

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

1-015

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

$$y = x^2 ; y = 169 ; y = 64 ; y = 9 ; a - ? \text{ при } \alpha = 120^\circ$$

Надо, чтобы получился треугольник.

Если треугольник получится, то будет работать теорема косинусов.

$$\text{И получаем: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 120^\circ = \\ = b^2 + c^2 + bc$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos 120^\circ = -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$$

1) $y = x^2$ (парабола, ветви направлены вверх)

$y = 169$ (прямая)

По усл. графики пересекаются, зн. $x^2 = 169$

$$x = \pm 13, \text{ значит}$$

длина отрезка из графика $y = 169$ равна $26 (2 \cdot |\pm 13|)$.

Аналогичным способом можно найти длину отрезка из другого графика $y = 64$. И она будет равна $16 (x^2 = 64; x = \pm 8)$

Аналогично и с графиком $y = 9$.

$$\text{Длина отрезка} = 2\sqrt{9}$$

Подставляем полученные данные в теорему косинусов и получаем:

$$(2\sqrt{a})^2 = 26^2 + 16^2 + 26 \cdot 16 \cdot \pi$$

$$4a = 676 + 256 + 416 = 1348$$

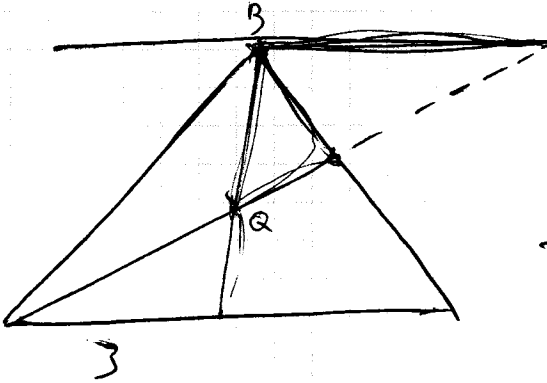
$$a = \frac{1348}{4} = 337$$

Ответ: $a = 337$

Задача №3

Найти кол-во 18-значных чисел, содержащих только цифры "0"; "5"; "9" (каждая цифра должна встречаться хотя бы 1 раз), таких, что цифра "5" ровно шесть, и они идут подряд.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$BQ = \frac{7x}{4}$$

$$\frac{QK}{QF} = \frac{QB}{QO}$$

$$QK \cdot QO = QB \cdot QF$$

$$\frac{QK}{QB} = \frac{QO}{QF}$$

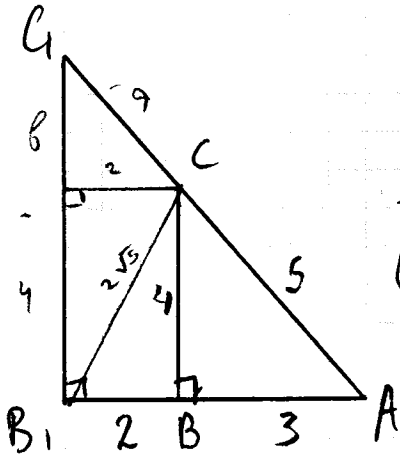
$$\frac{9}{7x} = \frac{QO}{QF}$$

$$\frac{QO}{QF} = \frac{36}{7x}$$

$$QF = \frac{7x \cdot QO}{36}$$

$$BC^2 = 16 = AB^2$$

MFTI



$$a^2 - b^2 = (2\sqrt{5})^2 - 4^2$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 20 - 16 = 4 \\ (a+5)^2 = (b+4)^2 + 5^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ a^2 + 10a + 25 = b^2 + 8b + 16 + 25 \end{cases}$$

$$a = \sqrt{4 + b^2}$$

$$4 + b^2 + 10\sqrt{4 + b^2} = b^2 + 8b + 16$$

$$10\sqrt{4 + b^2} = 8b + 12$$

$$5\sqrt{4 + b^2} = 4b + 6$$

$$4 + b^2 = \frac{16b^2 + 48b + 36}{25}$$

$$100 + 25b^2 - 16b^2 - 48b - 36 = 0$$

$$9b^2 - 48b + 64 = 0$$

$$D = k^2 - ac = 24^2 - 9 \cdot 64 = (3 \cdot 2^3)^2 - 3 \cdot 2^6$$

$$= 3^2 \cdot 2^6 (3 - 1)$$

$$= 3 \cdot 2^7 = 128 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ 18 \\ \hline 184 \\ 184 \\ \hline 368 \end{array}$$

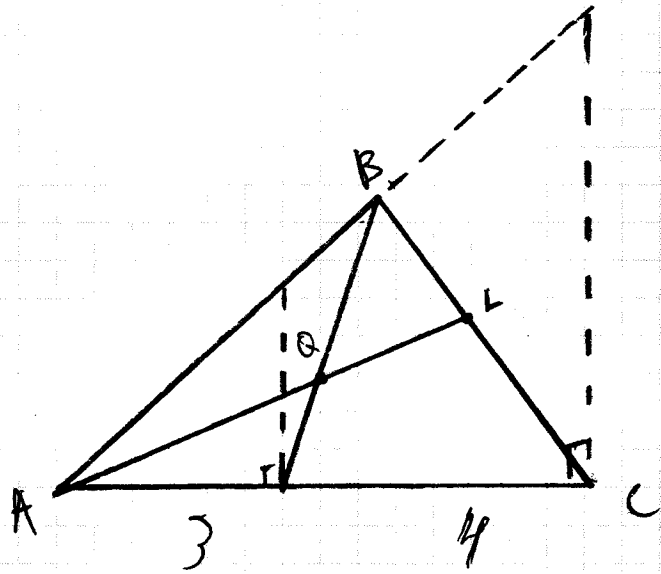
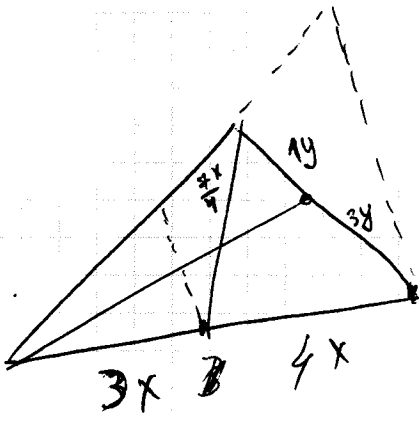
$$\begin{array}{r} 1234 \\ \cdot \dots 55 \\ \hline 90 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1234 \\ \cdot \dots 55 \\ \hline 900 \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12345 \\ \cdot \dots 55 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 334. \quad 900 \\ \quad 990 \\ \quad 999 \\ \hline 909 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 990 \\ 999 \\ \hline 909 \end{array}$$



$$\frac{7x}{4} = \frac{1.8}{4.0y}$$

$$1y = \frac{7x}{4}$$

$$4y = 7x$$

1 2 3

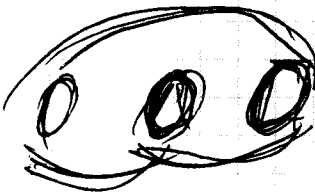
Δ□□


из 10 #аго 2

$$A_{10}^{20} = \frac{10!}{(10-2)!}$$

из 3 #аго 2

$$A_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

 = 3 = $A_3^2 = A_n^n = \frac{n!}{m!(m-n)!} = \frac{2!}{3!} =$

 = 6 $A_m^n = A_4^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 4!} = 15$

~~$\frac{3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$~~

$$\frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 2} = 6$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
 5 5 5 5 5 5

при 2 2
 3 6
 4 12

1 2 3 4 5 5 5 . . .	990 999 900 099 099 909 009 909	1900 1090 1990 1909 1099 1009	9000 9900 9990 0900 0990 0999 0090 0099 9099 0009 9009 9909
------------------------	--	---	--

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5 зн. $\begin{matrix} 90000 \\ 09000 \\ 00900 \\ 00090 \\ 00009 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 99000 \\ 09900 \\ 00990 \\ 00099 \\ 90009 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 99900 \\ 09990 \\ 00999 \\ 90099 \\ 99009 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 99990 \\ 09999 \\ 90999 \\ 99099 \\ 99909 \end{matrix}$

$= 20$ $(12 \cdot 11) \cdot 6 =$

4 зн. $\begin{matrix} 9000 \\ 0900 \\ 0090 \\ 0009 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 9900 \\ 0990 \\ 0099 \\ 9009 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 9990 \\ 0999 \\ 9099 \\ 9909 \end{matrix}$ $= 12$

$12 \cdot \binom{12}{n} \cdot (n-1)$
n - кол-во знаков

"5" стоит в начале

"5" стоит в конце

2 зн. 90
3 зн. 900; 990; 909
4 зн. 9000
5 зн. 90000

2 зн. 90
3 зн. $\begin{matrix} 900 \\ 990 \\ 909 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 900 \\ 090 \\ 009 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 990 \\ 099 \\ 909 \end{matrix}$ $= \frac{6}{2} = 3$

4 зн. $\begin{matrix} 9000 \\ 0900 \\ 0090 \\ 0009 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 9900 \\ 0990 \\ 0099 \\ 9009 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 9990 \\ 0999 \\ 9099 \\ 9909 \end{matrix}$ $= \frac{12}{2} = 6$

5 зн. $\frac{(n(n-1))}{2} = 2$

"5" стоит в сред-е

5 зн. $\begin{matrix} 90000 \\ 09000 \\ 00900 \\ 00090 \\ 00009 \end{matrix}$

12345 | 41, 42, 43, 44, 45 | 81-85 | 21-25 | 161-165

$12 \cdot 11 + (12 \cdot 11) \cdot 6 = (12 \cdot 11) \cdot (1 + 6)$ $140 \cdot 5 = 700$

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

$6 + 7 + 8 + 9 + 10$

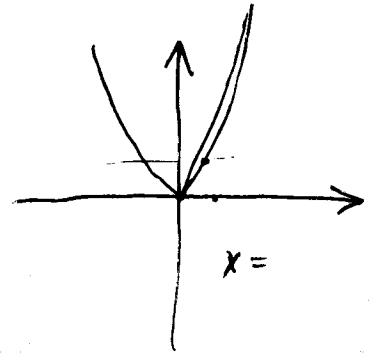
$\frac{12}{11}$
 $\frac{12}{11}$
 $\frac{12}{11}$
 $\frac{12}{11}$
 $\frac{12}{11}$
 $\frac{12}{11}$
 $\frac{12}{11}$
 $\frac{12}{11}$
 $\frac{12}{11}$
 $\frac{12}{11}$

53H. 55590 55900 55009 55090 55990 55099
05559 05590 95500 05509 05599 95509
90555 00559 90550 90550 90559 90550
90055 90055 09055 99055 09955

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ$
 $c^2 = a^2 + b^2 + ab$

$-\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$



$y = x^2$

при $x = 1$ $y = 1$ S

$$\begin{array}{r} 676 \\ 416 \\ \hline 256 \\ \hline 1348 \end{array}$$

$x^2 = 1$ $x = \pm 1$

$x^2 = 9$ $x = \pm 3$

$x^2 = 169$ $x = \pm 13$ $S = 26$

$x^2 = 64$ $x = \pm 8$ $S = 16$

$x^2 = 9$ $x = \pm \sqrt{9}$ $S = 2\sqrt{9}$

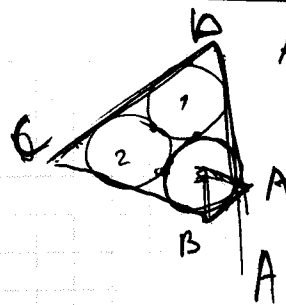
$$\begin{array}{r} 16 \\ \hline 16 \\ 96 \\ \hline 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

$4a = 26^2 + 16^2 + 26 \cdot 16 = 676 + 256 + 416 = 4a = 1348$

$a = \frac{1348}{4} = 337$

$$\begin{array}{r} 26 \\ 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

4



$AD + BC - AB - CD = 10$

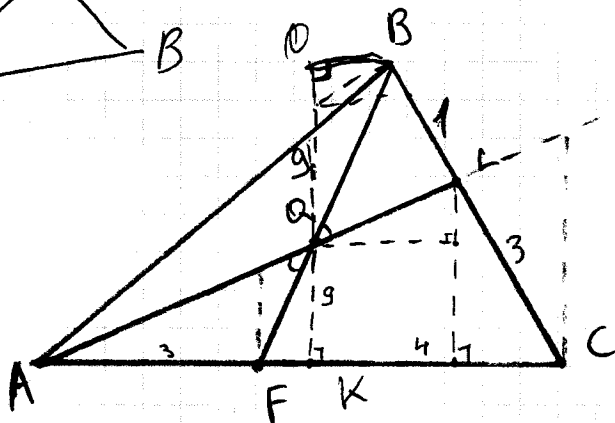
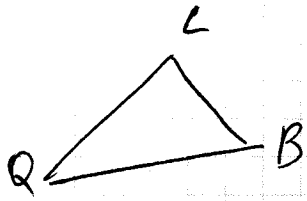
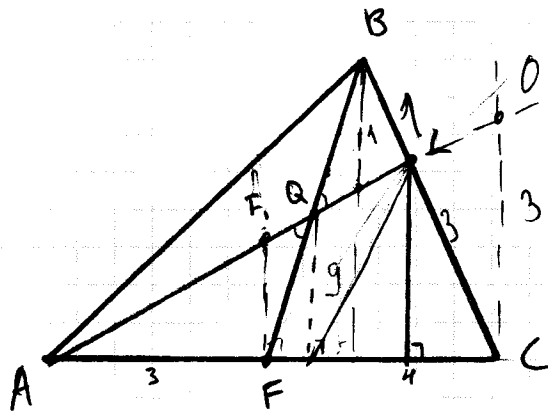
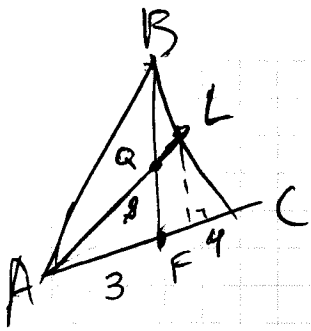
$AD + BC = 10 + AB + CD$

$\log_2 3 = 8$
 $\log = 3$

$\log_2 8 = 3$

$$\begin{array}{r} 26 \\ 16 \\ \hline 156 \\ 26 \\ \hline 416 \end{array}$$

$001 = 5 \cdot 041$
 $009 = 5 \cdot 021$
 $007 = 5 \cdot 08$
 $002 = 5 \cdot 04$
 $0 = 5 \cdot 0$



$$\frac{AF}{FC} = \frac{3}{4} \quad \frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$$

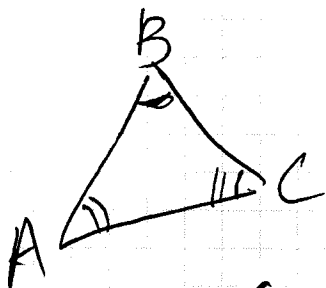
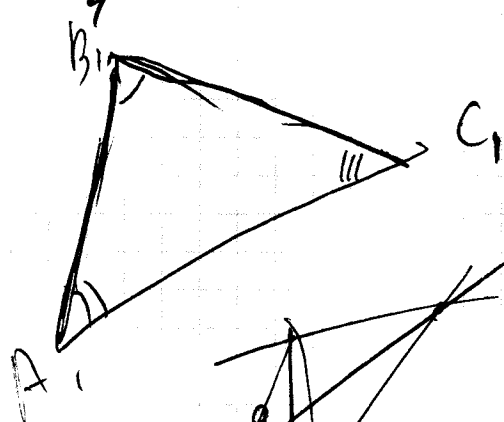
$$4x + OC^2 = AO^2$$

$$3x^2 + FF_1^2 = AF_1^2$$

$$AC = 7x$$

$$BQ = \frac{7x}{4}$$

$$AB^2 =$$



$$S_{ABC} \sim S_{A_1B_1C_1}$$

$$\frac{9}{\sin A} = \frac{3x}{\sin K}$$

$$\frac{BC}{\sin A}$$

$$\frac{AL}{AC} = \frac{3}{4}$$

$$AK^2 = 81 + 9x^2$$

$$AB^2 = BC^2 + 16x^2$$

$$KB^2 = x^2 + BO^2$$

$$\sqrt{KB^2} = \sqrt{x^2 + 9}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1-015

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)