МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 1-С14

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3.

Начнем с того что всего 18-ти значных чисел $9\cdot10^{17}$

В этом случае чисел меньше, т.к. можно исполь. цифры 0; 9; 5

всего „5" 6 штук и они идут подряд и каждая цифра использ.

минимум 1 раз.

Решение:

$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5\ldots a_{16}a_{17}a_{18}}$

на место a_1 можно поставить либо 5 либо 9, если 5 то следующие 5 мест будут заняты „5", а оставшиеся 12 мест либо 9 либо 0. Но стоит учиты-вать, что каждое число из „9" и „0" должно присутствовать хотя бы 1 раз.

Так же: местоположение группы из 6-ти „5" неважно, т.к. от переме-щения множителей произведение не меняется.

следовательно всего таких чисел:

$1^6\cdot2^{(12-1)}\cdot1^1=2^{(12-1)}=2^{11}$ (т.к. если после группы из „5" идёт группа из других 11 одинаковых цифр то последняя обязательно должна быть невыбранной цифрой. Опять же порядок расположения неважен.

Ответ: $2^{11}=2048$

Задача N5. Решите неравенство (в школе не прошли еще)

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

Решение:

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$ Итак запишем в модели $\log_a b \geq 1$, чтобы это выполнялось нужно чтобы:

1) $|b| \geq |a|$, если $a \geq 1$ и $b \geq 1$

2) $|b| \leq |a|$, если $a \in (0;1)$ и $b \in (0;1)$

перепишем относительно нашего неравенства

→ 1) $|x+5| \geq |\sqrt{x+3}-x|$, если $x+5 \geq 1$ и $\sqrt{x+3}-x \geq 1$

→ 2) $|x+5| \leq |\sqrt{x+3}-x|$, если $(x+5) \in (0;1)$ и $(\sqrt{x+3}-x) \in (0;1)$

ОДЗ из $\sqrt{x+3}$: $x \in [-3;+\infty)$, то отсюда

$|x+5|$ всегда >0, рассмотрим 1.

$x+5 \geq |\sqrt{x+3}-x|$, рассмотрим когда правая часть положительна

1) $\sqrt{x+3}-x > 0$

$\sqrt{x+3} > x$

$x+3 > x^2$

$x^2-x-3 < 0$

$x_1 \approx 2,3$ (см черновик)

$x_2 \approx -1,3$ (см черновик)

* подставляем чтобы узнать знаки

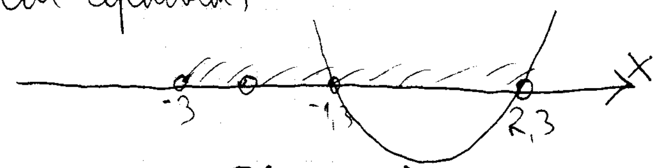


рисунок №1.

$\sqrt{x+3}-x > 0$ при $x \in (-3;2,3)$

вернемся к 1

$x+5 \geq |\sqrt{x+3}-x|$

решим системой это неравенство

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x+5 \ge \left|\sqrt{x+3} - x\right|$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+3} - x > 0, \\ x+5 \ge \sqrt{x+3} - x, \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{x+3} - x < 0, \\ x+5 \ge x - \sqrt{x+3}; \end{cases} \end{array}\right.$$

• рассмот 1-ю систему

$$x+5 \ge \sqrt{x+3} - x$$

$$(2x+5)^2 \ge \left(\sqrt{x+3}\right)^2 \quad \text{ОДЗ: } x \in [-3;+\infty) \text{ относительно } \sqrt{x-3}$$

$$4x^2 - 19x + 22 = 0$$

$$D = 19^2 - 8 \cdot 44 = 361 - 352 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{19 \pm 3}{8}$$

$$x_1 = \frac{22}{8} = \frac{11}{4} = 2{,}75$$

$$x_2 = 2$$

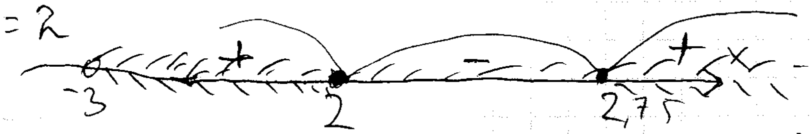


рисунок N2

$$x \in [-3; 2] \cup [2{,}75; +\infty)$$

• рассмотрим вторую систему

$$\cancel{x}+5 \ge \cancel{x} - \sqrt{x+3}$$

$$\sqrt{x+3} \ge -5$$

$$x \in [-3; +\infty)$$

рассмотрим (2)

$x+5 \le |\sqrt{x+3}-x|$

$$\begin{cases}\sqrt{x+3}-x>0\\ x+5\le\sqrt{x+3}-x\end{cases}$$

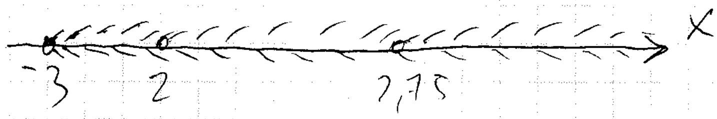
$2x+5\le\sqrt{x+3}$ (из рисунка №2 видно, что

$x\in[2;2,75]$

$\cancel{x+3}$ $$\begin{cases}\sqrt{x+3}-x<0\\ \cancel{x}+5\le\cancel{x}-\sqrt{x+3}\end{cases}$$

$5\le-\sqrt{x+3}$ решений нет.

следовательно решением неравенства будет объединение промежутков



$x\in(-3;+\infty)$

ответ: $x\in(-3;+\infty)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

МФТИ

1-014
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №7.

если бы не было условия о том, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35, то минимальная сумма выбранных 25-ти чисел находилось бы по принципу: бери самые маленькие числа из данных промежутков. выглядело бы это так.

$1+2+3+4+5+36+37+38\ldots$

но $1-36 \vdots 35$, $2-37 \vdots 35$

решение: чтобы условие задачи выполнялось нужно брать минимальные числа так, чтобы было чередование. пронумеруем промежутки

$\overset{1}{[1;35]}$ $\overset{2}{[36;70]}$ $\overset{3}{[71;105]}$ $\overset{4}{[106;140]}$ $\overset{5}{[141;175]}$

из №1 берем 5 первых минимальных чисел: 1, 2, 3, 4, 5

из №2 берем 5 минимальных чисел, но начиная с 6-ой позиции: 41, 42, 45

то есть из ~~четных~~ промежутков имеющих нечетный номер мы берем первые 5 чисел, а из промежутков с четным номером берем 5 первые 5 чисел, но начиная с 6-й позиции.

выпишем эти числа

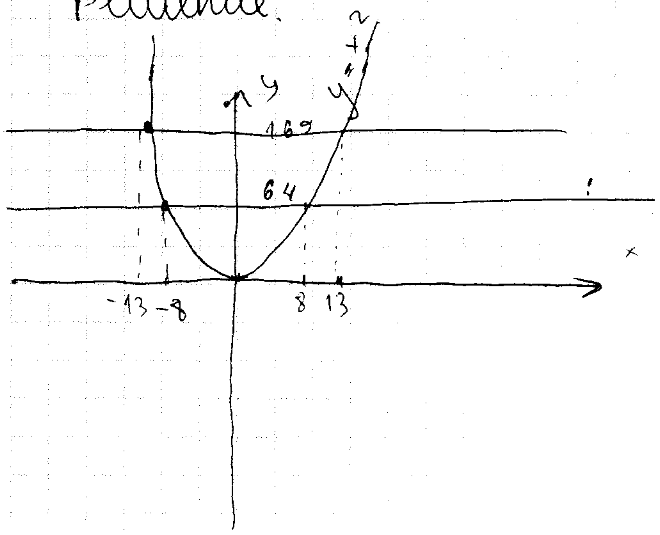
1, 2, 3, 4, 5, 41, 42, 43, 44, 45, 71, 72, 73, 74, 75, 111, 112, 113, 114, 115, 141, 142, 143, 144, 145

найдем их сумму:

$\Sigma = 1845$ (см черновик, там ~~решение~~ вычисление.

Задача №1.

Решение:



Так как график парабола, и она отсекает прямые, то найдем их длину, т.е. координати точки x в месте пересечения графика с прямыми.

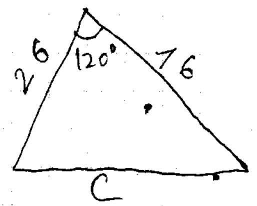
$169 = x^2$

$x = \pm 13 \Rightarrow$ длина 26

$64 = x^2$

$x = \pm 8 \Rightarrow$ длина 16.

В условии не сказано между нашими сторонами угол, так что начертим произвольный



Воспользуемся теоремой косинусов:

$c^2 = 26^2 + 16^2 - 2 \cdot 26 \cdot 16 \cos 120°$ $\quad \cos 120° = \sin 30° = \frac{1}{2}$

$c^2 = 676 + 256 - \cancel{2} \cdot 316 \cdot \frac{1}{\cancel{2}}$

$c^2 = 360 + 256 = 616$

$c = \sqrt{616}$ следовательно длина $c = \sqrt{616}$

т.к. нужно най $y = \alpha$, т.е. параметр α.

$\alpha = \left(\frac{c}{2}\right)^2$ т.к. если длина стороны например равна 16, то $y = \left(\frac{16}{2}\right)^2 = 64$, т.е. проводим обратный процесс.

итак параметр $\alpha = \left(\frac{\sqrt{616}}{2}\right)^2 = \frac{616}{4} = 154$

~~Ответ: y = 154; α = 154~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

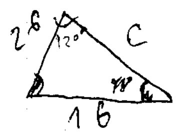
1-024

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим второй случай, когда:



по теореме косинусов:

$26^2+c^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 26\cdot c=256$ $\quad$ $\angle\cos 120^\circ=\frac{1}{2}$

$676-256+c^2+26c=0$

$c^2+26c-420=0$

$D=676+1680=2356$

$x_{1,2}=\frac{-26\pm\sqrt{2356}}{2}$

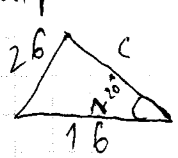
$x_1=\frac{+26-\sqrt{2356}}{2}$ ~~посторонний~~ посторонний

$x_2=\frac{+26+\sqrt{2356}}{2}=$

$=-13+\frac{\cancel{2}\sqrt{589}}{\cancel{2}}=+13+\sqrt{589}$

в этом случае $a=\left(\frac{+13+\sqrt{589}}{2}\right)^2=\frac{169+26\sqrt{589}+589}{4}$

Третий случай:



по теореме косинусов:

$676=256+c^2-16c$ $\quad$ т.к. $\cos 120^\circ=\frac{1}{2}$

$420=c^2-16c$

$c^2-16c-420=0$

$D=256+1680=1936$

$x_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{1936}}{2}$

$x_{1,2}=\frac{16\pm 44}{2}$ $\quad$ $x_1=\frac{16+44}{2}=70$

в этом случае $a=\left(\frac{70}{2}\right)^2=1225$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$x_2 = \frac{16-44}{2} = -14$ (посторонний)

Ответ: $a = 1225$; $a = \frac{169 + 26\sqrt{589} + 589}{2}$; $a = 154$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1-014

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Продолжение №1.~~

Зад №7. Задание №7

если разность не делится на 35 то каждое число / 35

1, 2, 3, 4, 5   41, 42, 43, 44, 45   71, 72, 73, 74, 75   111, 112, 113, 114, 115

141, 142, 143, 144, 145.

$15 + (86 \cdot 2) + 43$

$15 + 86 \cdot 2 + 43 + 146 \cdot 2 + 73 + 226 \cdot 2 + 113 + 286 \cdot 2 + 143 =$

$= 15 + 172 + 43 + 292 + 73 + 452 + 113 + 572 + 143 =$

$143 + 572 = 715$

$=$

$= 15 + 215 + 365 + 565 + 715 =$

$830 + 800 + 215 = 1845$

Зад №2.

$g(x)$

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - (1 - \cos^2 7x) - \cos^2 x - 3$

$\sin 5x \cdot \sin 9x - 1 + \cos^2 7x - \cos^2 x - 3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Продолжение № 5

$\cancel{1a}$ $x+5 \geq \sqrt{x+3}-x$ $\qquad\qquad$ $x+5 \geq x-\sqrt{x+3}$

$2x+5 \geq \sqrt{x+3}$

$4x^2+20x+25 \geq x+3$

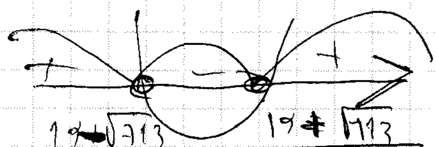
$4x^2-19x+22 \geq 0$

$4x^2-19x+22 \neq 0$

$D=361+16\cdot 22=361\cdot \cancel{8} \cdot 8\cdot 44$

$44\cdot 8=352;\ 352+361=\sqrt{713}$

$x_{1,2}=\frac{19\pm\sqrt{713}}{8}$



$\frac{19-\sqrt{713}}{8}$ $\qquad$ $\frac{19+\sqrt{713}}{8}$

21, 21, 21, 42, 4,41·4

$2+\frac{3\cdot\frac{10}{8}}{8\cdot\frac{10}{8}}$ $\quad \frac{30}{80}$ $\qquad \approx 17{,}64$

$\frac{1}{8} \approx 2{,}5$ $\qquad$ 39

$\cancel{x}+5 \geq \cancel{x}-\sqrt{x+3}$

$5 \geq -\sqrt{x+3}$

$-5 \leq \sqrt{x+3}$

$\sqrt{x+3} \geq -5$

$x+5 \leq \sqrt{x+3}-x$

$2x+5 \leq \sqrt{x+3}$, $\qquad x \in [2;\ 2{,}75]$

$\cancel{2x}+5 \leq \cancel{x}-\sqrt{x+3}$

-5 $\qquad$ $5 \leq -\sqrt{x+3}$. решений нет.

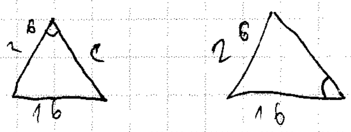
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

1-014



$26^2+c^2-26c=256$

$676-256+c^2-26c=0$

420

$c^2-420-26c=0$

$c^2-26c-420=0$

$D=676+1680$

$D=$

2

1680
676
2356 | 2
1178 | 2
589

4 · 589

третий случай

1936 | 2
968

968 | 2
484

4 · 484 | 2
2

2

$\sqrt{4 \cdot 484}$

$2\sqrt{484}=4\cdot 121$

$2\cdot 2\cdot 11.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

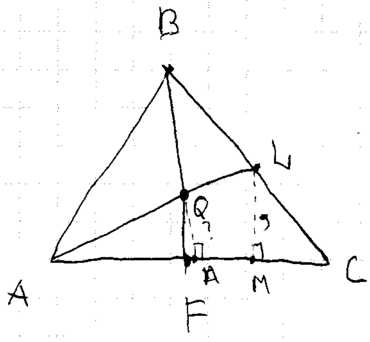
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 7x \cdot \sin 7x = f'$

g

$g(x)' = (\sin 5x \cdot \sin 9x)' - (\sin 7x \cdot \sin 7x)' - (\cos x \cos x)'$

$g'(x) - \sin' 5x \sin 9x$



$AF : FC = 3 : 4$

$S_{BQL} : BAC = 1 : 16$

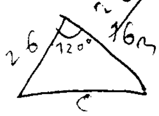
$QD - ?$ $\quad LM = 9$

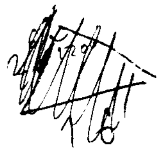
$\frac{S_1}{S_2} = \frac{h_1 a_1}{h_2 a_2}$

$26 \cdot 16 = 156 + 26 = 416$

$26 \cdot 26 = 156 + 52 = 676$

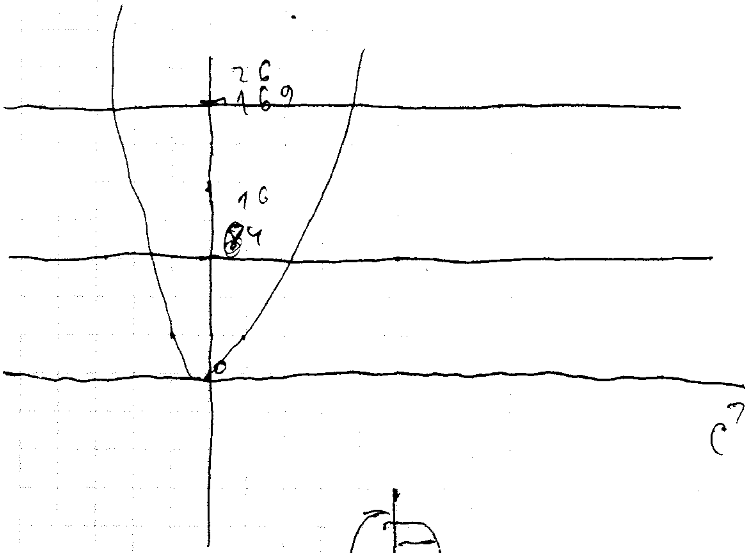
$26 \cdot 16 \cdot 2 = 772$





$\cos(90 + 30°)$

$\sin 30°$



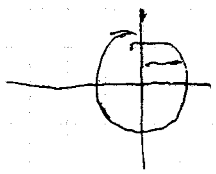
$c^2 = 26^2 + 16^2 - 2 \cdot 26 \cdot 16 \cos 120°$

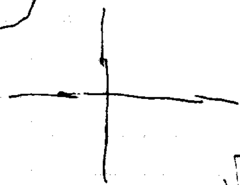
$c^2 = 676 + 256 - 772$

$676 + 256 - 386$

$290 + 256$ $\quad \frac{\sqrt{546}}{2}$

$546 \cdot 2$





$\frac{546}{4} =$

$546 : 4 = 136$

$\frac{\sqrt{616}}{2} = \frac{616}{4}$

$616 : 4 = 154$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Черновик

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1-014

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}$

$\log_{2^{-2}} 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$\log_{2^{-1}} 2^{-2} = 2$

2,5

$\sqrt{\frac{1}{2}}$ $\frac{1}{1,41}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x[-3;2]$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,7 + 2,5$

$x+5>0$

$x>-5$

$x \in (-3; +\infty)$

$-3,5$

$x \in [-3; 2,3]$

$(-5) > (-7)$

$|b| > |a|$

$x \in (3; -1,3)$

Задача №5

$|\sqrt{x+3} - x| > 0$ при $x \in [-3;$

$\sqrt{x+3} - x > 0$

$\sqrt{x+3} > x$

$x+3 > x^2$

$x^2 - x - 3 < 0$

$x+3 > x^2$

$x+3-x^2 > 0$

$x^2 - x + 3 < 0$

$1 - 4 \cdot (-3) = 13$

$\frac{1 \pm 3,6}{2} = 2,3$

$-1,3$

$\sqrt{x+3} - x = 0$

$\sqrt{x+3} = x$

$x+3 = x^2$

$x^2 - x = 3$

$x^2 - x - 3 = 0$

$D = 1 + 12 = 13$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm 13}{2}$

x

$3,6 \cdot 3,6 = 21,6 + 108 = 12,96$

$+$ $-$ -3 $-1,3$ $2,3$

$(-1,3; 2,3)$

-3

$\begin{cases} x+5 \geq \sqrt{x+3} - x \\ \cancel{x+5 \leq} \\ x+5 \geq x - \sqrt{x+3} \end{cases}$

$2,3 \cdot 2,3 = 4,6 + 4,6 = 5,29 - 2,3$

$x \in (-3; +1$

$x_{1,2} = \frac{1-3,6}{2}$

$-1,3$

$2,3$

$x_1 = 2,1$

$2,5 \cdot 2,5 = 4,7$

№7

2[чисел из $[1; 175]$

черновик

№3

10^{18}

10^{17} $9\cdot10^{17}$

на первое место либо 5 либо 9

2

$2\cdot3\cdot?$

2

Всего 18-ти значных чисел $9\cdot10^{17}$

~~$2\cdot3$~~

~~$2\cdot3\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1$~~

$2\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot2^{12}\cdot3^{1}$

2^{13}

$2\cdot1^{5}\cdot2^{11}=2^{12}$

$1^{5}\cdot2^{12}\cdot1=2^{12}$

$2\cdot2^{9}\cdot1^{6}\cdot2\cdot1=$

$\log_2 2^{1}=2$

$\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ $\log_{2^{-2}}2^{-1}=\frac{1}{2}$

$\log_3 \frac{1}{4}$

$\log_{x+3}$

Задание №5

$\sqrt{x+3}-x \geq x+5$

$\log_a b \geq 1$

$\sqrt{x+3}-x=x+5$

$\sqrt{x+3}=2x+5$

$2x+5=x+3$

$4x^2-19x-22=0$

$\sqrt{x+3}-x \geq (x+5)$

$\log_{5^{-1}}125=3$

$\log_{5^{-1}}5^{125}=3$

№5

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\geq1$ ОДЗ $x\geq-3$

$a^{\log_a b}=b$ $\log_a b\geq1$

$x+5\geq\sqrt{x+3}-x$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}$

$2x+5\geq\sqrt{x+3}$

$\log_{5^{-1}}125$

$4x^2+20x+25=x+3$

$5^{-125}\geq3$

$4x^2+19x-22=0$

$D=361+352=713$ $\sqrt{713}$

$x_{1,2}=\frac{-19\pm\sqrt{713}}{8}$

$\begin{array}{r}27\\ \times27\\ \hline 189\\ 54\\ \hline 729\end{array}$

$\begin{array}{r}26\\ \times26\\ \hline 156\\ 52\\ \hline 676\end{array}$

$\begin{array}{r}88\\ \times4\\ \hline\end{array}$

$x\in[-3;+\infty)$

$|\sqrt{x+3}-x|\geq|x+5|$