# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР 1 - 021

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра $a$ из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса $\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega_3$, причём $\omega_1$ касается сторон $AD$ и $DC$, $\omega_2$ касается сторон $DC$ и $CB$, а $\omega_3$ касается сторон $CB$, $BA$ и $AD$.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол $AOB$, где $O$ – центр окружности $\omega_3$.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите $AB$.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки $F$ и $L$ лежат на сторонах $AC$ и $BC$ треугольника $ABC$ соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки $BF$ и $AL$ пересекаются в точке $Q$; площади треугольников $BQL$ и $BAC$ относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки $L$ до прямой $AC$, если расстояние от точки $Q$ до прямой $AC$ равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1-021
ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Решение.

Парабола $y=x^2$ пересечёт график $y=169$ в точках с $x=13$ и $x=-13$, а график $y=64$ в точках с $x=8$ и $x=-8$.

Выходит, что отрезок, который отсечёт парабола от прямой $y=169$ будет равен $|13|+|-13|=26$, а от прямой $y=64$ — $|8|+|-8|=16$.

Имеем три варианта для составления треугольника по двум сторонам и углу:

1) обе стороны лежат на сторонах угла
2) первая сторона лежит на стороне угла, а вторая лежит напротив ~~неё~~ угла
3) вторая сторона лежит на стороне угла, а первая лежит напротив угла

По теореме косинусов:

1) $a^2=26^2+16^2-2\cdot\cos120\cdot16\cdot26=$
$=676+256+416=1348$

$a=\sqrt{1348}=2\sqrt{337}$

Ясно, что $a<40$ $(40^2=1600)$, а значит $a=2\sqrt{337}$ соответствует пер-ву треугольнику и явл-ся ответом

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

2) $16^2 = 26^2 + a^2 - 2\cos 120^\circ \cdot 26 \cdot a$

$\Leftrightarrow 16^2 = 26^2 + a^2 + 26a$

$\Leftrightarrow 16^2 - 26^2 = a^2 + 26a$

Получаем, что $a < 0$, что невозможно, а следовательно сторона 16 не может лежать напротив $120^\circ$

3) $26^2 = 16^2 + a^2 - 2\cos 120^\circ \cdot 16 \cdot a$

$\Leftrightarrow 26^2 - 16^2 = a^2 + 16a$

$\Leftrightarrow 10 \cdot 42 = a^2 + 16a$

$\Leftrightarrow a^2 + 16a - 420 = 0$

$D = 256 + 1680 = 1936$

$$\left[\begin{array}{l} a = \frac{-16+44}{2} = 14 \\ a = \frac{-16-44}{2} = -30 \end{array}\right.$$

~~$a = 14$ и~~ $a = -30$ не подходит, т.к. $a > 0$.

$a = 14$ соответствует неравенству треугольника, а значит является подходящим вариантом

Ответ: $14$; $2\sqrt{337}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

1-021
ШИФР
(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

Т.к. цифр "5" ровно 6, ~~и~~ они идут в подряд, а число 18-значно, то

есть 13 вариантов расположения пятёрок (начиная с 1-й цифры по 6-ю и доходя до с 13-й цифры по 18-ю, то есть от 1 до 13, что даёт 13 вариантов).

Все остальные цифры будут "0" или "9", а оставшихся цифр 18 − 6 = 12

Имеем:

$13 \cdot 2^{12}$

Но есть два невозможных случая:

1) Когда "0" на первой позиции. То есть нужно отнять $12 \cdot 2^{11}$ (12 расположений пятёрок)

2) Когда или "0", или "9" не присутствуют. Так как в 1) мы исключили варианты, где все "0", то стоит лишь отнять варианты, где все 12 цифр 9, то есть 13 · 1

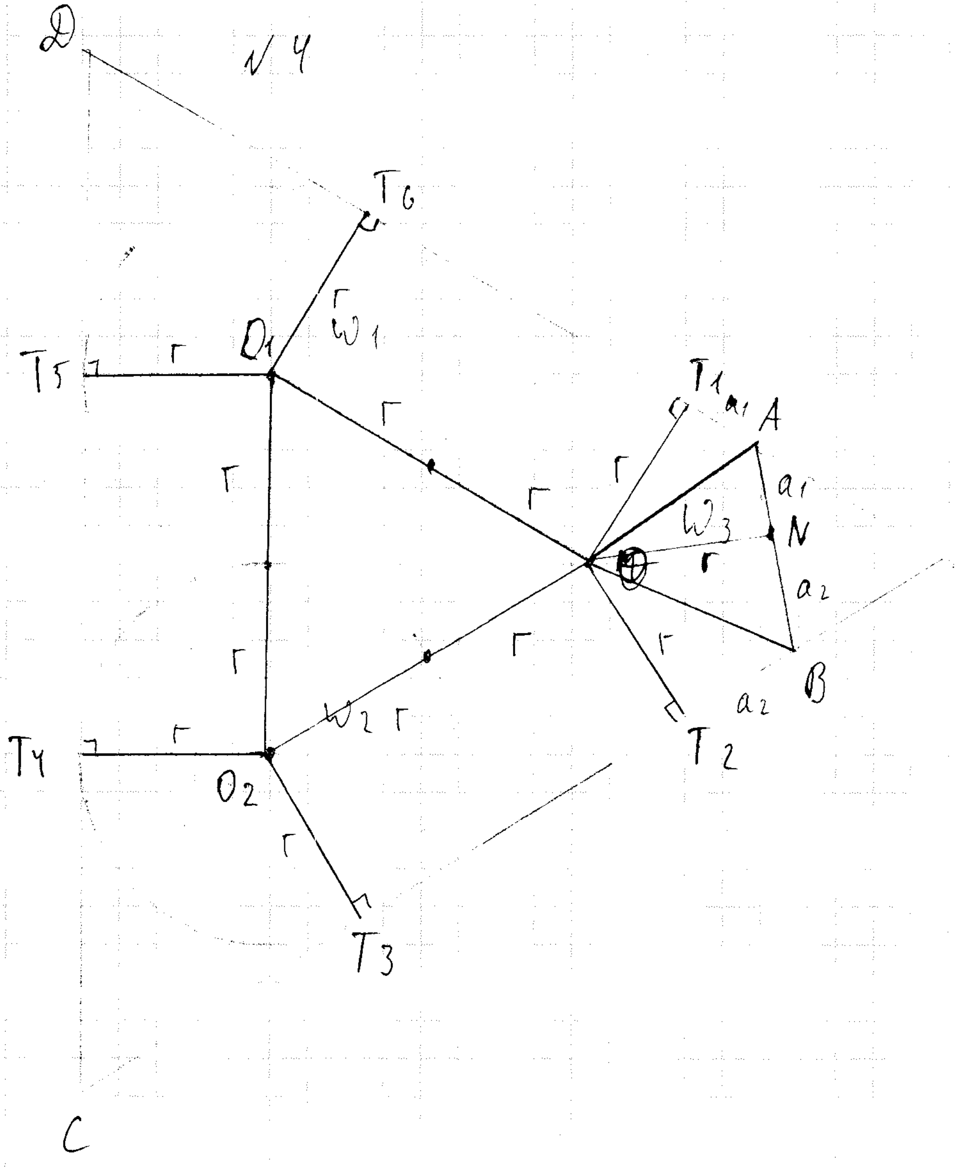
Получаем:

$13 \cdot 2^{12} - 12 \cdot 2^{11} - 13 = 12 \cdot 2^{12} - 12 \cdot 2^{11} + 2^{12} - 13 =$
$= 12 \cdot 2^{11} + 2^{12} - 13 = \cancel{12}\ 7 \cdot 2^{12} - 13 = 7 \cdot 4096 - 13 = 28\,659$

Ответ: $7 \cdot 2^{12} - 13$ или 28 659

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№ 4



Решение

1) Из свойства касательных, проведённых из точки вне окружности к окружности имеем:

$|DT_5| = |DT_6|$

$|AT_1| = |AN|$

$|NB| = |BT_2|$

$|CT_3| = |CT_4|$

Также, понятно, что четырёхугольники $O_1 O_2 T_4 T_5$, $O_1 O T_1 T_6$ и $O O_2 T_3 T_2$ - прямоугольники, причем $|T_5 T_4| = |T_6 T_1| = |T_2 T_3| = 2r$

№4 (продолжение)

Получаем:

$|AD| + |BC| - |AB| - |CD| = 10 \iff$

$\iff (|AT_1| + 2r + |T_6D|) + (|BT_2| + 2r + |T_3C|) -$

$- (|AN| + |NB|) - (|CT_4| + 2r + |T_5D|) =$

$= 10 \iff$

$\iff 2r = 10 \iff$

$\iff r = 5$

Значит, радиус окружностей равен 5

2) Известно, что $\triangle OO_1O_2$ - равносторонний, а значит $\angle O_1OO_2 = 60°$.

~~Углы~~ $\angle T_1OO_1 = \angle O_2OT_2 = 90°$

$\angle T_1OT_2 = 360° - \angle O_1OO_2 - \angle T_1OO_1 - \angle T_2OO_2 =$

$= 360 - 60 - 90 - 90 = 120°$

$\left.\begin{array}{l}\triangle T_1OA = \triangle AON \\ \triangle T_2OB = \triangle BON\end{array}\right\}$ (по трём сторонам)

Следовательно, $\angle AOB = \frac{1}{2} \angle T_1OT_2 = 60°$

3) Пусть $|AN| = |AT_1| = a_1$, а $|BN| = |BT_2| = a_2$,

тогда по теореме косинусов.

$|AB|^2 = |AO|^2 + |BO|^2 - 2\cos \cancel{1}60^\circ \cdot |AO| \cdot |BO|$

$|AO|^2 = a_1^2 + r^2$
$|BO|^2 = a_2^2 + r^2$

$\Leftrightarrow (a_1 + a_2)^2 = a_1^2 + r^2 + a_2^2 + r^2 - 42$

$\Leftrightarrow 2a_1a_2 = 2r^2 - 42$, где $r = 5$

$\Leftrightarrow a_1a_2 = \cancel{8}\ 4$

Также, $|AO| \cdot |BO| = 42$ можно представить как

$(\sqrt{a_1^2 + r^2}) \cdot (\sqrt{a_2^2 + r^2}) = 42$

$(a_1^2 + r^2) \cdot (a_2^2 + r^2) = 1764$

$a_1^2a_2^2 + r^2(a_1^2 + a_2^2) + r^4 = 1764$

$16 + 25(a_1^2 + a_2^2) + 625 = 1764$

$a_1^2 + a_2^2 = \frac{1123}{25}$

Прибавим $2a_1a_2$ к обеим частям и получим:

$(a_1 + a_2)^2 = \frac{1123}{25} + 8$

$|AB| = \sqrt{\frac{1323}{25}}$

$|AB| = \frac{21}{5} \cdot \sqrt{3}$

Ответ: $r = 5$; $\angle AOB = 60^\circ$; $|AB| = \frac{21}{5}\sqrt{3}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

Решение.

Промежутки:

$$\underset{1}{[1;35]}, \underset{2}{[36;70]}, \underset{3}{[71;105]}, \underset{4}{[106;140]}, \underset{5}{[141;175]}$$

Стоит заметить, что в каждом промежутке ровно 35 элементов

Пусть любое число из любого промежутка представимо в виде

$35 \cdot k + (c+1)$, где $k \geq 0, k \in N$; $c \in [0;34], c \in N$.

Тогда выходит, что всего у нас 35 разных $c$ и $k$ для промежутков равно:

$k_1 = 0$; $k_2 = 1$; $k_3 = 2$; $k_4 = 3$; $k_5 = 4$

Например, число $89 = 35 \cdot k_3 + (1 + c_{18}) =$
$= 35 \cdot 2 + 1 + 18$

Разность двух чисел будет кратна 35 тогда и только тогда, когда у этих чисел одинаковые $c$, так как:

$35 \cdot k_x + (c_n + 1) - (35 \cdot k_y + (c_n + 1)) =$
$= 35 \cdot (k_x - k_y) \;\vdots\; 35$

Сумму чисел, выбранных Пиноккио можно будет представить в виде:

$35 \cdot (5k_1 + 5k_2 + 5k_3 + 5k_4 + 5k_5) + (c_{n1} + c_{n2} + c_{n3} + \ldots + c_{n25}) +$
$+ 25$

Отсюда получаем, что для получения наименьшей суммы, сумма всех $c$ должна принимать наименьшее значение, то есть суммировать все $c$ в промежутке $[0; 24]$.

Имеем:

$$35 \cdot 5 \cdot 10 + \frac{0 + 24}{2} \cdot 25 + 25 =$$

$$= 1750 + 300 + 25 = 2075$$

Ответ: 2075

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2-021

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[1;35]; [36;70]; [71;105]; [106;140]

35 35 35 35

[141;175]

35

$676 + 256 = 932$

$932 + 416 = 1348$

$42 \times 42$: $84$, $+168$, $= 1764$

$1764 - 16 = 1748$

$35 \cdot k + (c+1), c < 35$ ~~$, c \in \mathbb{N}$~~

$c \in [0;34]$ ~~$c \in [0;35)$~~

~~c~~ 35

25 $1748 - 625 = 1123$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

4 8 16 32 64 128 256 512 1024 2048 4096

$25 \times 8 = 200$ 35

$4096 \times 7 = 28678$

28665

$k_1 = 0$

$k_2 = 1$

$k_3 = 2$

$k_4 = 3$

$k_5 = 4$

$1764 - 625 = 1139$

$1139 - 16 = 1123$

$35 \times 4 = 140$

$26 \times 26$: $156$, $+52$, $= 676$

$26 \times 16$: $156$, $+26$, $= 416$

$16 \times 16$: $96$, $+16$, $= 256$

$35 \cdot k_1 + (c_1 + 1) + 35 \cdot k_1 + (c_2 + 1) +$

$35(5k_1 + 5k_2 + 5k_3 + 5k_4 + 5k_5) +$

$+ 25 + (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \ldots c_{25})$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{array}{r|l} 1348 & 4 \\ \underline{12} & 337 \\ 14 & \\ \underline{12} & \\ -28 & \\ 28 & \end{array}$$

$\frac{\sin\alpha}{a_1+a_2}$

$\frac{\sin 60^\circ}{a_1+a_2} =$ ______

8

$|AB|^2 = |AO|^2 + |BO|^2 - |AO|\cdot|BO|$

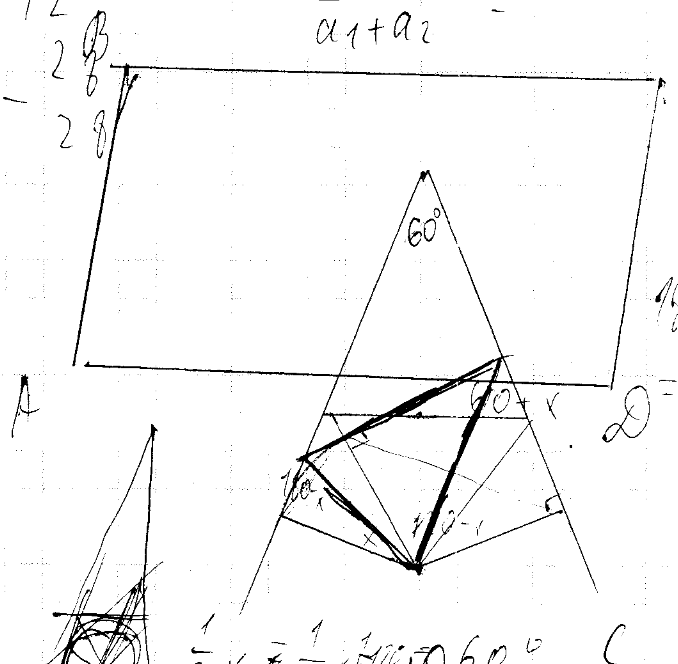
$\sqrt{r^2+a_1^2}\cdot\sqrt{r^2+a_2^2} = 42\,2$

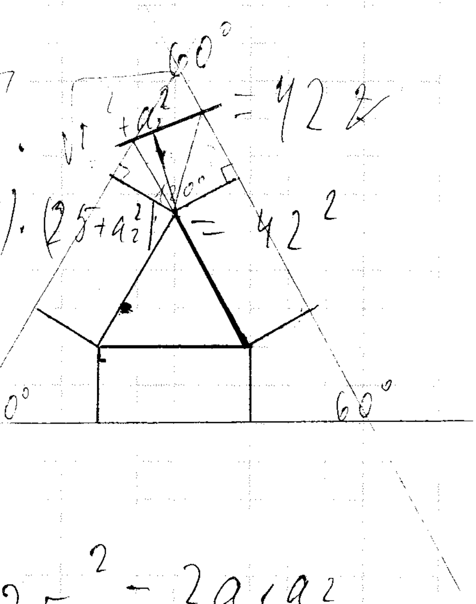
$(25+a_1^2)\cdot(25+a_2^2) = 42^2$

$180-120-x=$

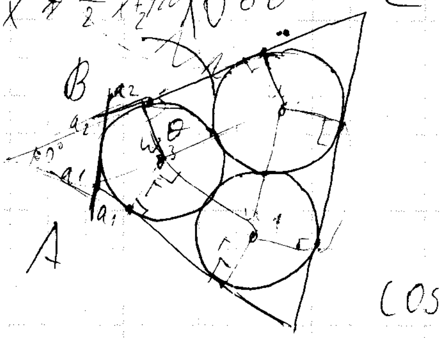
$D = 60+x$

5





$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ 1060°



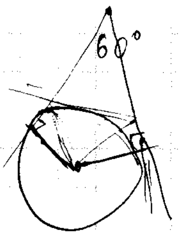
~~$a_1+a_2$~~ =

$2r^2 - 2a_1a_2$

$\cos\alpha = \frac{r^2 - a_1a_2}{\sqrt{(r^2+a_1^2)(r^2+a_2^2)}}$

$\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

$\cos^2\alpha = \frac{r^4 - 2r^2a_1a_2 + a_1^2a_2^2}{r^4 + r^2(a_1^2+a_2^2) + a_1^2a_2^2}$



$|AD| + |BC| - |AB| - |CD| = 10$

$|AB| = a_1 + a_2$

$|AO| = \sqrt{r^2+a_1^2}$

$|BO| = \sqrt{r^2+a_2^2}$

$r^4 + a_1^2r^2 + a_2^2r^2 +$
$+ a_1^2a_2^2$

$(a_1+a_2)^2 =$

$|AB|^2 = |AO|^2 + |BO|^2 - 2|AO||BO|\cdot\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{r^2+a_1+r^2+a_2^2-a_1^2-a_2^2-2a_1a_2}{2\sqrt{\phantom{x}}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

676
+256
+~~416~~
932

932
+416
1348

26
×26
156
+52
676

26
×16
+156
26
416

416
+256
672

+672
676
1348

25
×12
50
+25
300

$2 \cdot \sqrt{337}$

16
×16
96
16

21
×21
21
+42
441

46
×46
276
+184

×46
46
276
184

44
×44
176
+176
1936

×35
5
175

44
×3
1323

1323 | 9
−9 | 147
42
−36
63
−63

·1764
−625
1139.

9 · 25 =

200

147 | 3
49

$7^2 \cdot 3^2 \cdot 3 =$

=

1339

33
×33
99
+99
1089.

~~37~~
~~×37~~
~~231~~
~~11~~

×33
33
99
+99
1089

37
×37
259
+111
1369

49
×9
441

441
×3
1323

$21^2 \cdot 3$

37
×37
259
+111
1369

---

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

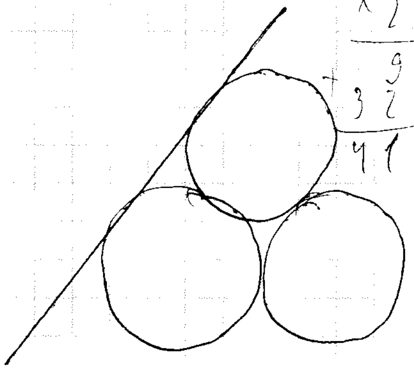
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle AOB = 60^\circ$  $r = 5$

$|AB| = a_1 + a_2$

$|AO| \cdot |BO| = 42$



16
×26
96
+32
416

37
×37
231
+111
1369421
×42
82
+168
1762

~~9~~ 31
×31
31
+93
1021

26
×26
156
+52
676

16
×16
96
+16
256

25
×25
125
+50
625

25
×25
125
+50
625

42
×42
84
+168
1764

$|AO|^2 + |BO|^2 = (|AO| + |BO|)^2 - 2|AO| \cdot |BO|$

$$\begin{cases} (25 + a_1^2)\cdot(25 + a_2^2) = 1762 \\ (a_1 + a_2)^2 = 25 + a_1^2 + 25 + a_2^2 - 42 \end{cases}$$

42
−1762 | 142
16 | 84
1746 +168
1764

−1746
625
1121

$a_1^2 = b_1$  $a_2^2 = b_2$

$25\cdot 25 + 25a_1^2 + 25a_2^2 + a_1^2a_2^2 = 1762$

$625 + 25(a_1^2 + a_2^2) + 16 = 1762$

$b_1 + b_2 = \cancel{25 +} 50 + 42 + b_1 + b_2$

$25(a_1^2 + a_2^2) = 1121$

$|AB|^2 = |OB|^2 + |OA|^2 - |OA| \cdot |OB|$

$a_1a_2 = 4$

$a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 = a_2^2 + a^2 + a_1^2 + r^2 - 42$  $a_1 = \frac{4}{a_2}$

~~3·42 = 50~~

$a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 = \sqrt{\frac{1121}{25}} + 8$

$2a_1a_2 = 50 - 42$

$2a_1a_2 = 8$  $a_1a_2 = 4$

$\frac{1321}{25}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1-021
ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

0, 5, 9

1 – 6 1 2 3 4 5 6

↓

13 – 17

12 13 14 15 16 17 18

1 – 6

13 – 18

1 – 13

13 ·

$2^{12} + 12 \cdot 2^{11}$

$169 = 13^2$ $64 = 8^2$

$13 \cdot 12^{12} - 12 \cdot 2^{11} =$

$\begin{array}{r} 13 \\ \times 13 \\ \hline 39 \\ +13 \\ \hline 169 \end{array}$

69

$= 2^{11}$ $12 \cdot 2^{11}(2-1) + 2^{12}$

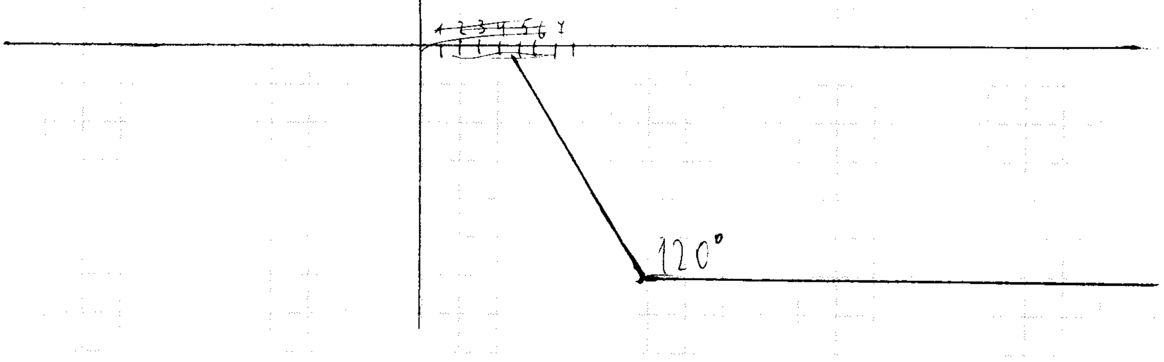
$2^{12} + 12 \cdot 2^{12}$

26

16

a

a>10



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2

$g(x)=\sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$\sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$

$= 13 \cdot 2^{12} - 12 \cdot 2^{11} - 13 =$

$= 13 \cdot 2^{12} - 6 \cdot 2^{12} - 13 = 7 \cdot 2^{12} - 13$

~~$\frac{5+9+7+1}{4} =$~~

$\frac{3}{7}xH$ $\frac{4}{7}xH$

~~$\cos 5x \cdot \cos 9x - 24 \cos 7x$~~

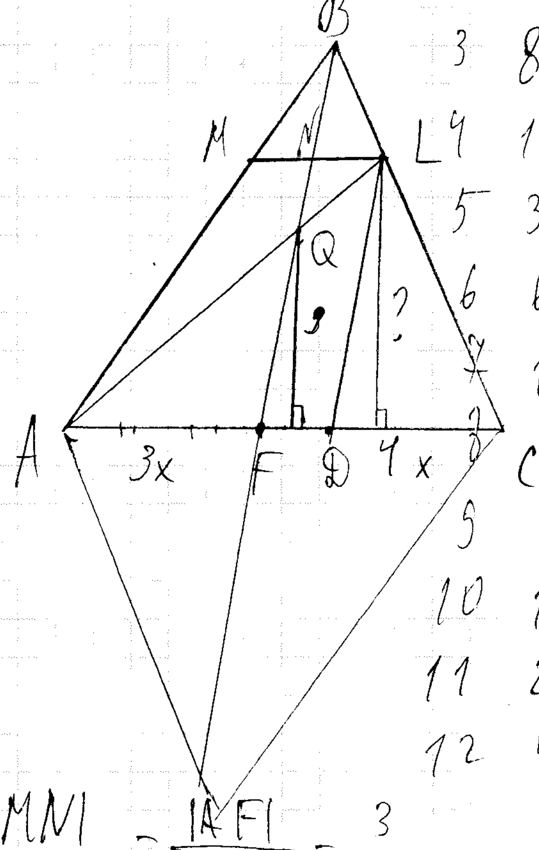
$\times \begin{array}{r} 4056 \\ 7 \\ \hline 28672 \end{array}$ $\times \begin{array}{r} 4096 \\ 7 \\ \hline 28672 \end{array}$

$- \begin{array}{r} 28672 \\ 13 \\ \hline 59 \end{array}$

№6

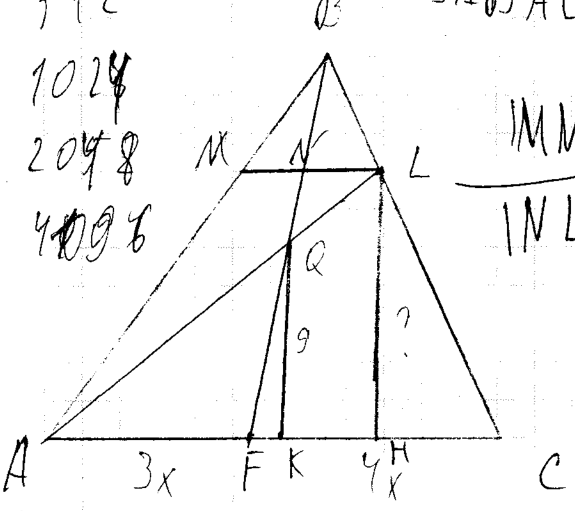
$2^2 = 4$

| | |
|---|---|
| 3 | 8 |
| 4 | 16 |
| 5 | 32 |
| 6 | 64 |
| 7 | 128 |
| 8 | 256 |
| 9 | 512 |
| 10 | 1024 |
| 11 | 2048 |
| 12 | 4096 |



$\frac{9}{2} = \boxed{\frac{|AQ|}{|AL|}} = \frac{|AF|}{|AD|}$

$\frac{S_{\triangle BQL}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{1}{16}$



$\frac{|MN|}{|NL|} = \frac{3}{4}$

$\frac{|MN|}{|NL|} = \frac{|AF|}{|FC|} = \frac{3}{4}$

$\times \begin{array}{r} 4096 \\ 7 \\ \hline 28672 \end{array}$ $- \begin{array}{r} 28672 \\ 13 \\ \hline 28659 \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)