

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

1-016

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = 2x^2$  пересекает прямые  $y = 98$ ,  $y = 18$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом  $120^\circ$ ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$ .
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
  - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 12$ .
  - б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
  - в) Пусть дополнительно известно, что  $AO \cdot BO = 58$ . Найдите  $AB$ .
5. Решите неравенство  $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$ .
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 2 : 5$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $5 : 12$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 45]$ ,  $[46; 90]$ ,  $[91; 135]$ ,  $[136; 180]$ ,  $[181; 225]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?



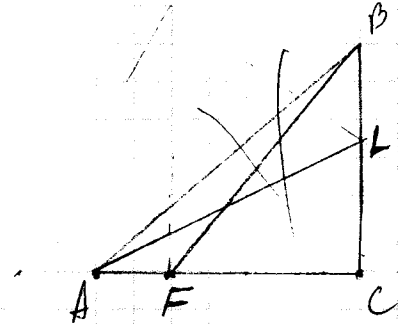
- 1 { 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27
- 2 { 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45
- 3 { 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69
- 4 { 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91
- 5 { 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109
- 6 { 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130
- 7 { 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146
- 8 { 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168
- 9 { 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191
- 10 { 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225

$$2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 17 + 46 + 48 + 52 + 53 + 54 + 55 + 91 + 101 + 102 + 103 + 104 + 106 + 136 + 137 + 138 + 139 + 140 + 141 + 182 + 183 + 184 + 185 + 186 + 187 = 20 + 30 + 50 + 60 + 66 + 190 + 200 + 260 + 280 + 310 + 325 + 368 + 187 = 500 + 900 + 515 + 555 = 1055 + 900 + 155 = 2490$$

$$\begin{array}{r}
 190 \\
 + 187 \\
 \hline
 377 \\
 + 293 \\
 \hline
 670
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 190 \\
 + 260 \\
 \hline
 450
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 325 \\
 + 368 \\
 \hline
 693
 \end{array}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№ 7 [1; 45] [46; 90] [91; 135];  
[136; 180]; [181; 225]. по 6 ~~этап~~ <sup>этап</sup>.

$$(b-a) \% 45$$

$$(b-a) : (5 \cdot 9)$$

$$b-a \neq \begin{cases} \dots 5 \\ \dots 0 \end{cases}$$

Т.к. сумма шифров по возрастанию по  
сумма. кол. чисел.

$$\begin{aligned} & \underline{1+2+3+4+5+6} + \underline{46+47+48+49} + \underline{50+51+52+53+54+55} + \underline{91+92+93+} \\ & \underline{94+95+96} + \underline{136+137+138+139+140} + \underline{141+142+143+144+145} + \underline{181+182+183+} \\ & \underline{184+185+186} + \underline{220+221+222+223+224+225} + \underline{260+261+262+263+264+265} + \\ & \underline{300+301+302+303+304+305} + \underline{340+341+342+343+344+345} + \underline{380+381+382+383+384+385} = \\ & = 20+100 + 140 \cdot 5 + 200 \cdot 2 + 320 \cdot 2 + 322 \cdot 2 + 235 + 190 = \\ & = 20+100 + 420 + 400 + 640 + 644 + 235 + 190 = \\ & = 5 \cdot 100 + 1040 + 644 + 425 = 1040 + 540 + 1065 = 2645 \end{aligned}$$

из 1-60 в возрастании [1, 2, 3, 4, 5, 6].  
из 2000 [46, 48, 52, 53, 54, 55].

**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**

№ 3. К-во 17-значных чисел "0", "7", "8"

"8" - 7 раз подряд.

~~abcde f g h i j k l m n o p q r s~~

1) ~~abc~~  $a \neq 0$

~~1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17~~  
~~1 7 0 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 0~~

когда 8 = ~~7~~ 7 ум.

- 1) 7000000000088888888 1
- 4) 70000000000788888888 9
- 3) 700000000007788888888 36
- 4) 7000000000077788888888 87
- 5) 700000000777788888888 91
- 6) 7000007777788888888 85
- 7) 700077777788888888 56
- 8) 700777777888888888 48

$38 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$   
 $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 4 + 3 + 2 + 1 + 3 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 = 10 + 20 + 10 + 10 + 10 + 10 + 7 = 87$

$602 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 4 + 3 + 2 + 1 + 3 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 4 + 3 + 2 + 1 + 3 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 5 = 85$

$5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 4 + 3 + 2 + 1 + 3 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 4 + 3 + 2 + 1 + 3 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 3 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 5 = 85$

$4 + 3 + 2 + 1 + 3 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 3 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 2 + 3 + 1 + 1 = 10 + 10 + 10 + 5 = 35$

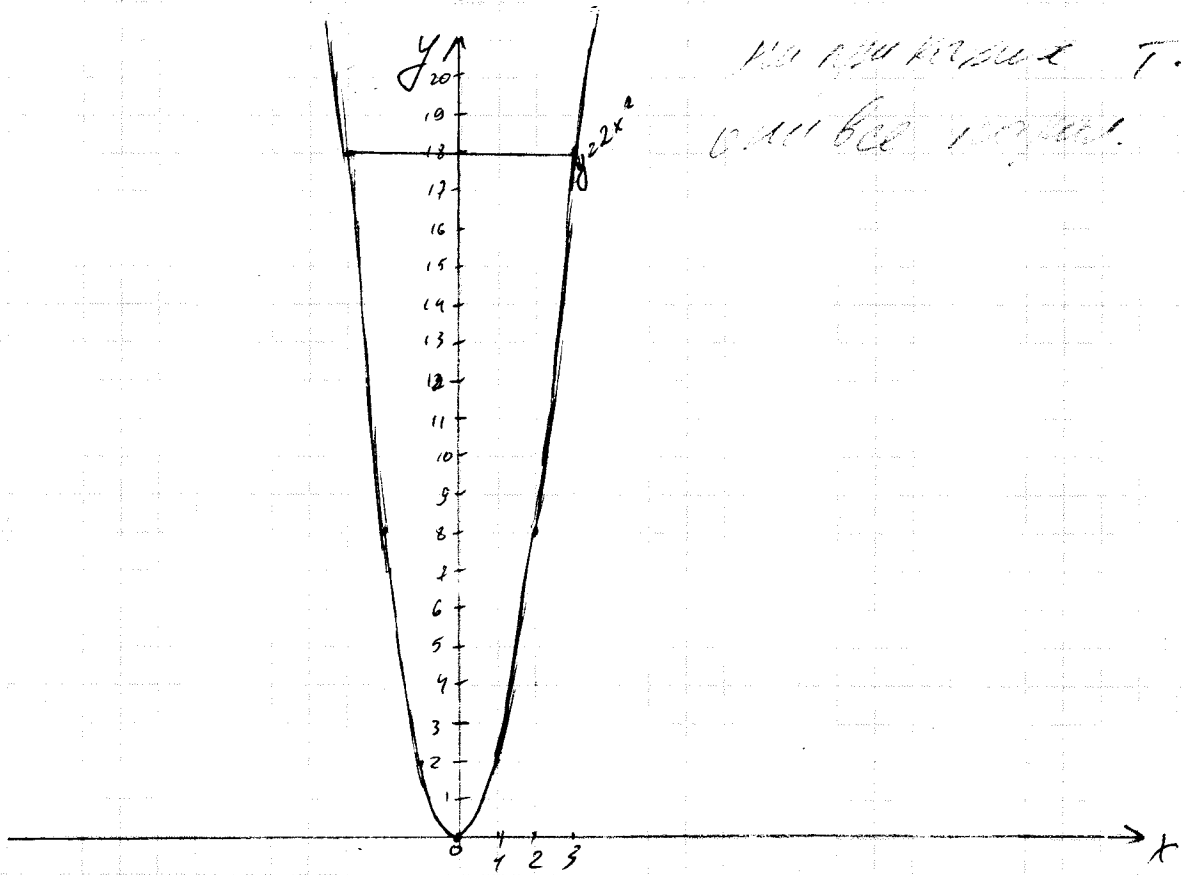
$3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 = 7 \cdot 6 + 6 =$

$$\sqrt{402 \cdot 10} = 4020$$

Ответ: 4020

98

1.3.

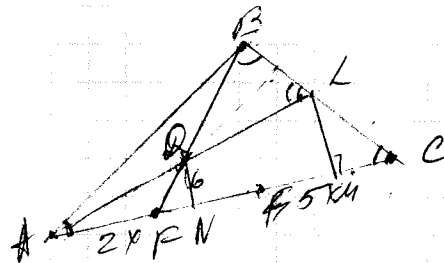


на рисунке Т.К  
ошибки нет.

1.5  $\log_{x+2-x}(x+4) \geq 1$

1.6

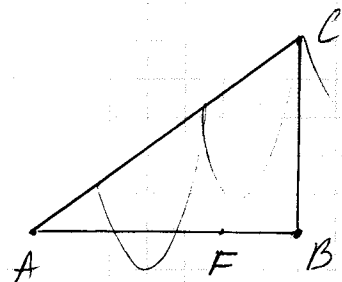
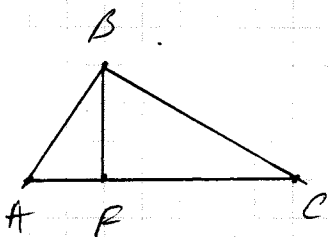
$$\frac{S_{\triangle BQL}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{5}{12}$$



$$|QN| = 6; |LM| = 9$$

Ф.Ф.  $\triangle ABC \sim \triangle BQL$   
 $\triangle AQN \sim \triangle ALM$

~~$$\frac{2-x}{5-x} = \frac{6-5}{2} = 30$$~~



**ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА**

№3

австралийский импортёр,  $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \dots$  где  $10^0 = 1$  раз.

0 - первая быль не может, тогда.

700000000088888888	1
700000000088888888	9
70000000007788888888	36
70000000007788888888	37
7000000000777788888888	87
700000000077777788888888	95
700000000077777788888888	85
700077777777778888888888	36
707777777777778888888888	48
777777777777778888888888	1

вычисления с гербов

раз  $10^0$  может стоять  $10$  раз

T.O.  $10(1+9+36+37+87+95+85+36+48+1) =$

$= 10 \cdot 402 = 4020$

№7

$(b-a) \cdot 45$

$(b-a) \cdot (9 \cdot 5)$  т.е. ни одна разность не даёт.

на разности ~~ни~~ на 9 и на 5. одно в разности.

из 1-го возьмём: 2, 3, 4, 5, 6, 17

из 2-го: 46; 48; 52; 53; 54; 55.

из 3-го: 136; 137; 138; 139; 140; 141

из 4-го: 95; 105; 102; 103; 104; 106

из 5-го: 182; 183; 184; 185; 186; 187.

Тогда их сумма будет минимальной:

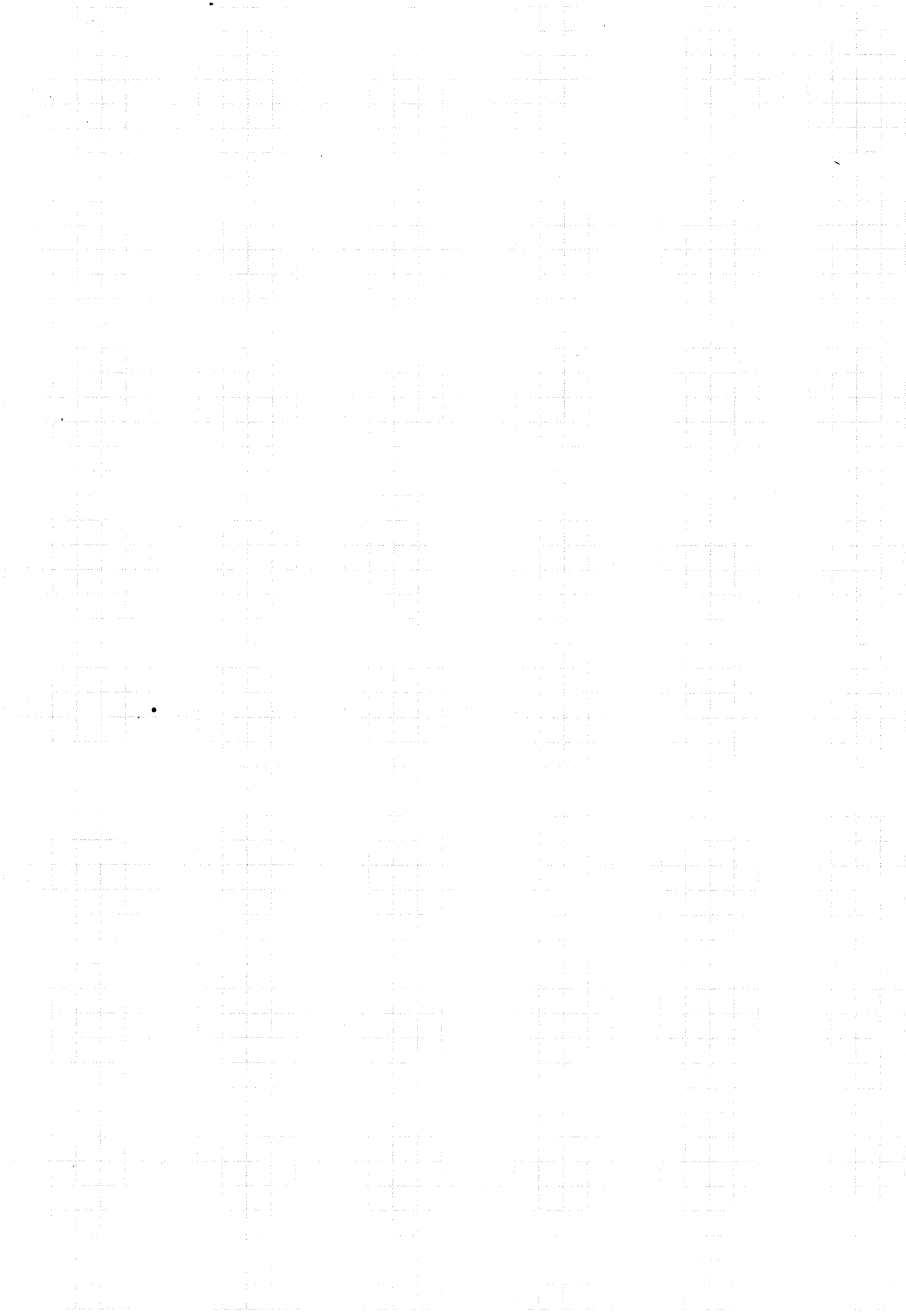
$2+3+4+5+6+17+46+48+52+53+54+55+136+137+138+$

$$\begin{aligned}
 &+ 139 + 140 + 141 + 91 + 101 + 102 + 103 + 104 + 141 + 182 + 183 + 184 \\
 &+ 185 + 186 + 187 = 20 + 50 + 50 + 60 + 60 + 190 + 300 + 260 + 280 + \\
 &+ 310 + 310 + 325 + 368 + 187 = 500 + 500 + 900 + ~~450~~ 793 + \\
 &+ 327 = 1170 + ~~450~~ 700 = 2870
 \end{aligned}$$

Итого: 2870.



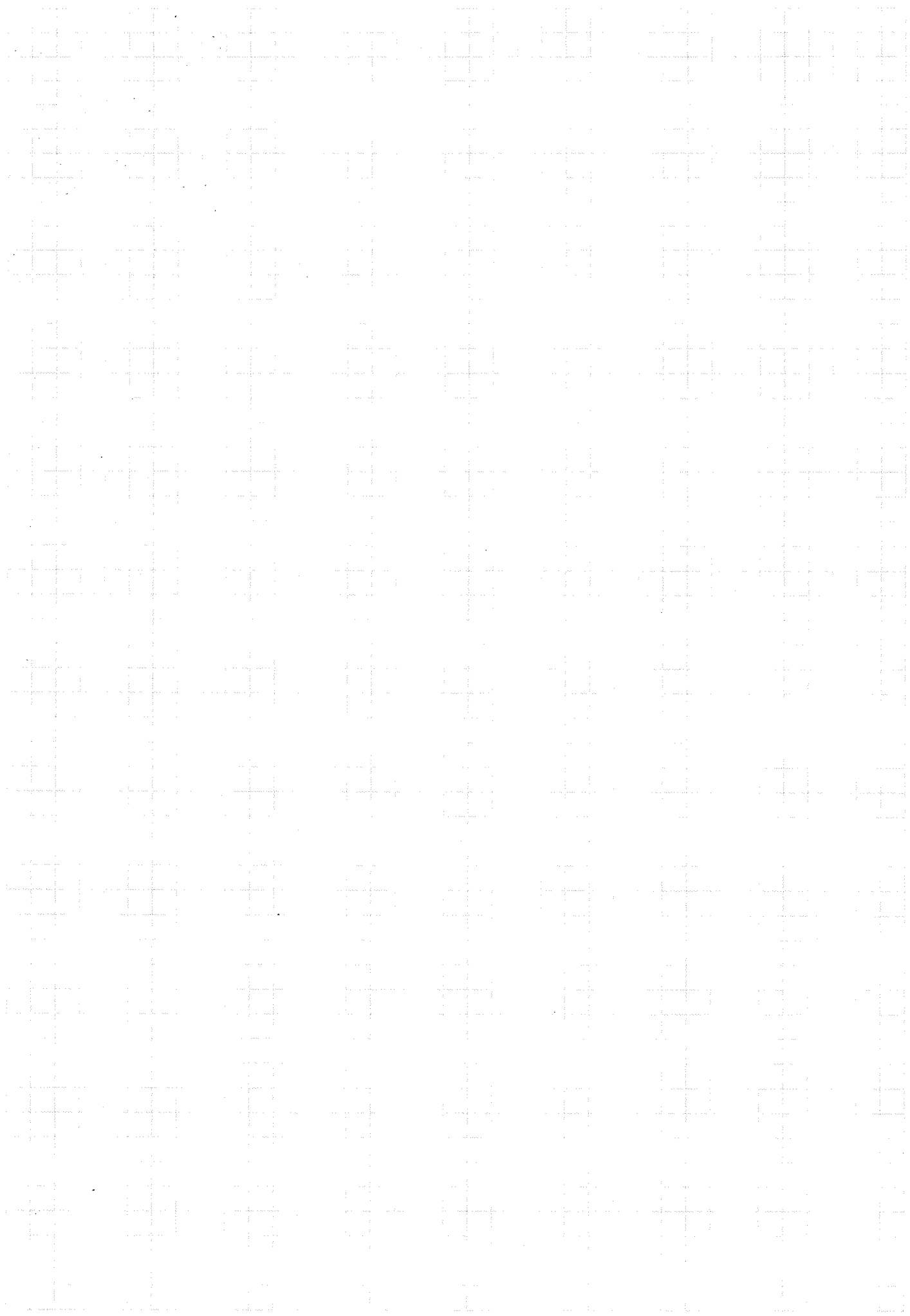




черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)