МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР 1-012

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

$t^2+6t-160=0$

$D=6^2+4\cdot160=676$; $\sqrt{D}=26$

$t_1=\frac{-6+26}{\cancel{1}2}=10$; t_2 – не подходит т.к. $t_2<0$

$|AC|=10 \Rightarrow a=2\left(\frac{|AC|}{2}\right)^2$, т.к. $2x_3=|AC| \Rightarrow a=2\cdot\frac{100}{4}=50$

(3) $|AC|^2=|AB|^2+|BC|^2+|AB|\cdot|BC|$

$|AC|^2=14^2+\cancel{1}6^2+14\cdot6=196+36+84=316$

$|AC|=\sqrt{316}=2\sqrt{79} \Rightarrow a=2\left(\frac{|AC|}{2}\right)^2=2\cdot(\sqrt{79})^2=158$

Ответ: $a=50$ и $a=158$

№3

Рассмотрим 2 случая:

(1) группа из 7 восьмёрок стоит в начале числа

(2) группа из 7 восьмёрок не стоит в начале числа

~~Ко~~ Итоговое количество вариантов будет суммой (1) и (2)

$8888888\,\frac{7}{0}\frac{7}{0}\frac{7}{0}\frac{7}{0}\frac{7}{0}\frac{7}{0}\frac{7}{0}\frac{7}{0}\frac{7}{0}\frac{7}{0}$

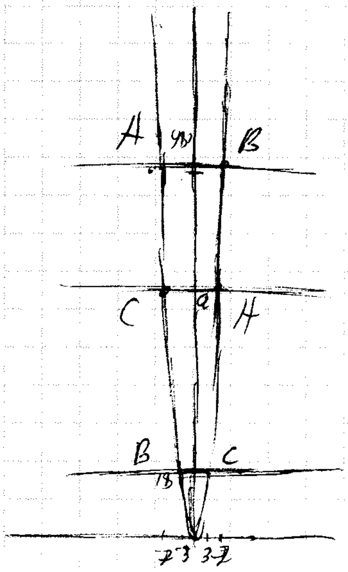
(1) Т.к. группа стоит в начале, то на оставшиеся 10 ячеек приходится по 2 варианта следовательно всего 2^{10} вариантов

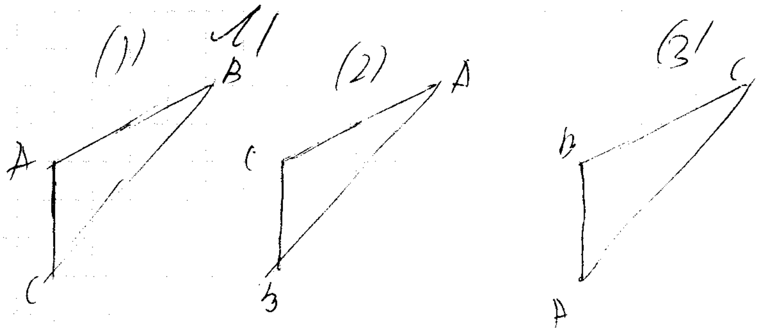
$\cdot\,\cdot\,8888888\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot$

(2) Когда группа стоит не в начале числа, то первая ячейка не может быть нулём а на оставшиеся 9 приходится по 2 варианта, $\Rightarrow 2^9$, но при этом без разрыва порядка группа имеет 10 положений, следовательно мы имеем $10\cdot2^9$ вариантов.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1





Имеется 3 варианта как можно составить такой треугольник. рассмотрим каждый из них с помощью ~~теоремы~~ косинусов:

(1) $|BC| = 2x_1 = 2\sqrt{\frac{y_1}{2}} = 2\cdot\sqrt{\frac{18}{2}} = 2\cdot 3 = 6$

$|AB| = 2x_2 = 2\sqrt{\frac{y_2}{2}} = 2\cdot\sqrt{\frac{98}{2}} = 2\cdot\sqrt{49} = 2\cdot 7 = 14$

$|AC| = 2x_3 = 2\sqrt{\frac{a}{2}}$ ~~$\Rightarrow a = ?$~~

$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

Рассмотрим 3 случая:

(1) (рис.(1)) $|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 - 2|AC|\cdot|AB|\cdot\cos 120^\circ$

$|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 + |AC|\cdot|AB|$

$36 = |AC|^2 + 196 + 14|AC|$

$|AC|^2 + 14|AC| + 160 = 0$

Пусть $|AC| = t$:

$t^2 + 14t + 160 = 0$

$D = 14^2 - 4\cdot 160 \quad D < 0$

Следовательно этот случай невозможен

(2) (рис.(2)) $|AB|^2 = |AC|^2 + |CB|^2 + |AC|\cdot|CB|$

$14^2 = |AC|^2 + 6^2 + 6|AC|$

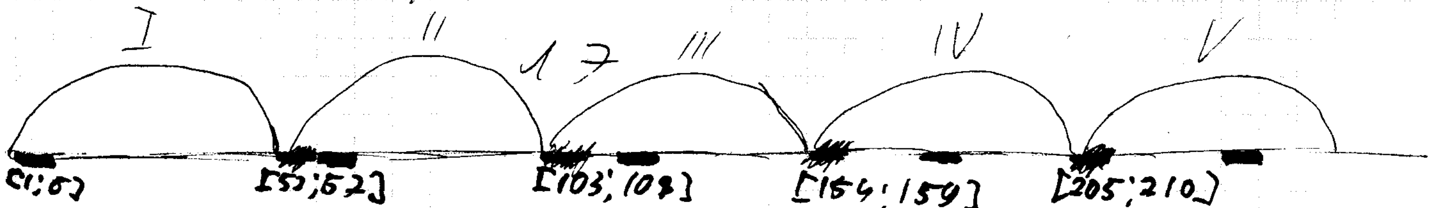
Пусть $|AC| = t$; $t \geq 0$:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Итого: $10\cdot 2^9 + 2^{10} = 2^9(10+2) = 12\cdot 2^9$

Ответ: $12\cdot 2^9$

№7



Минимальная сумма будет тогда, когда из начала каждого интервала будет взята группа из 6 последовательных чисел, ~~групп~~ причём т.к. разность не кратна и5, то в зависимости от интервала будет взята группа совпадающая с номером интервала

$N_{min} = S_{[1;6]} + S_{[52;57]} + S_{[103;108]} + S_{[154;159]} + S_{[205;210]}$

$N_{min} = 21 + 51\cdot 6 + 21 + 102\cdot 6 + 21 + 153\cdot 6 + 21 + 204\cdot 6 + 21 =$

$= 3165$ (см. черновик)

Ответ: 3165

№5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) - \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x) \geq 0$

$(\sqrt{x+7}-x-1)(2x+4-\sqrt{x+7}) \geq 0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x+7}-x-1\geq 0\\ 2x+4-\sqrt{x+7}\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x+7}-x-1\leq 0\\ 2x+4-\sqrt{x+7}\leq 0\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x+7}\geq x+1 \ (1)\\ \sqrt{x+7}\leq 2x+4 \ (2)\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x+7}\leq x+1 \ (3)\\ \sqrt{x+7}\geq 2x+4 \ (4)\end{cases}\end{array}\right. \begin{array}{l} x\in[-7;3)\\ x\in[\frac{3}{4};+\infty)\\ x\in[3;+\infty) \ \ x=-1\\ x\in(-\infty;-3] \cup [\frac{3}{4};+\infty)\end{array}$$

$$\Rightarrow (-7;+\infty)$$

(1) $\sqrt{x+7}\geq x+1$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1\leq 0\\ x+7\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x+1\geq 0\\ x+7\geq x^2+2x+1\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\leq -1\\ x\geq -7\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq -1\\ x^2-x-6\leq 0\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x\in[-7;-1]\\ x\in[-1;3]\end{array}\right. \Rightarrow x\in[-7;3]$$

$x^2-x-6\leq 0$

$D=1+24=25$

$x_1=\frac{1+5}{2}=3 \qquad x_2=\frac{1-5}{2}=-2$

$x\in[-2;3]$

(2) $\sqrt{x+7}\leq 2x-4$

$$\begin{cases}x+7\geq 0\\ 2x+4\geq 0 \quad |:2\\ x+7\leq 4x^2+16x+16\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\geq -7\\ x\geq -2\\ 4x^2+15x+9\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\geq -7\\ x\geq -2\\ x\in(-\infty;-3]\cup[\frac{3}{4};+\infty)\end{cases} \Rightarrow x\in[\frac{3}{4};+\infty)$$

$4x^2+15x+9\geq 0$

$D=15^2-4\cdot 9\cdot 4=81$

$x_1=\frac{-15+9}{8}=\frac{3}{4} \qquad x_2=\frac{-15-9}{8}=-3$

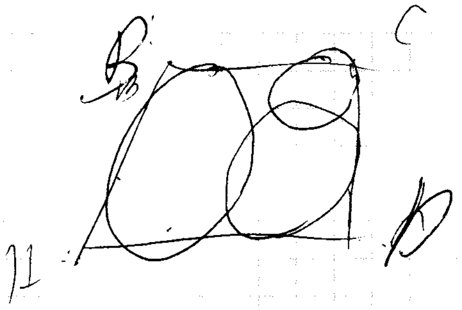
$x\in(-\infty;-3]\cup[\frac{3}{4};+\infty)$

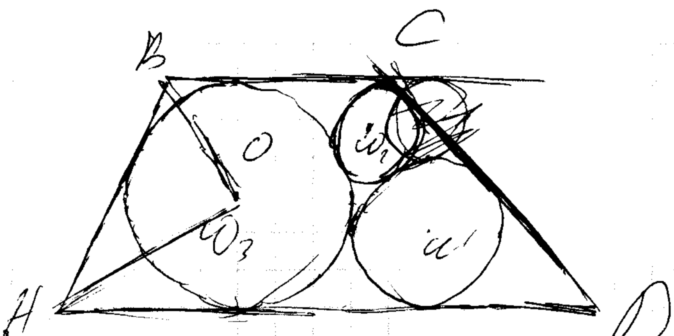
(3) $\sqrt{x+7}\leq x+1$

$$\begin{cases}x+7\geq 0\\ x+1\geq 0\\ x+7\leq x^2+2x+1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\geq -7\\ x\geq -1\\ x^2+x-6\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\geq -7\\ x\geq -1\\ x\in(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)\end{cases} \Rightarrow x\in[3;+\infty) \quad x=-1$$

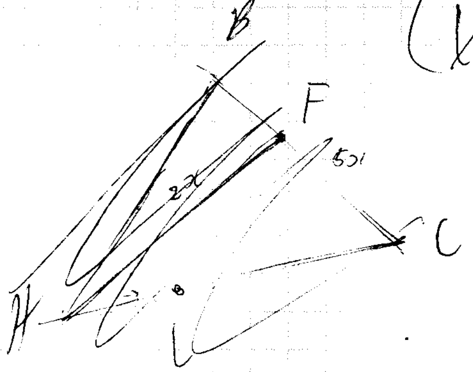
(4) $$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geq -7\\ x\leq -2\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq -2\\ x+7\geq 4x^2+16x+16\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x\in[-7;-2]\\ \begin{cases}x\geq -2\\ 4x^2+15x+9\leq 0\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x\in[-7;-2]\\ x\geq -2\\ x\in(-\infty;-3]\cup[\frac{3}{4};+\infty)\end{array}\right. \Rightarrow x\in[-7;-3]\cup[\frac{3}{4};+\infty)$$

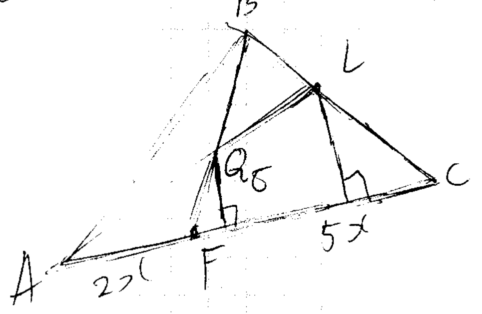
1-012





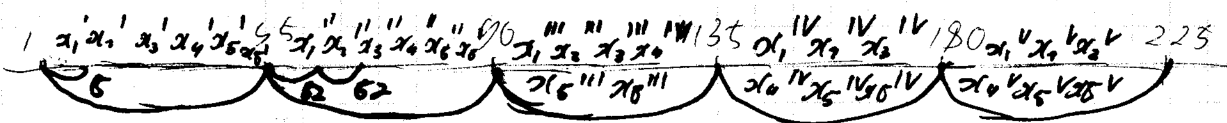
$(\sqrt{x+7}-(x+1))(2x+4)+\sqrt{x+7}$





$2x^2+7x-3$

$D=49+24$



I II III IV V

$x_1{}'+x_2{}'+x_3{}'+x_4{}'+x_5{}'+x_6{}'+x_1{}''+x_2{}''+x_3{}''+x_4{}''+x_5{}''+x_6{}''+$
$+x_1{}'''+x_2{}'''+x_3{}'''+x_4{}'''+x_5{}'''+x_6{}'''+x_1{}^{IV}+x_2{}^{IV}+x_3{}^{IV}+x_4{}^{IV}+x_5{}^{IV}+x_6{}^{IV}$
$+x_1{}^{V}+x_2{}^{V}+x_3{}^{V}+x_4{}^{V}+x_5{}^{V}+x_6{}^{V}=N$

То что ~~сум~~ пизрен не крат 45 значит, что
чисп не попадает через 45 (если в первом ...
и все пере б чем, но в след ... (чем все пере)

$N_{min}=x_1{}'+x_2{}'+x_3{}'+x_4{}'+x_5{}'+x_6{}'+x_7{}''+x_8{}''+x_9{}''+x_{10}{}''$
$+x_{11}{}''+x_{12}{}''+x_{13}{}'''+x_{14}{}'''+x_{15}{}'''+x_{16}{}'''+x_{17}{}'''+x_{18}{}'''$
$+x_{19}{}^{IV}+x_{20}{}^{IV}+x_{21}{}^{IV}+x_{22}{}^{IV}+x_{23}{}^{IV}+x_{24}{}^{IV}+$
$x_{25}{}^{V}+x_{26}{}^{V}+x_{27}{}^{V}+x_{28}{}^{V}+x_{29}{}^{V}+x_{30}{}^{V}$

$N_{min}=1+2+3+4+5+6+52+53+54+55+56+57+$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos^4 5x =$

$\cos^5 x - \cancel{\sin^5 x} - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x - 5\sin x \cos^4 x$
$+ 10\cos^2 x \sin^3 x - \sin^5 x$

$\sin 3x \cdot \sin 7x = \frac{1}{2}\cos^4 x - 3\cos^2 x \sin^2 x + \frac{1}{2}\sin^4 x -$
$- \frac{1}{2}\cos^5 x + 5\cos^3 \sin^2 x - \frac{5}{2}\cos x \sin^4 x + \frac{5}{2}\sin x \cos^4 x$
$- \frac{5}{2}\cos^2 x \sin^2 x + \frac{1}{2}\sin^5 x$

$\cancel{\cos 4x - 10}$

$(\cos 4x \cos x)^2$

$\cos^2 4x \cos^2 x - 2\cos 4x \sin 4x \cos x \sin x + \sin^2 4x \cos^2 4x$

$(\sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 3x + 4)^{\pi}$

$= \cos 3x \cdot \cos 7x - 2\sin x \cos x - 2\cos 5x \sin 5x$

$= \frac{1}{2}\cos 10x + \frac{1}{2}\cos 4x - \sin 2x - \sin 10x$

№ 3

$\overbrace{3\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8\ 8}^{7}$: 0 0 0 0 0 0 0 0 0

Если мы им группу из 7 8-рок стоящих, то у нас на остальные 10 ячеек приходится по 2 варианта. Следовательно вариантов 2^{10}

Если он свободно, то первое число всегда будет 7 всех стоящих, а на остальные 9 ячеек приходится 2^9 вар.

Ответ $2^{10} + 2^9 = 2^9(2+1) = 3 \cdot 2^9$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

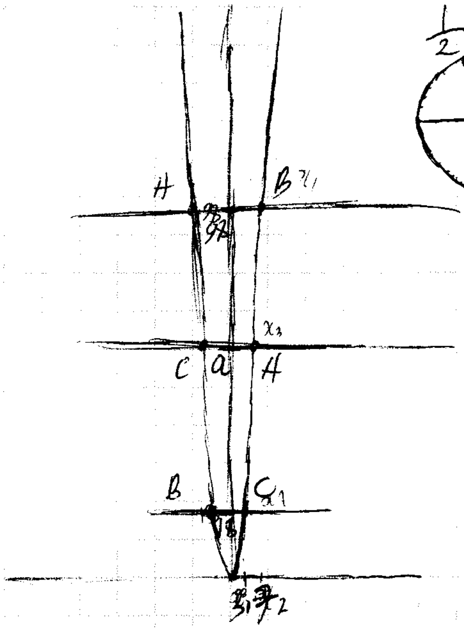
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

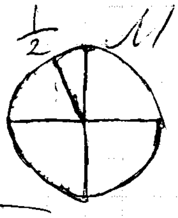
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

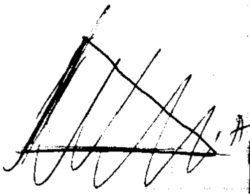
1-012
ШИФР
(заполняется секретарём)

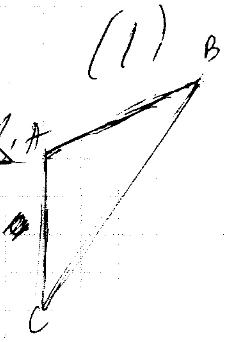
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

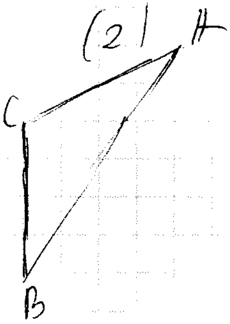
$26^2 = (25+1)^2 = 625 + 50 + 1 = 676$

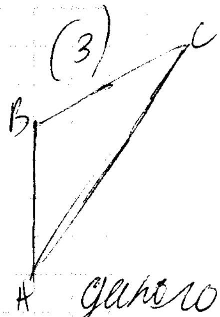












Есть 3 версии расположения данного треугольника

(1) $|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 + \cancel{2}|AC|\cdot|AB|\cdot\cancel{\cos 120^\circ}$

$|BC| = 2x_1 = 2\cdot 3 = 6$ $\qquad |AC| = 2x_3$ $\qquad (14)^2 = (10+4)^2 = 100 + 80 + 16$

$|AB| = 2x_2 = 2\cdot 7 = 14$

x_3 - есть такой x при котом $y = a$

x_1 - есть такой x при котором $y = 18 \Rightarrow x_1 = 3$

x_2 - есть такой x при котором $y = 98 \Rightarrow x_2 = 7$

$36 = 6^2 = |AC|^2 + (14)^2 + 14|AC|$ $\quad ; 14^2 - 6^2 = 196 - 36 = 160$

$|AC|^2 + 14|AC| + 160 = 0$ $\quad ; |AC| = t$

$t^2 + 14t + 160 = 0$ $\qquad 640$

$D = 196 - 4\cdot 160 \quad D < 0$

(2) $|AB|^2 = |AC|^2 + |CB|^2 + |AC|\cdot|CB|$

$14^2 = |AC|^2 + 6^2 + 6|AC| \Rightarrow |AC|^2 + 6|AC| - 160 = 0 \quad |AC| = t$

$t^2 + 6t - 160 = 0 \quad D = 36 + 4\cdot 160 = 676 \Rightarrow |\sqrt{676}| = 26$

$t_1 = \frac{-6+26}{2} = 10$ $\qquad |AC| = 10 \Rightarrow x_3 = \frac{|AC|}{2} = 5 \Rightarrow a = 2\cdot 5^2 = 50$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$14 \cdot 6 = 84$

(3) $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |AB| \cdot |BC| \Rightarrow$

$|AC|^2 = 14^2 + 6^2 + 14 \cdot 6 = 196 + 36 + 84 = 316$

$|AC| = \sqrt{316} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 79} = 2\sqrt{79}$

$x_3 = \frac{|AC|}{2} = \sqrt{79} \Rightarrow a = 2 \cdot (\sqrt{79})^2 = 158$

№2

$\sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$\sin 3x \cdot \sin 7x = \frac{1}{2}(\cos(3x - 7x) - \cos(3x + 7x)) =$

$\frac{1}{2}(\cos(4x) - \cos(10x)) = \frac{1}{2}($

$\cos 4x = (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 - 4\sin^2 x \cos^2 x$

$\cos^4 x - 6\cos^2 \sin^2 x + \sin^4 x = \cos(4x)$

$\cos 10x = \cos^2 5x - \sin^2 5x = \cos^2(4x + x) - \sin^2(4x + x)$

$\cos 4x \cos x - \sin 4x \sin x - \sin 4x \cos x + \cos 4x \sin x$

$\cos x(\cos 4x - \sin 4x) - \sin x(\cos 4x + \sin 4x)$

$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 \sin^2 x + \sin^4 x$

$\sin 4x = 2\sin 2x \cos 2x = 2(2\sin x \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)) =$

$4\sin x \cos^3 x - 4\cos x \sin^3 x$

$\cos x(\cos^4 x - 6\cos^2 \sin^2 x + \sin^4 x - 4\sin x \cos^3 x + 4\cos x \sin^3 x)$

$-\sin x(\cos^4 x - 6\cos^2 \sin^2 x + \sin^4 x + 4\sin x \cos^3 x - 4\cos x \sin^3 x)$

$\cos 10x = \cos^5 x - 6\cos^3 \sin^2 x + \cos x \sin^4 x - 4\sin x \cos^4 x + 4\cos^2 \sin^3 x$

$-\sin x \cos^4 x + 6\cos^2 x \sin^3 x - \sin^5 x - 4\sin^2 x \cos^3 x + 4\cos x \sin^4 x$

$2\sin x \cos x$

$\sin 2\cos 2 + \cos 8 \sin 8$

☑ черновик ☐ чистовик

Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$52+53+54+55+56+57 = \cancel{52+1+51+2+51+3+51+4+51+5+51+6}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

I II III IV V

46 [46;51] 90 [91;102] 136 [126;153] 180 [180;204] 228

[1;6] [52;57] [103;108] [154;159] [205;210]

$N_{min} = S_{[1;6]} + S_{[52;57]} + S_{[103;108]} + S_{[154;159]} + S_{[205;210]}$

$N_{min} = \underbrace{1+2+3+4+5+6}_{21} + \underbrace{52+53+54+55+56+57}_{51\cdot6+21} + \underbrace{103+104+105+106+107+108}_{102\cdot6+21} + \underbrace{154+155+156+157+158+159}_{153\cdot6+21} + \underbrace{205+206+207+208+209+210}_{204\cdot6+21}$

~~$N_{min} = 21$~~ $N_{min} = 21 + 51\cdot6+21 + 102\cdot6+21 + 153\cdot6+21 + 204\cdot6+21 = 21\cdot5 + 51\cdot6 + 102\cdot6 + 153\cdot6 + 204\cdot6 =$

3165

$51\cdot6 = 306$ $102\cdot6 = 51\cdot6\cdot2 = 612$ $153\cdot6 = 918$ $204\cdot6 = 1224$

$306 + 306\cdot2 + 306\cdot3 + 306\cdot4 = 306\cdot10 + 2$

$21\cdot5 = 105$ ~~3060~~ $3060 + 105 = 3165$

1 5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) - \log_{\sqrt{x+7}-x}(\sqrt{x+7}-x) \geq 0$

$(\sqrt{x+7}-x-1)(2x+4-\sqrt{x+7}) \geq 0$

$((\sqrt{x+7}) - (x+1))((2x+4) - \sqrt{x+7}) \geq 0$

$(x-1)(x-2) \geq 0$

$$\left(\sqrt{x+7}-(x+1)\right)\left((2x+4)-\sqrt{x+7}\right) \geq 0$$

$-2x^2-6x-4$

$$(2x+4)\sqrt{x+7} - x+7 - (x+1)(2x+4) + (x+1)\sqrt{x+7} \geq 0$$

$$\sqrt{x+7}\cdot(3x+5) - 2x^2 - 7x + 3 \geq 0$$

$$\cancel{\sqrt{x+7} \geq \frac{2x^2+7x-3}{3x+5}}$$

$$\cancel{\sqrt{x+7}(3x+5) \geq 2x^2+7x-3}$$

$$\left(\sqrt{x+7}-(x+1)\right)\left((2x+4)-\sqrt{x+7}\right) \geq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+7}-(x+1) \geq 0 \\ 2x-4-\sqrt{x+7} \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+7}-(x+1) \leq 0 \\ 2x-4-\sqrt{x+7} \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+2} \geq x+1 \\ \sqrt{x+7} \leq 2x-4 \end{cases} \\ \begin{cases} \\ \end{cases} \end{array}\right.$$

$$(2x+4)^2 \Rightarrow 2(x+2)^2 = 4(x^2+4x+4) = 4x^2+16x+16$$

$$\cancel{225-32\cdot 4} = 225 - 128 = 97$$

$$225 - 4\cdot 9\cdot 4 = 225-4\cdot 36 = 225-144 = 81$$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)