

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 4

ШИФР

1-020

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 3x^2 - 4x + 2$ пересекает прямые $y = 17$, $y = 1$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Найдите количество 20-значных чисел, содержащих только цифры "1", "5" и "6" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно десять, и они идут подряд.
3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 38$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - a| \leq \sqrt{x - 2}$ является отрезок длины 1?
5. Несколько рабочих выполняют работу за 21 день. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 15 дней. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 10 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 7$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $8 : 21$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 13.
7. Пиноккио выбрал по 7 целых чисел из каждого промежутка $[1; 50]$, $[51; 100]$, $[101; 150]$, $[151; 200]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 50. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати восьми выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Дано: $y = 3x^2 - 4x + 2$; $y = 17$; $y = 1$, $y = a$.

Найти: a , при кот. из отрезков можно построить треугольник.

Решение:

Рассмотрим пересечение $y = 3x^2 - 4x + 2$ с $y = 17$.

$$17 = 3x^2 - 4x + 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 15 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 45}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3; \\ x_2 = -\frac{5}{3}. \end{cases}$$

Примем расстояния между этими абсциссами за $[BC]$,

$$\text{тогда } |BC| = 3 + \left| -\frac{5}{3} \right| = 4\frac{2}{3}.$$

Рассмотрим пересек. $y = 3x^2 - 4x + 2$ с $y = 1$.

$$1 = 3x^2 - 4x + 2; \quad 3x^2 - 4x + 1 = 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 3}}{3}; \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Примем расстояния между координатами x_1 и x_2 за $[AB]$.

$$\text{Тогда } |AB| = 1 + \frac{1}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

Тогда третьей стороной треугольника примем за $[AC]$. ($|AC| > 0$).

$|AC| < |AB| + |BC|$ (т.к. каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон), т.е.

$$|AC| < 1\frac{1}{3} + 4\frac{2}{3}; \quad |AC| < 6.$$

$$|AC| = 0 \text{ при } y = -\frac{2}{3}, \text{ т.е. } a > -\frac{2}{3}.$$

По графику (проверка на гербовике). при $a \parallel OX$, $|AC| = 6$ при $a = 8$.

$$\text{Итого. } a \in \left(-\frac{2}{3}; 8\right).$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\frac{2}{3}; 8\right).$$

№2.

$$11! - 10! - 2 \cdot 9! = 10! (11 - 1) - 2 \cdot 9! = 10! \cdot 10 - 2 \cdot 9! = 2 \cdot 9! (5 \cdot 10 - 1) =$$
$$= 98 \cdot 9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^3 = 15 \cdot 42^3 = 60 \cdot 84^3$$

Ответ: $60 \cdot 84^3$.

№4.

$$200 + 199 + 198 + 197 + 196 + 195 + 194 + 193 + 192 + 191 + 190 + 189 + 188 +$$
$$+ 187 + 186 + 185 + 184 + 183 + 182 + 181 + 80 + 79 + 78 + 77 + 76 + 75 + 74 + 73 =$$
$$= 50 + 50 + 110 + 80 + 140 + 195 + 200 + 110 + 110 + 220 + 170 + 280 +$$
$$+ 280 + 340 + 390 + 199 + 198 = 100 + 500 + 700 + 400 + 530 + 195 + 199 +$$
$$+ 198 = 2530 + 195 + 199 + 198 = 3122.$$

$$\begin{array}{r} 132 \\ + 2530 \\ + 195 \\ + 199 \\ + 198 \\ \hline 3122 \end{array}$$

Ответ: 3122.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

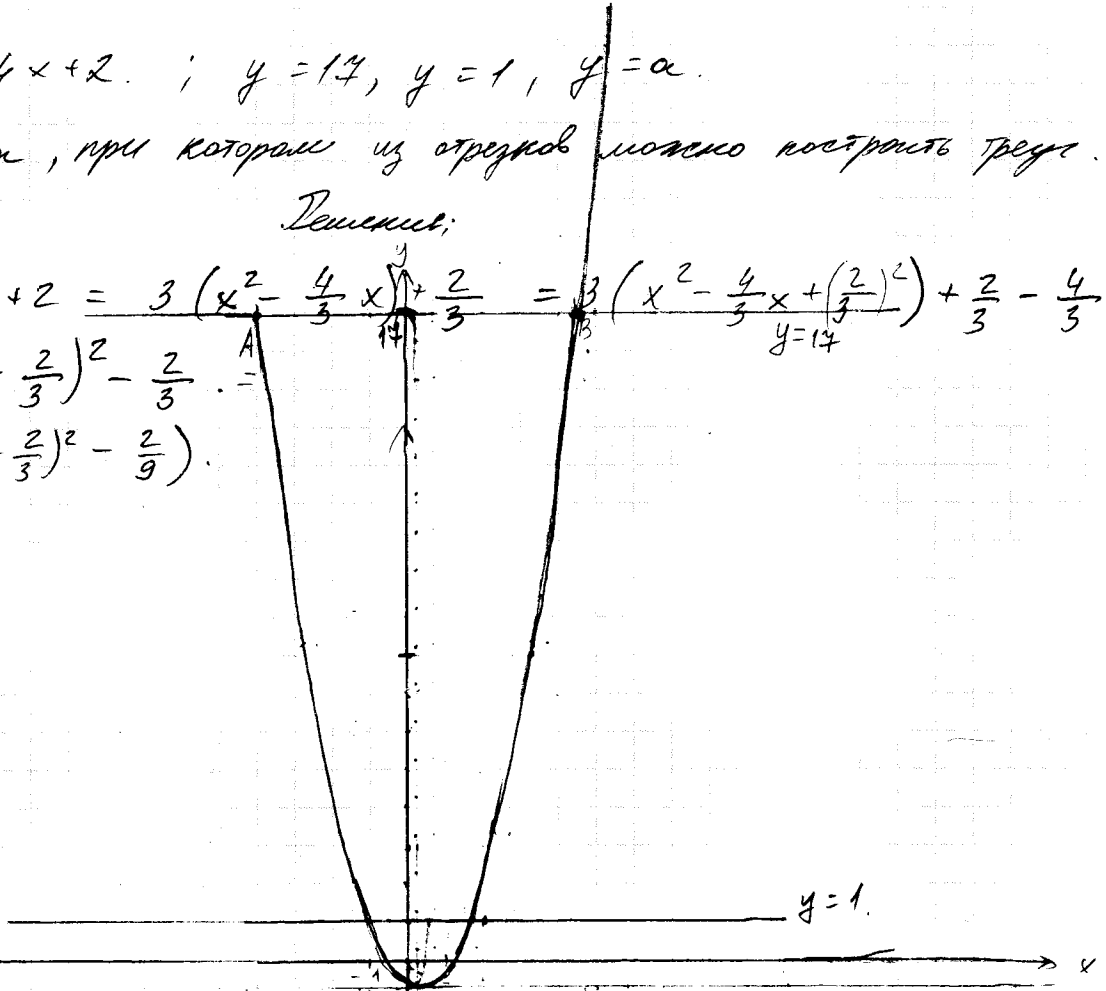
Дано:

$$y = 3x^2 - 4x + 2; \quad y = 14, \quad y = 1, \quad y = a.$$

Найти: a , при котором из отрезков можно построить треугол.

Решение:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 4x + 2 &= 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) + \frac{2}{3} = 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) + \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = \\ &= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} \\ &= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{9}. \end{aligned}$$



По графику видно, что график $y = 3x^2 - 4x + 2$ пересекает $y = 14$ в точке A.

Для получения графика функции $y = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{9}$ нужно график $y = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{9}$ сдвинуть в 3 раза (по оси OX).

Но т.к. соотношения при этом не изменяется, то 3 можно опустить.

Рассмотрим пересечение $y = 3x^2 - 4x + 2$ с $y = 14$.

$$14 = 3x^2 - 4x + 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 12 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 45}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3; \\ x_2 = -\frac{5}{3}. \end{cases}$$

Рассмотрим пересек. $y = 3x^2 - 4x + 2$ с $y = 1$.

$$1 = 3x^2 - 4x + 2; \quad 3x^2 - 4x + 1 = 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 3}}{3}; \quad \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1; \\ x_2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Примем расстояние м/у координатами x_1 и x_2 за $[AB]$. Тогда $|AB| = 1\frac{1}{3}$.

$$\begin{cases} x_1 = 3; \\ x_2 = -\frac{5}{3}. \end{cases} \quad \text{Примем это расст. за } [BC] \quad |BC| = 4\frac{1}{3}.$$

Тогда третью сторону примем за $[AC]$.

$$|AC| > 0.$$

$$|AC| < |AB| + |BC|, \text{ т.е. } |AC| < 1\frac{1}{3} + 4\frac{2}{3}, |AC| < 6.$$

$$|AC| = 0 \text{ при } y = -\frac{2}{3}, \text{ т.е. } a > -\frac{2}{3}$$

По условию при $a \parallel OX$, $|AC| = 6$, при $y = 8$.

$$\text{Т.е. } a \in (-\frac{2}{3}; 8).$$

$$\text{Ответ: } a \in (-\frac{2}{3}; 8).$$

№2.

$$5555555555 = x$$

$y; z$

$x; y; z$

$$\begin{aligned} 11! - 10! - 2 \cdot 9! &= \\ &= 10! \cdot (11 - 1) - 2 \cdot 9! = 98 \cdot 9! \\ &= 2 \cdot 9! \cdot (5 \cdot 10 - 1) = 98 \cdot 9! \\ &= 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3 = 15 \cdot 42^2 \cdot 2^5 = 60 \cdot 84^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11! - 10! &= 10! \cdot (11 - 1) = 10! \cdot 10 = \\ &= 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 10^2 = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5^3 = \\ &= 30^3 \cdot 3 \cdot 2^6 = 60^3 \cdot 3 \cdot 2^3 \\ &= 3 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^3 = 120^3 \cdot 3. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } 120^3 \cdot 3 \cdot 60 \cdot 84^3$$

$$11! - 2 \cdot 10! - 2(2 \cdot 9! - 2 \cdot 8! - 2 \cdot 7! - 2 \cdot 6!) - 2 \cdot 5!$$

$$(10! \cdot 10 - 4 \cdot (9!) - 4 \cdot (8!) - 4 \cdot (7!) - 4 \cdot (6!) - 4 \cdot (5!)) =$$

$$= 10! \cdot 10 - 4 \cdot (8!) \cdot (9 - 1) - 4 \cdot (7!) - 4 \cdot (6 - 1) =$$

$$= 10 \cdot (10!) - 32 \cdot (8!) - 4 \cdot (7!) - 20 \cdot (5!) =$$

$$= 10 \cdot (10!) - 4 \cdot (8 \cdot 8 - 1) - 20 \cdot (5!) =$$

$$= 10 \cdot (10!) - 4 \cdot 63 \cdot (7!) - 20 \cdot (5!) =$$

$$= 10 \cdot (10!) - 4 \cdot (63 \cdot 7! - 5!) =$$

$$2 \cdot (9!) \cdot (5 \cdot 10 - 2) = 9! \cdot 96$$

$$4 \cdot 8! \cdot (24 \cdot 9 - 1) = 215 \cdot 4 \cdot 8!$$

$$4 \cdot 7! \cdot (215 \cdot 8 - 1) = 7! \cdot 4 \cdot (1720 - 1) = 7! \cdot 4 \cdot 1719.$$

$$6! \cdot 4 \cdot (7 \cdot 1719 - 1) =$$

$$5! \cdot 4 \cdot ((6 \cdot 7 \cdot 1719 - 1) - 1) =$$

$$8 \cdot 5! \cdot (3 \cdot 7 \cdot 1719 - 1)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7.

$$\underline{200} + 199 + 198 + 197 + 196 + \underline{195} + 194.$$

$$143 + \underline{142} + \underline{141} + \underline{140} + \underline{139} + \underline{138} + \underline{137}$$

$$\underline{86} + \underline{85} + \underline{84} + \underline{83} + 82 + 81 + \underline{80}.$$

$$\underline{29} + \underline{28} + \underline{27} + \underline{26} + \underline{25} + \underline{24} + \underline{23}.$$

$$\begin{aligned} & \overset{\vee}{50} + \overset{\vee}{50} + \overset{\vee}{110} + \overset{\vee}{80} + \overset{\vee}{140} + \overset{\vee}{195} + \overset{\vee}{200} + \overset{\vee}{110} + \overset{\vee}{110} + \overset{\vee}{220} + \overset{\vee}{140} + \overset{\vee}{280} + \\ & + \overset{\vee}{280} + \overset{\vee}{340} + \overset{\vee}{390} + \overset{\vee}{199} + \overset{\vee}{198} = 100 + \cancel{200} + 500 + 400 + 400 + \\ & + 530 + 195 + 199 + 198 = 2530 + 195 + 199 + 198 = \underline{3122} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 132 \\ + 2530 \\ + 195 \\ + 199 \\ + 198 \\ \hline 3122 \end{array}$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1-020

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)