МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР 1-С17

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

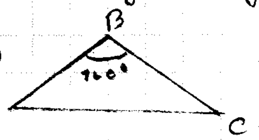
① Дано: $y=x^2$, $y=169$, $y=64$, $y=a$. $y=x^2$ высекает из этих прямых отрезки. При каких значениях a из этих трех отрезков можно составить треугольник с углом $120°$.

Решение:

Парабола $y=x^2$ высекает из прямых отрезки $2\sqrt{169}$ и $2\sqrt{64}$ и $2\sqrt{a}$

Возможны три случая, при которых один из углов треугольника будет равным $120°$.

Пусть дан $\triangle ABC$, тогда

1) 

$\angle B = 120°$
$|AB| = 2\sqrt{169} = 26$
$|BC| = 2\sqrt{64} = 16$
$|AC| - ?$

По теореме косинусов:
$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + 2|AB|\,|BC|\cos 120°$
$|AC|^2 = 26^2 + 16^2 + 2\cdot 26\cdot 16\cdot(-\frac{1}{2}) = 676 + 256 + 392 = 540$
$|AC|^2 = 4a \Leftrightarrow 540 = 4a \Rightarrow a = 133$

2) $|AB| = 26$
$|BC| - ?$
$|AC| = 16$

По теореме косинусов:
$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + 2|AB|\cdot|BC|\cos 120°$
$16^2 = 26^2 + |BC|^2 + 2\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 26|BC|$
$256 = 676 + |BC|^2 - 26|BC|$
$|BC|^2 - 26|BC| + 420 = 0$
$D = 26^2 - 4\cdot 420$
$D < 0$
$|BC| \in \varnothing$

3) $|AB| - ?$
$|BC| = 16$
$|AC| = 26$

По теореме косинусов:
$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + 2|AB|\cdot|BC|\cos 120°$
$26^2 = |AB|^2 + 16^2 + 2\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 16|AB|$
$676 = |AB|^2 + 256 - 16|AB|$
$|AB|^2 - 16|AB| - 420 = 0$
$D = 16^2 + 4\cdot 420 = 1936$

$|AB|^2 = 4a \Rightarrow a = \frac{1936}{4} \Leftrightarrow a = 484$

Следовательно, при $a = 484$ или $a = 133$ можно составить треугольник из высеченных отрезков параболой $y=x^2$ на прямых $y=169$, $y=64$, $y=a$

Ответ: $a = 484$; $a = 133$

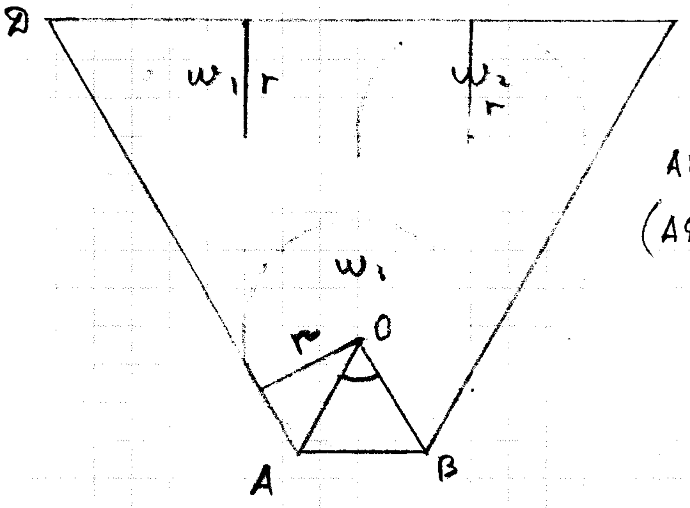
④ Дано: ABCD − четырехугольник. $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ − окр., $r_1 = r_2 = r_3 = r$.
ω_1 касается [AD] и [DC], ω_2 касается [DC] и [CB], ω_3 кас-ся [CB],[BA],[AD].
ω_1, ω_2 и ω_3 касаются попарно.

а) найти r, если $|AD| + |BC| - |AB| - |CD| = 10$

б) Найти $\angle AOB$, где O − центр окр. ω_3

в) Пусть $|AO| \cdot |BO| = 42$. Найти $|AB|$

Решение:



Т.к. у окружностей равные радиусы, то четырехугольник ABCD − равнобедренная трапеция.
(AD = BC)

~~③ X X X X X X X X X X X X 5 5 5 5 5 5 X X X X X X X X X X X X~~

~~18 значное число~~

~~Посчитаем сначала количество 17-зн~~

③

X X X X X X X X X X X X 5 5 5 5 5 5 X X X X X X X X X X X X

Это число можно ~~едино~~ получить

12^{12} ~~(12+11+10+...+1)~~ способами в 12-ти разных местах.

Нужно исключить случаи когда это 18-значное число начинается с нуля.

Тогда количество 18-значных чисел равно:

$12^{12}\cdot 12-12^{2} = 12^{2}(12^{11}-1)$ чисел.

Ответ: $12^{2}(12^{11}-1)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(5) Решить неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{x+3}-x > 0 \\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 > x^2 \\ x+3 \neq (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-3 < 0 \\ x^2+x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \\ x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$

(7) $\underset{(1)}{[1;35]}, \underset{(2)}{[36;70]}, \underset{(3)}{[71;105]}, \underset{(4)}{[106;140]}, \underset{(5)}{[141;175]}$

По 5 цифр из каждого промежутка.

$a-b \,\not\vdots\, 35$

$a-b \,\not\vdots\, 5 \cdot 7$

a - люб. из 25 выбр. цифр, b - люб. из 25 выбр. цифр, исключая a.

Как. наименьшее значение может принимать сумма этих 25 чисел?

S - ?

Решение.

(5) из последнего пром-ка: 141 142 143 144 145

из пром-ка (4): 111, 112, 113, 114, 115

из пром-ка (3): 81, 82, 83, 84, 85

из пром-ка (2): 41, 42, 43, 44, 45

из пром-ка (1): 1, 2, 3, 4, 5.

} ~~Наименьшие~~ Числа при которых сумма выбранных чисел наименьшая.

$S = 715 + 565 + 415 + 215 + 15 = 1925$

Ответ: 1925

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1-С17

ШИФР

(заполняется секретарём)

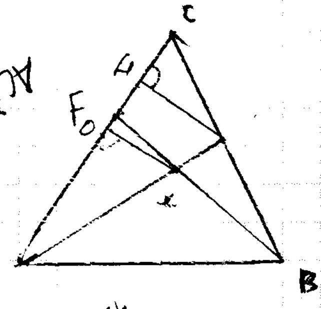
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

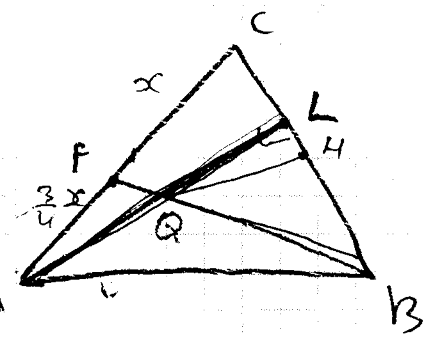
6) Дан: ΔABC, $F \in AC$, $L \in BC$

$\frac{AF}{FC} = \frac{3}{4}$; $[BF] \cap [AL] = Q$

$\frac{S_{\Delta BQL}}{S_{\Delta BAC}} = \frac{1}{16}$, $|LH|$ - ?

$|QO| = 9$



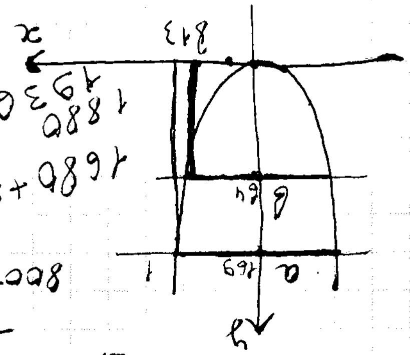


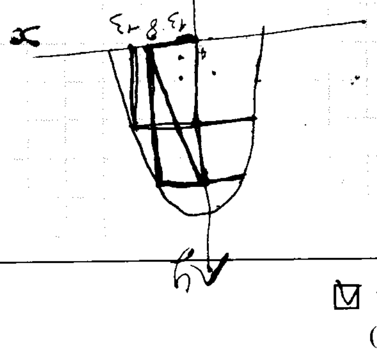
Решение:

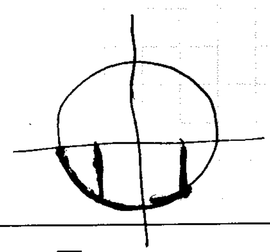
1) $\frac{AF}{FC} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow AF = \frac{3}{4} FC$

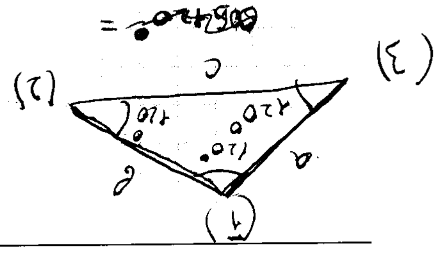
$S_{\Delta BQL} = \frac{1}{2} BL \cdot QH$

$S_{\Delta BAC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH_1$









☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

3) наш | число: 8 значное = 95555550
9055555 } 9 случае

~~9зн: 9555555~~

~~9значн:~~ 555555

*********555 555************

~~8значн: 4 случае~~
~~9значн: 9 случаев~~
10знач:

8значн: 4 случая
9значн: 3·4
10значн: 3·5+3·4+4
11значн: 3·6+3·5+3·4+4
12знач: 3·7+3·6
13 8
14 9
15 10
16 11
17 12
18 13

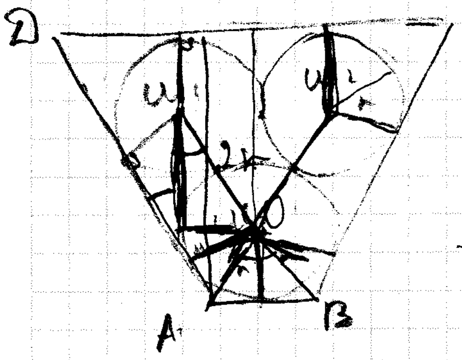
$3(4+5+6+7+8+9+10+11+12+13)+4$ случаев.

~~70·3~~ $3\cdot 76+4=210+18+4$ 232 Ответ: 232

4) Если 65-ой стоит в начале:
8значн: 2 случ.
9значн: 4 случ
10значн:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$



а) найти r, если $AD+BC-AB-CD=10$

б) ~~AD=BC~~ AOB, O цен ω (AB)

в) $AO \cdot BO = 42$, найти AB

Решение:

ABCD - равноб. трапец.

$AD = BC$; $AB = \frac{1}{3} CD$

~~2AD − AB − CD = 10~~

$2AD - \frac{4}{3} CD = 10$ $\quad AB + CD = 2AD - 10$

$AD - \frac{2}{3} CD = 5$

$AD = 5 + \frac{2}{3} CD$

$AD = \frac{10 + AB + CD}{2}$

$S_{трап} = AH \cdot \frac{DC + AB}{2}$

$S_{трап} = AH(AD - 5)$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 0$

ОДЗ $\sqrt{x+3}-x>0$; $\sqrt{x+3}-x \neq 1$

$\sqrt{x+3}>x$

$x+3>x^2$

$x^2-x-3<0$

$D=1+4\cdot 3=13$

$x=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$

$x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$

$x+3 \neq x^2+2x+1$

$x^2-x-2 \neq 0$

$D=9$

$x=\frac{1+3}{2}=2$

$x=\frac{1-9}{2}=-4$

$x \neq 5 \quad x \neq -4$

$(\sqrt{x+3}-x-(x+5))$

$x^2+x-2 \neq 0$

$\frac{-1+3}{2}=1$

$\frac{-1-3}{2}=-2$

$D=1^2+4\cdot 3=13$

$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$; $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$

$(\sqrt{x+3}-x)^{1}=x$

$35=1+2+3+4+25 \;\vdots\; 35$

$36+37+38+39+25 \;\vdots\; 35$

$(a-b)(ab-b)$

$\log_3 8=x$

$3^x=8$

$\sin 7x \cos 2x+\sin 2x \cos 7x$

$\sin 7x=\sin(7x+2x)$

120+30

150

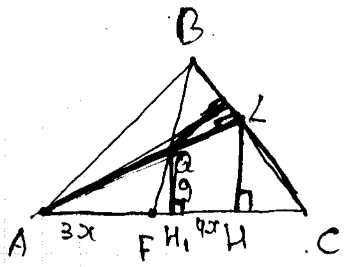
$35+35+35+35=175$

1 ; 2 ; 3

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1-017
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$S_{\triangle BQL} = \frac{1}{2} BL \cdot QL$

$S_{\triangle BAC} = \frac{1}{2}(BL + LC) \cdot AL$ BC

$\frac{S_{\triangle BQL}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{BL \cdot QL}{BC \cdot AL} = \frac{1}{16}$

$\frac{QL}{AL} = \frac{BC}{16\,BL} =$

$AF = 3x$

$FC = 4x$

$S_{\triangle BQL} =$

$\frac{BL}{LC} = \frac{3}{4}$ $LC = \frac{4}{3} BL$

$\frac{\cancel{BL} \cdot QL}{\frac{7}{3}\cancel{BL} \cdot AL} = \frac{1}{16}$

$\frac{QL}{AL} = \frac{7}{48}$

$AQ = AL - QL$

$AL = \frac{48\,QL}{7} - QL$

$AQ\ \frac{41}{7} QL$

$AQ = \frac{41}{7} \cdot \frac{7\,AL}{48}$

$AQ = \frac{41\,AL}{48}$

$\frac{AQ}{AL} = \frac{41}{48}$

$LH = \frac{48}{41} \cdot 9 =$

XXXXXXXXXXXSSSSSSXXXXXXXXXXXXXXXX

12

Выразим способ в 12 разные элемент

$12(12+11+10+9+8+7+6+5+4+3+2+1) - 1$

$12^{13} - 12$

$12(12^{12} - 1)$

$-1($

~~xxxxx~~ x x x x x x 5 5 5 5 5 x x x x x x ~~xxxxx~~

нам число 8 значное : 4

9 знач : $3 \cdot 3 + 5$

10 знач : $3 + 3 \cdot 5 + 5 + 5$

11 знач : $\cancel{3}$ 6

x x x x x x x x x x x 5 5 5 5 5 5 x x x x x x x x x x x x

$\underbrace{xxxxxxxxxxx}_{11}$

~~9 18~~

Т.к. первая цифра (если это не 5) должна начинаться с 9, то ~~...~~ ост. способы

$(11+22)^2 + 9 \cdot$

$33^2 +$

$11^2 \cdot 9^2 \cdot 10^2 \cdot \cancel{9 \cdot 10} + \cancel{12^2 \cdot 11 \cdot 10} -$

12^2

~~$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2$~~

~~$(11^2 + 10^2 + 9^2 + 8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 12$~~

~~$1 \quad 12^{11} + 11^{11} + 9^{9} + 10^{10} + 8^{8} + 6^{6}, 7$~~

~~$\underbrace{11^2 + 10^2 + 9^2 + 8^2 + 7^2 + 6^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2}$~~

$(11 + 10 + \ldots + 1) 11 + (10 + 9 + 8$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)