МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР 1-C19

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120°?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1 - С19

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Дано: $y=x^2$, $y=169$, $y=64$, $y=a$, $\angle\alpha=120^\circ$

Составить $\triangle ABC$ с $\alpha=120^\circ$

Найти: ~~$\angle\alpha$~~ a

Решение

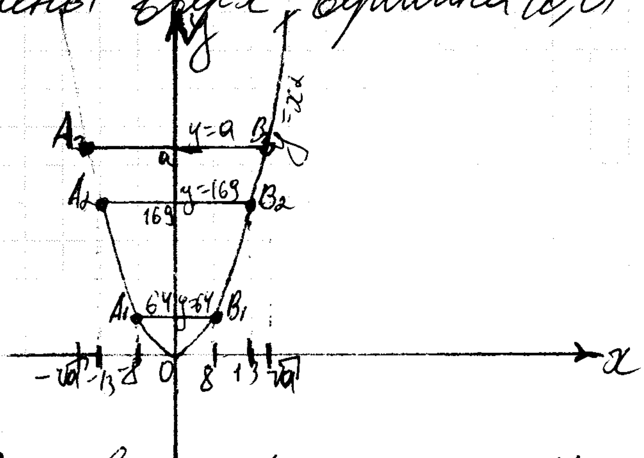
Построим графики функций:

$y=x^2$ - парабола, ветви направлены вверх, вершина $(0;0)$

$y=169$ - прямая $\parallel Ox$

$y=64$ - прямая $\parallel Ox$

$y=a$ - прямая $\parallel Ox$



$y=x^2$: $y=169 \Leftrightarrow x=13$

$y=64 \Leftrightarrow x=8$

$y=a \Leftrightarrow x=\sqrt{a}$

$|A_3B_3|=2\sqrt{a}$; $|A_2B_2|=2\cdot13=26$

$|A_1B_1|=2\cdot8=16$

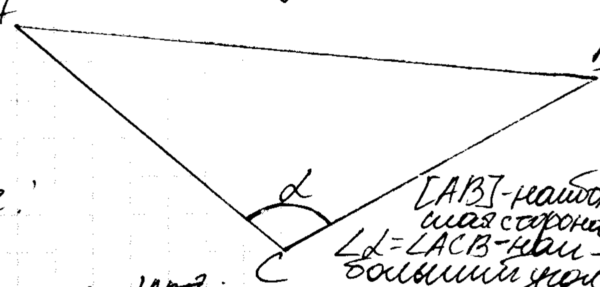
По св-ву треугольника: напротив большего угла лежит большая сторона

Мы имеем три отрезка для того, чтобы построить $\triangle ABC$, и 2 из них по св-ву тр-ка могут лежать напротив α - большего угла.

Это $[A_3B_3]$ и $[A_2B_2]$

Т.о. рассмотрим два случая.

Составим треугольник $\triangle ABC$:



$[AB]$ - наибольшая сторона. $\angle\alpha=\angle ACB$ - наибольший угол.

~~$\cos\alpha = |AB|^2$~~

$|AB|^2=|AC|^2+|BC|^2-2|AC||BC|\cos\alpha$

1) $[A_3B_3]$ - наибольшая сторона: $|A_3B_3|=|AB|$; $|A_1B_1|=|BC|$; $|AC|=|A_2B_2|$

По т. Косинусов: $\cos120^\circ=\cos\alpha=\dfrac{|A_2B_2|^2+|A_1B_1|^2-|A_3B_3|^2}{2|A_2B_2|\cdot|A_1B_1|} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos(180^\circ-60^\circ)=\dfrac{(2\cdot13)^2+(2\cdot8)^2-(2\sqrt{a})^2}{2\cdot26\cdot16} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}=\dfrac{\cancel{4}\cdot169+\cancel{4}\cdot64-\cancel{4}\cdot a}{2\cdot26\cdot\cancel{16}\,4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -104=233-a \Leftrightarrow a=337$

2) $[A_2B_2]$ - наибольшая сторона; $|AB|=|A_2B_2|$, $|BC|=|A_1B_1|$, $|AC|=|A_3B_3|$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №1

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$-\frac{1}{2}=\frac{\cancel{4}\cdot a+\cancel{4}\cdot 64-\cancel{4}\cdot 169}{2\cdot 2\sqrt{a}\cdot \cancel{16}_4}\Leftrightarrow -8\sqrt{a}=a+64-169\Leftrightarrow a+8\sqrt{a}-105=0$$

№1

По Т. Виета: $\left[\begin{array}{l}\sqrt{a}=-15\\ \sqrt{a}=7\end{array}\right.\Leftrightarrow \sqrt{a}=7\Leftrightarrow a=49$

Т.о. для того, чтобы составить треугольник с углом $120°$, параметр a должен быть равен 49 или 337

Ответ: $\{49;\ 337\}$

№3

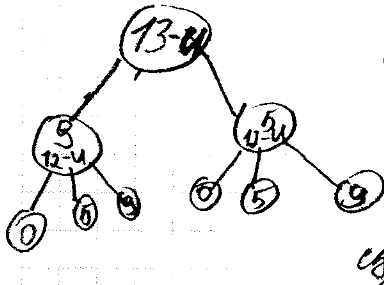
Шесть цифр „5", которые идут подряд можно заменить одной цифрой, тогда нам нужно будет составить 13-значное число.

Заменим шесть „5" на цифру „5".

Первыми ~~числами~~ цифрами могут быть „5" или „9"

Составим 12-ти значные числа, которые допустим могут начинатся с „0", „5" и „9":

$$A_{12}^{3}=\frac{12!}{(12-3)!}=\frac{12!}{9!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 8!}{9!}=132\text{-способа}$$



Отсюда видно, что 13-и значных чисел можно составить $132\cdot 6=792$-способами.

Т.о. и 13-ти значные числа из цифр „0", „5" и „9" можно составить 792 способами

Ответ: 792

№7

Нам дано 5 промежутков, из которых видно, что разность между соответствующими членами этих множеств делится на 35, т.е. 1-ый член промежутка $[1;35]$ и 1-ый член промежутка $[71;105]$ составляют разность, равную 70, а 70 делится на 35. Т.о., чтобы получить наименьшее значение суммы 25 чисел,

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1 - С29

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

нужно взять из 1-го промежутка первые 5 членов, из 2-го промежутка - вторые 5 членов, из 3-го - третьи 5 членов, из 4-го - четвертые 5 членов, из 5-го - пятые 5 членов:

1; 2; 3; 4; 5 - из 1-го промежутка [1; 35]
41; 42; 43; 44; 45 - из [36; 70]
81; 82; 83; 84; 85 - из [71; 105]
121; 122; 123; 124; 125 - из [106; 140]
161; 162; 163; 164; 165 - из [141; 175]

$S_{арп.} = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n \Leftrightarrow S_1 = \frac{2 + 1 \cdot 4}{2} \cdot 5 = 15$

~~$S_2 = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$~~

$S_2 = \frac{82 + 4}{2} \cdot 5 = 215$

$S_3 = \frac{162 + 4}{2} \cdot 5 = \cancel{332}\ 415$

$S_4 = \frac{121 \cdot 2 + 4}{2} \cdot 5 = \cancel{492}\ 615$

$d = S_2 - S_1 = 215 - 15 = 200$

$S_5 = \frac{161 \cdot 2 + 4}{2} \cdot 5 = 815$

$S_{об} = \frac{2 \cdot S_1 + 4d}{2} \cdot 5 = (S_1 + 2d) \cdot 5 = (15 + 800) \cdot 5 =$

$= 4025$

Ответ: 4025

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №3

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1 - С 19

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Дано: $y=x^2$, $y=169$, $y=64$, $y=a$, $\angle=120°$, треугольник ABC

Найти: a

Решение

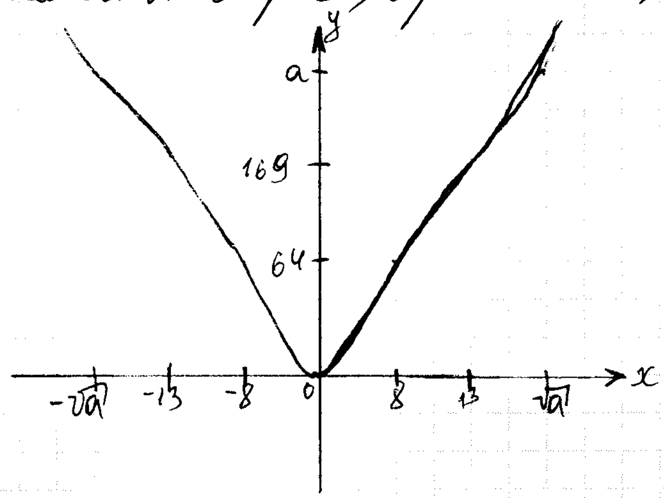
Построим графики функций:

$y=x^2$ - парабола, ветви направлены вверх, вершина $(0;0)$

$y=169$ - прямая $\parallel Ox$

$y=64$ - прямая $\parallel Ox$

$y=a$ - прямая $\parallel Ox$



☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

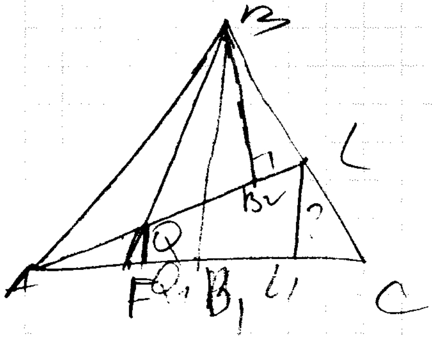
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

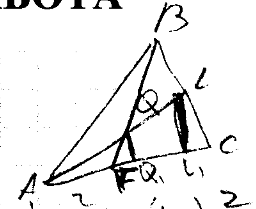
1-019

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





№6

$|QQ_1| = 9$

$S_{BAC} : S_{BQL} = k^2 = (4)^2$

$|AF| : |FC| = 3 : 4 \Rightarrow |AF| : |AC| = \frac{3}{7}$

$\triangle AQQ_1 \sim \triangle ALL_1$? $\frac{|QQ_1|}{|LL_1|} = \frac{9}{x}$

$\frac{|AQ_1|}{|AL_1|} = \frac{9}{x}$

$|AQ| : |AL| = 9 : x$

$S_{BQL} = \frac{|QL| \cdot |BB_2|}{2}$

$S_{ABC} = \frac{|BB_1| \cdot |AC|}{2}$

$\frac{|BB_1| \cdot |AC|}{|QL| \cdot |BB_2|} = 16$

$8\frac{3}{4}$

$\times\frac{332}{83}$

1 2 3 4 5 $S = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ №7 $\frac{2+4\cdot5}{2} = 15$ $S = \frac{2a_1 + 4(n-1)}{2} \cdot n$

1	2	3	4	5
41	42	43	44	45
81	82	83	84	85
121	122	123	124	125
161	162	163	164	165

$\times\frac{41}{5}$

$205 + 10 = 2\cancel{08}$ $S = \frac{2\cdot 41 + 4}{2} \cdot 5$ $\frac{n}{2}$

$43 \cdot 5 = 215$

~~2·81+~~

$S = \frac{4\cdot 5}{2} \cdot \frac{n}{2}(5d(n-1) + 2(a_1 + a_{41} + a_{81} + a_{121} + a_{161})$

$\times\frac{815}{5}$

$\times\frac{123}{4}$

492

$+123$

$61\cancel{5}$

$\times\frac{163}{5}$

815

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

1 - C.14

№2 найб. и наим. зн. ф.

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$\frac{1}{2}(\sin\frac{5x+9x}{2}$

$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \sin 2\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\sin 2\cdot\frac{\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$

$A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!}$

№3 $\frac{4!}{(4-3)!}$ $\frac{4!}{3!}$

$\frac{4!\cdot 3}{(4-2)!}$ $\frac{4!}{(4-2)!}$

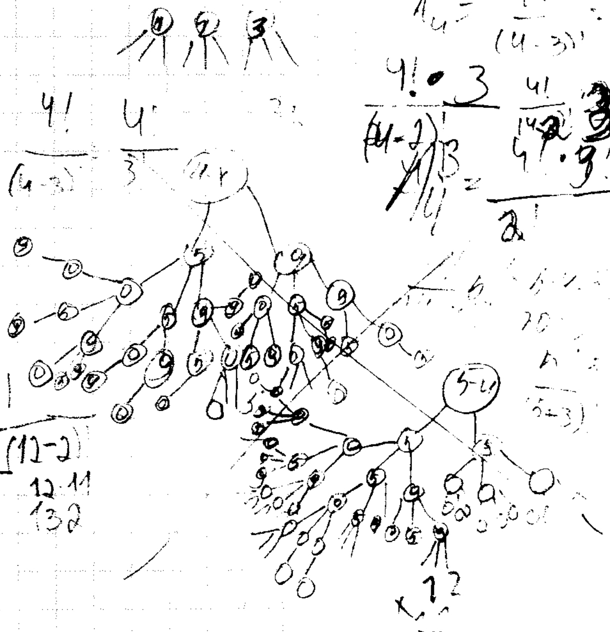
$A_4^3 = \frac{4!\cdot 3!}{2!}$

$A_n^k = A_{18}^3 = \frac{18!}{3!}$

A^6_{12} A^3 13

$A^3_{12}\ \frac{12!}{(12-3)!}$

$A_{11}^2 = \frac{11!}{(11-2)!} = 110$ $\frac{12!\cdot(12-2)}{110\cdot(4-1)!}$ $12\cdot 11 = 132$



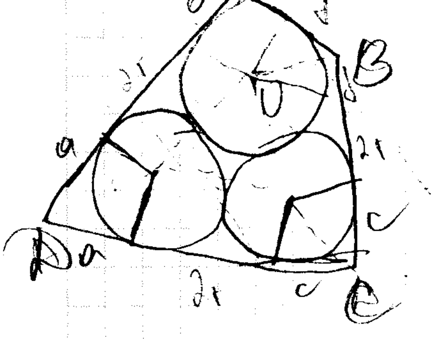
№4

$|AD| + |BC| - |AB| = \ldots$

$a+b+2r+d+c+2r-(b+d)-(a+c+2r)$

$a+b+d+c+4r-b-d-a-c-2r$

$r = 5$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

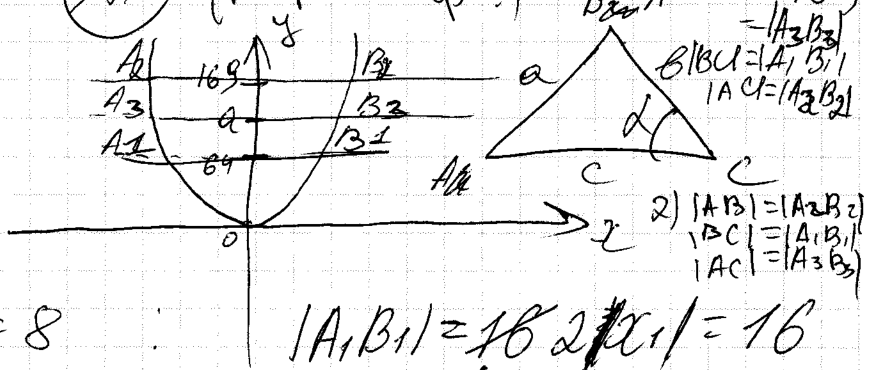
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. (параллелогр.?)

$y = x^2$
$y_1 = 169$
$y_2 = 64$
$y_3 = a$

$\triangle ABC$, $\angle\alpha = 120^\circ$



1) $|AB| = \cancel{169} = |A_3B_3|$
$|BC| = |A_1B_1|$
$|AC| = |A_2B_2|$

2) $|AB| = |A_2B_2|$
$|BC| = |A_1B_1|$
$|AC| = |A_3B_3|$

$y_1 = (8)^2 \Leftrightarrow x_1 = 8$: $|A_1B_1| = \cancel{16}\ 2|x_1| = 16$

$y_2 = (13)^2 \Leftrightarrow x_2 = 13$: $|A_2B_2| = 2|x_2| = 26$

$y_3 = (\sqrt{a})^2 \Leftrightarrow x_3 = \sqrt{a}$: $|A_3B_3| = 2\sqrt{a}$

по Т. косинусов:

$\cos 120^\circ = \cancel{\frac{|BC|^2 + |AC|^2 - 2|BC|\cdot|AC|}{|AB|^2}} = \frac{|A_1B_1|^2 + |A_2B_2|^2 - |A_3B_3|^2}{2|A_1B_1||A_2B_2|}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle(a;b)$

$3\cdot 4 = 12$
$9\cdot 16 = 144$

$(2\cdot\sqrt{a})^2$

$\cos\angle(a;b) = \cancel{\frac{a^2 + 2bc\cos\angle(a;b)}{}}\ \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$= \frac{(2\cdot 8)^2 + \cancel{(2\cdot 13)^2} - (2\cdot 13)^2}{2\cdot 16\cdot 2\sqrt{a}}$

~~b > |BC|~~
~~c > |AC|~~ меньше
~~a > |AB|~~

1) $\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$[A_3B_3]$ - большая ст-на

$-\frac{1}{2} = \frac{4\cdot 64 + 4\cdot 169 - 4\cdot a}{2\cdot 16\cdot 26} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\cdot\cancel{2\cdot 16}\ 26 =$

$-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\cdot 26 = 64 + 169 - a$

$-104 = 233 - a$

$-337 = -a$

$a = 337$

Т.к. $\angle\alpha = 120^\circ$, то это ~~самый большой~~ больший угол тр-ка, ~~и по на~~ а т.к. напротив большего угла лежит большая ст-на, то напротив этого угла могут лежать $[A_2B_2]$ или $[A_3B_3]$

Проверка:

$18 \le \sqrt{a} \le 19$

$18 \cdot 18$: $144 + 18 = 324$

$19 \cdot 19$: $171 + 19 = 361$

$36 \le |A_3B_3| \le 38$

2) $[A_2B_2]$ - большая ст-на

$-\frac{1}{2} = \frac{|BC|^2 + |AC|^2 - |AB|^2}{2|BC|\cdot|AC|} \Leftrightarrow -|A_1B_1||A_3B_3| = |A_1B_1|^2 + |A_3B_3|^2 - |A_2B_2|^2$

$-32\sqrt{a} = 4\cdot 64 + 4\cdot a - 4\cdot 169 \ |:4$

$a + 8\sqrt{a} - 105 = 0$

$\sqrt{a} = -15$
$\sqrt{a} = 7$

-4 ± 11

$16 + 105 = 121$

$-2\sqrt{a}\cdot 16 = (2\cdot 8)^2 + (2\sqrt{a})^2 - (2\cdot 13)^2$

~~$a = \sqrt{7}$~~ $a = 49$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)