \cos^2 x - 1$$

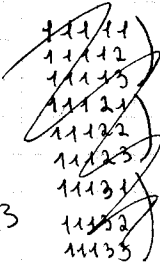
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



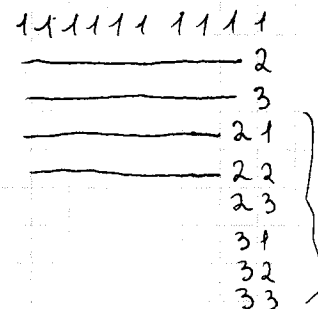
25
100
500
5=5.4

3.
249 3

3
3.3.3
3.3.



3.3.



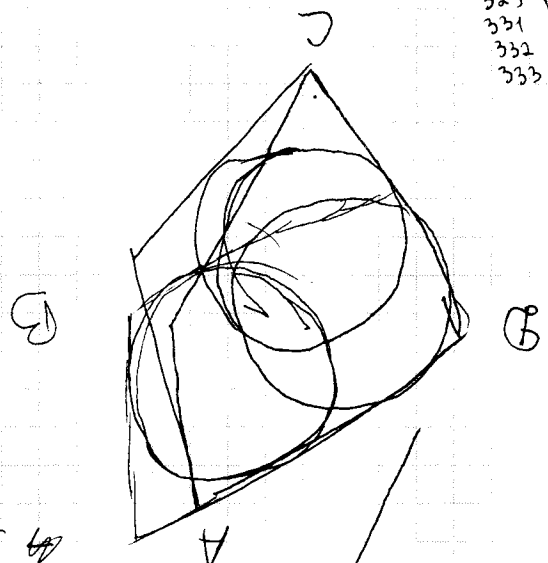
3

6

3 3 3 3 3 3 3 3
9 22 81 243 729 2187

$$\begin{array}{r} \times 27 \\ 3 \\ \hline 81 \\ \times 3 \\ \hline 243 \\ \times 3 \\ \hline 729 \\ \times 3 \\ \hline 2187 \\ \times 3 \\ \hline 6561 \\ \times 3 \\ \hline 19683 \\ \times 3 \\ \hline 59049 \\ \times 3 \\ \hline 177147 \end{array}$$

2 1 1
 2 1 2
 2 1 3
 2 2 1
 2 2 2
 2 2 3
 2 3 1
 2 3 2
 2 3 3
 3 1 1
 3 1 2
 3 1 3
 3 2 1
 3 2 2
 3 2 3
 3 3 1
 3 3 2
 3 3 3



$$\cos^2 x = \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \cos^2 x$$

$x - y = 35$

наш. знач.

$\frac{25}{}$

145	144
289	289
143	143
432	432
142	142
574	574
141	141
715	715
223	223
938	938
227	227
165	165
200	200
365	365
84	84
1449	1449
83	83
1532	1532
82	82
1681	1681
695	695
265	265
960	960
115	115
205	205

35
70
101
110
125
140
150
160
170
180
190
200

106	107	108	109	110	111	112	113	114	115
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80

$x, x+35$

$(x) (x+35)$
 $(x+20)$
 $(x+105)$
 $(x+140)$

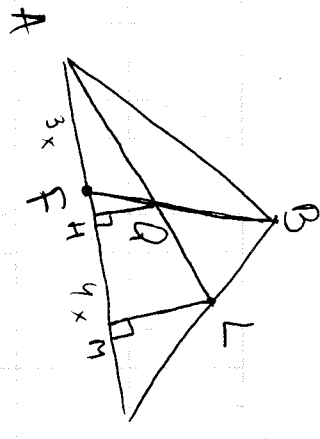
111	112	113	114	115
1	2	3	4	5
36	37	38	39	40
71	72	73	74	75
106	107	108	109	110

111	112	113	114	115
6	7	8	9	10
41	42	43	44	45
76	77	78	79	80

81	82	83	84	85
11	12	13	14	15
46	47	48	49	50

51	52	53	54	55
16	17	18	19	20

21	22	23	24	25
----	----	----	----	----



$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$
 $|QN| = 9$
 $|LM| = ?$
 $\frac{AF}{FC} = \frac{3}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

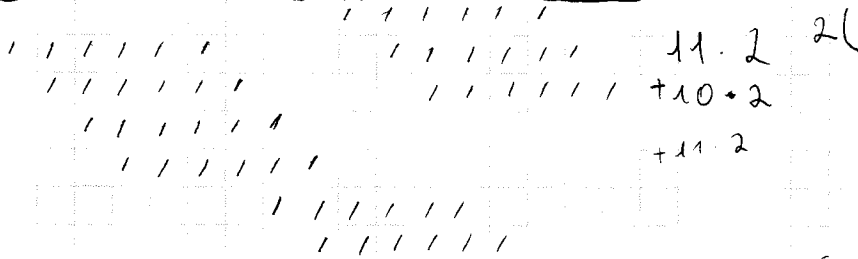
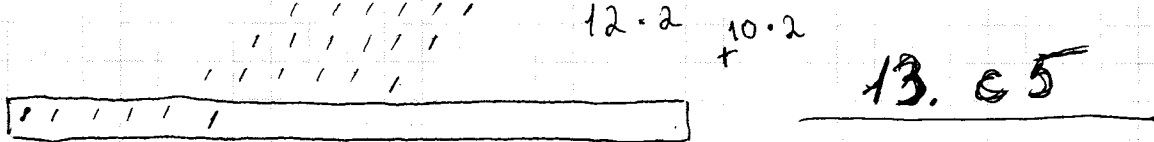
$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$g'(x) = \cos 5x \cdot 5 \cdot \cos 9x \cdot 9 - 2 \sin 7x \cdot 7 \cos 7x - 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$45 \cos 5x \cos 9x - 7 \sin 14x - 2 \sin x \cos x$$

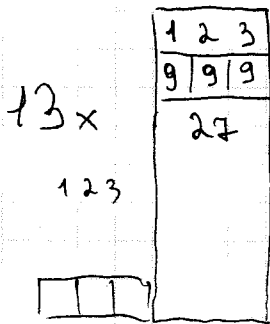
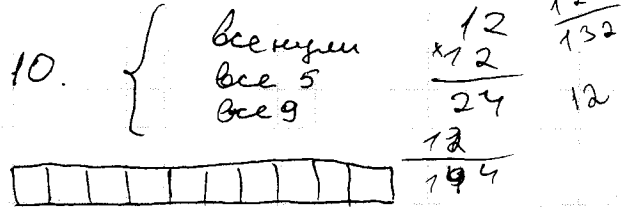
$$45 \cos 5x \cos 9x - 7 \sin 14x - 1 + \cos 2x$$

$$45 \cos 5x \cos 9x - 7 \sin 14x - 1 + \cos 2x$$



12 клеток пустые.
10 клеток разные

999
999



27

11 * 2
10 * 2
9 * 2

~~11 * 2~~
21

42 | 60 | 76 | 90 | 102 | 114 | 120 |

$$(21 + 10! \cdot 2) \cdot 13$$

$$\left((22 + 20 + 18 + 16 + 14 + 12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2) + (21 + 20 + 18 + 16 + 14 + 12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2) \right) \cdot 13$$

111 133
112 122
113 123
121 132
131 122
132 123

9

0 5 9

10

3

11 + 11

3 +

3z. 10z.

111
+ 12

222
+ 111

1332
+ 132

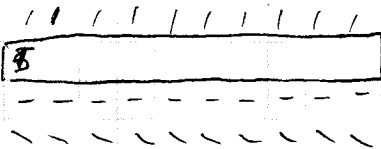
1464

132
x 13

393
+ 131

1703
+ 132

1835 + 3





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1-011

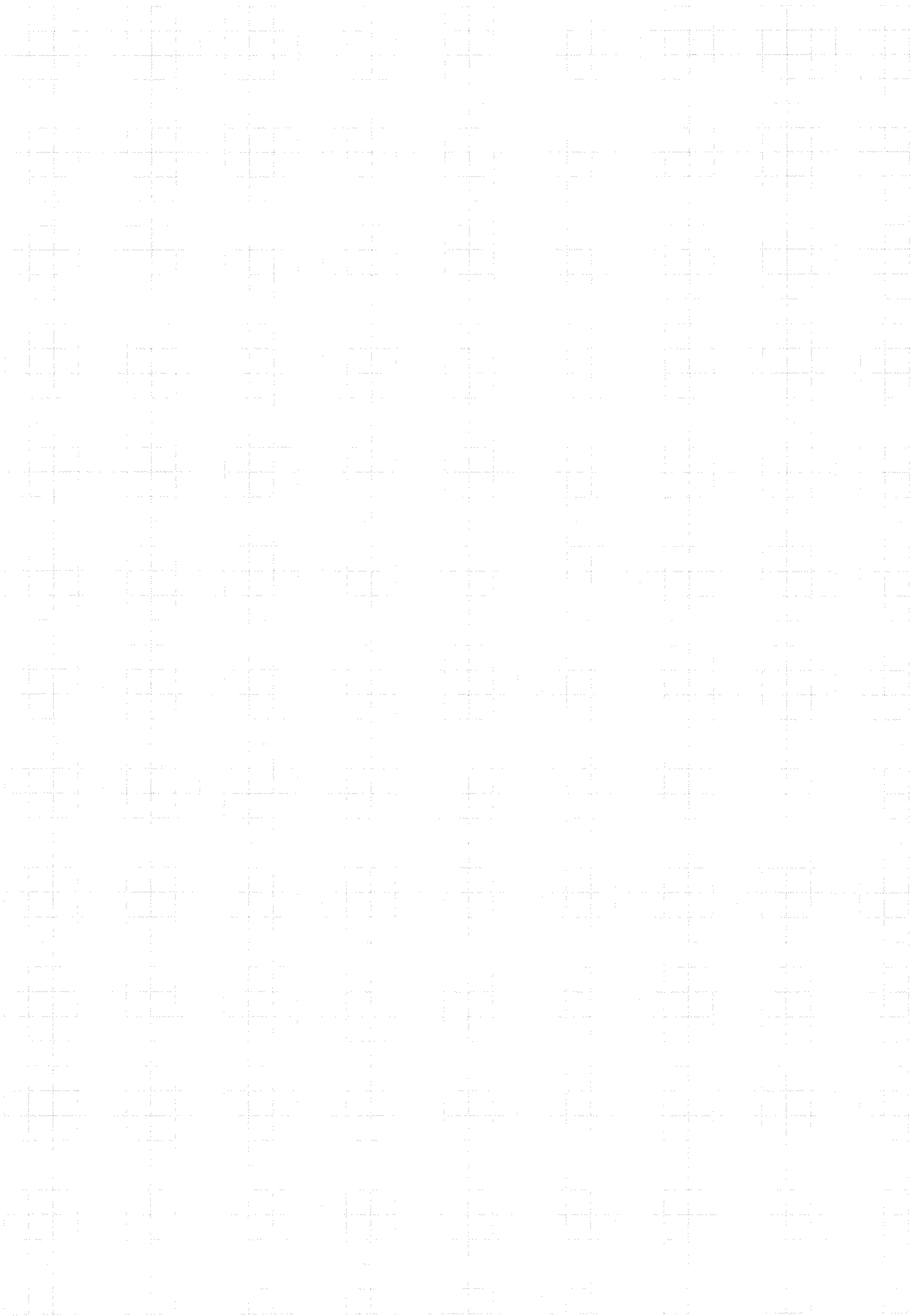
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)