

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 3

ШИФР

1-022

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2 - 5x + 1$ пересекает прямые $y = -1$, $y = 4$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Найдите количество 16-значных чисел, содержащих только цифры “3”, “4” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “9” ровно четыре, и они идут подряд.
3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 24$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 2a| \leq \sqrt{x - 1}$ является отрезок длины 3?
5. Несколько рабочих выполняют работу за 28 дней. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 21 день. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 15 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 7 : 3$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $7 : 36$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 3.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 30]$, $[31; 60]$, $[61; 90]$, $[91; 120]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 30. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $y = 2x^2 - 5x + 1$

при $y = 4$

$$2x^2 - 5x + 1 = 4$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$D = 25 + 24 = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{4}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = 3$$

при $y = -1$

$$2x^2 - 5x + 1 = -1$$

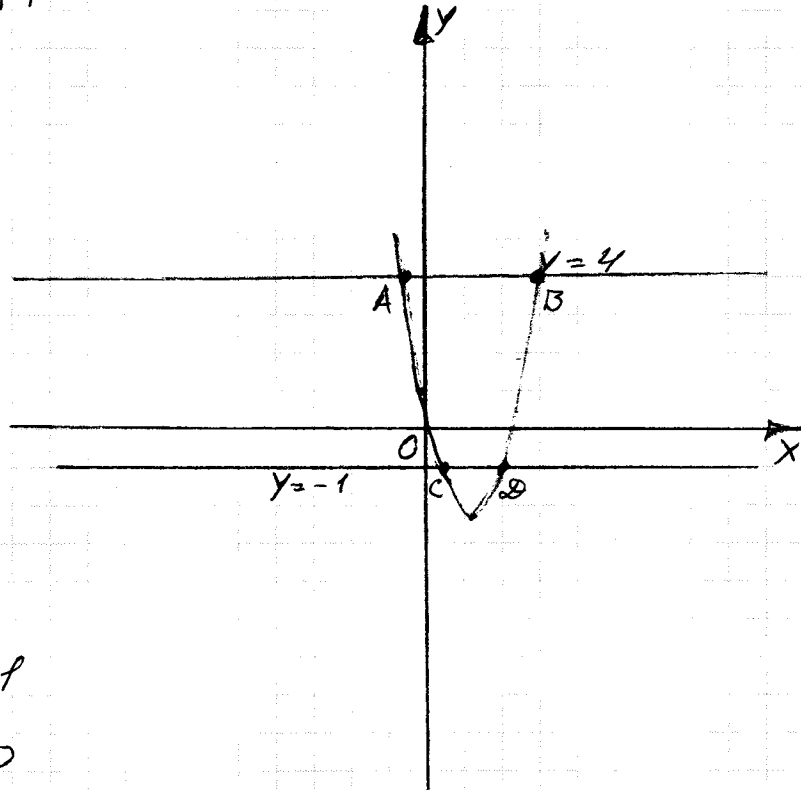
$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = 2$$



$$y = 4$$

$$y = -1$$

$$y = a$$

Проведем через точки отрезков:

$$A\{-\frac{1}{2}; 4\}; B\{3; 4\}; C\{\frac{1}{2}; -1\}; D\{2; -1\}$$

Сделав вычисления мы получили что

$$AB = 3,5 \text{ и } CD = 1,5$$

П.к. CD меньше чем AB , тогда CD является катетом, а AB может быть либо катетом, либо гипотенузой прямоугольного треугольника

По теореме Пифагора:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$CD = a$$

$$CD^2 = 2,25 \Rightarrow \text{Если } AB \text{ является гипотенузой, то:}$$

$$AB^2 = 12,25 \quad 12,25 - 2,25 = 10$$

\Rightarrow Если AB является катетом, то:

$$12,25 + 2,25 = 15$$

Тогда назовём III сторону EK

Если $EK = \sqrt{10}$, то EK находится между AB и CD , а если $EK = \sqrt{15}$, то EK находится выше AB и CD , но так как $y = a$, то отрезок образован частью его тогда

$$\sqrt{10} \approx 3,25 \text{ и } \sqrt{15} \approx 3,9$$

$$X_1 + X_2 = \sqrt{10} \quad \text{или} \quad X_1 + X_2 = \sqrt{15}$$

Сделаю вычисления

Ответ: Если AB - гипотенуза, то $a = 2,5$
 Если AB - катет, то $a = 4,5$

2. 9999
 9999
 9999
 9999

Если посчитать строчки, где идут 4 девятки подряд, то у нас будет 13 строк

Так как цифры 4 и 3 должны появиться, хотя бы 1 раз в каждой строке тогда:

(чисел) Цифра 3:
 Если 1

Цифра 4:
 Если 1

Тогда
 у нас будет
 13×12
 способов, и
 наоборот
 тоже
 13×12

3:	4:
2	10

то
 66×13
 способов

3	9
---	---

то
 85×13
 способов

4	8
---	---

98×13

5	7
---	---

6	6
---	---

и всё это удваиваем

Ответ: 1024×13 способов

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4. |ax - 2a| \leq \sqrt{x-1}$$

$$1) -ax + 2a \leq \sqrt{x-1}$$

$$2) ax - 2a \leq \sqrt{x-1}$$

$$a(x-2) \leq \sqrt{x-1}$$

$$x \geq 1$$

Возведём обе части в квадрат:

$$(|ax - 2a|)^2 \leq |x-1|$$

$$|a^2(x^2 - 4x + 4)| \leq |x-1|$$

$$1) -a^2(x^2 - 4x + 4) \leq -(x-1)$$

$$2) a^2(x^2 - 4x + 4) \leq x-1$$

$$3) -a^2(x^2 - 4x + 4) \leq x-1$$

$$4) a^2(x^2 - 4x + 4) \leq -(x-1)$$

$$1) a^2(x^2 - 4x + 4) \geq x-1$$

При $x=1$

$$2) -a \leq 0$$

$$a \geq 0$$

$$1) a \leq 0$$

При $x=5$

$$1) -3a \leq 2$$

$$2) a \leq \frac{2}{3}$$

$$a \geq -\frac{2}{3}$$

При $x=2$

$$0 \leq 1$$

При $x=3$

$$1) -a \leq \sqrt{2}$$

$$2) a \leq \sqrt{2}$$

$$a \geq -\sqrt{2}$$

При $x=4$

$$1) -2a \leq \sqrt{3}$$

$$2) a \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: при $a = \pm \sqrt{2}$

3 Дано:
 $ABC\mathcal{D}$
 $r_1 = \omega_1$
 $r_2 = \omega_2$
 $r_3 = \omega_3$
 $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$
 $r_1 = r_2 = r_3$

Найти?
 $r_1 = r_2 = r_3 = ?$

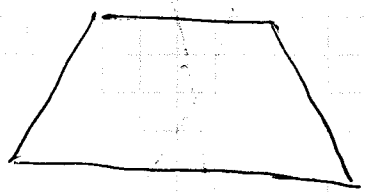
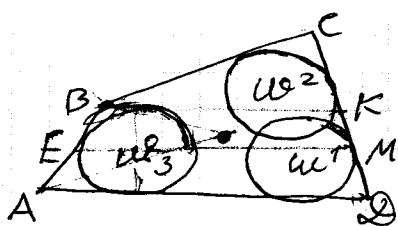
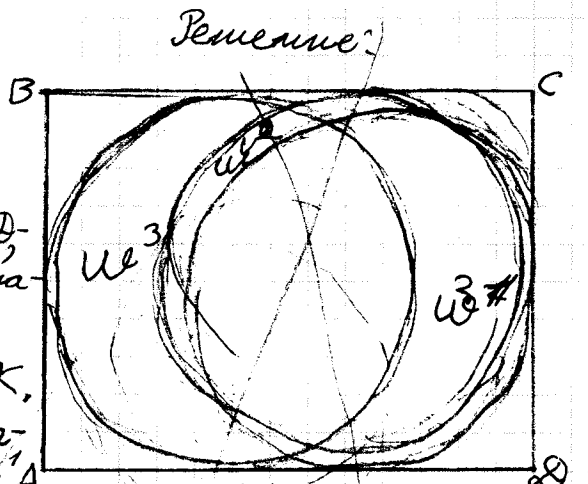
$r_{ABK\mathcal{D}} = \mathcal{D}$

$AD + BC - AB - CD = 24$

т.к. ω_3 касается CB, BA, AD , то $AB < CD$.

Если мы проведем $BK \parallel AD$, то у нас получится трапеция: $ABK\mathcal{D}$ - трап. \Rightarrow

ω_1 касается AD, KD и BK . Средняя линия EM трапеции $ABK\mathcal{D}$, делит ω_1 и ω_2 пополам и служит диаметром в круге $\mathcal{D} = 2r$



Ответ:

5 Дано:
 $N_1 = X$
 $t_1 = 28g$
 $N_2 = X + 2$
 $t_2 = 21g$
 $t_{2,1} = t_{1,1} + 1z.$
 $N_3 = X + 6$
 $t_3 = 15g.$
 $t_{3,1} = t_{2,1} + 1z.$

Найти:
 $N_1 - 2$

СУ:
 $672z$
 $504z$
 $360z$

Решение:

Пусть $t_{1,1}$ будет время работы за день при N количестве людей, тогда $(t_{1,1} + 1z.)$ - время работы за 1 день при N_2 количестве людей и $(t_{1,1} + 2z.)$ - время работы за 1 день при N_3 количестве людей
 Известно что все 3 выполняются одно и то же количество работы \Rightarrow
 $\Rightarrow 28$ дней, 21 день и 15 день все выполняются равное количество работы:
 $28 = 7 \cdot 4$
 $21 = 7 \cdot 3$

$$15 = 5 \cdot 3$$

У I с II имеется общий множитель 7, и у II и III общий множитель 3, тогда \Rightarrow

$$7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 420 \text{ (р.) работы выполняющий каждый}$$

Чтобы вычислить общее количество работы, нужно количество людей умножить на время работы за день и количество дней

Составим и решим уравнение

$$\begin{cases} X \cdot t_{1,1} \cdot 28 = 420 \\ (X+2) \cdot (t_{1,1}+1) \cdot 27 = 420 \\ (X+6) \cdot (t_{1,1}+2) \cdot 15 = 420 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X t_{1,1} = 15 \\ (X+2)(t_{1,1}+1) = 20 \\ (X+6)(t_{1,1}+2) = 28 \end{cases}$$

Таким образом

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$20 = 4 \cdot 5 = 10 \cdot 2$$

$$28 = 7 \cdot 4$$

Ответ: изначально было 207 рабочих

6. Дано:

$\triangle ABC$

$F \in AC$

$L \in BC$

$\frac{AF}{FC} = \frac{7}{3}$

$\frac{BF \cap AL}{S_{BAC}} = \frac{7}{36}$

$QL \perp BC$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{7}{36}$

$QL \perp BC$

$QL = 3$

Найти:

$AL = ?$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. Тимакино выбрал всего 24 числа, ни одно из них не повторяется.

Если Тимакино выберет число 1, то он не сможет больше выбрать числа 31, 61, 91 и таким образом выбираем числа

Если мы возьмём числа: 120, 119, 118, 117, 116, 115

То мы не берём: 85, 86, 87, 88, 89, 90, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 25, 26, 27, 28, 29, 3

Тогда берём: 79, 80, 81, 82, 83, 84

То мы не берём: 19, 20, 21, 22, 23, 24, 49, 50, 51, 52, 53, 54

Тогда берём: 43, 44, 45, 46, 47, 48

Тогда не берём: 18, 17, 16, 15, 14, 13

И берём: 12, 11, 10, 9, 8, 7

$$120 + 119 + 118 + 117 + 116 + 115 + 79 + 80 + 81 + 82 + 83 + 84 + 43 + 44 + 45 + 46 + 47 + 48 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 = 1524$$

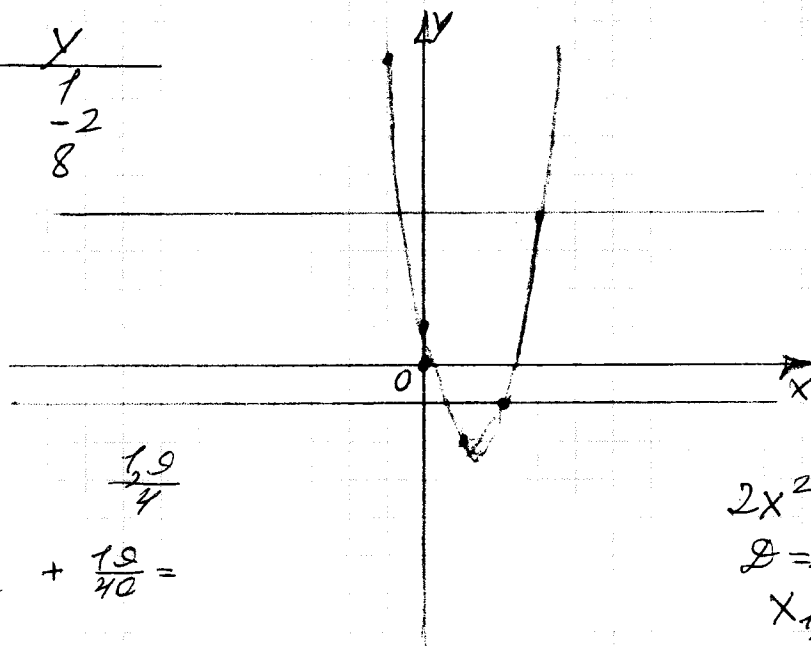
Ответ: 1524, наибольшее значение суммы 24 чисел

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$D = 25 - 8 = 17$$

$$y = 2x^2 - 5x + 1$$

X	Y
0	1
1	-2
-1	8
2	



2,6

$$\frac{11,9}{4} \quad \frac{1,9}{4}$$

$$2 \frac{39}{40} + \frac{19}{40} =$$

$$3 \frac{18}{40}$$

$$2x^2 - 5x + 1 = 4$$

$$3 \frac{9}{20}$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$3,45$$

$$D = 25 + 24 = 49$$

$$2x^2 - 5x - 4 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{4}$$

$$D = 25 + 32 = 57 \quad x_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{5 \pm \sqrt{57}}{4}$$

$$x_2 = 3$$

$$\frac{12,5}{4}$$

$$2x^2 - 5x$$

$$-\frac{2,5}{4} \text{ и } -$$

$$25$$

$$3,125 + 0,625$$

$$y = 4,5$$

$$2x^2 - 5x - 3,5x$$

$$D = 25 + 28 = 48$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{48}}{4}$$

$$2x^2 - 5x - 2,5 = 0$$

$$D = 25 + 20 = 45$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{45}}{4}$$

$$2x^2 - 5x + 1 = -1 \quad x_1 = 0$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x_2 = 2,5$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$\frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{4}$$

$$\left[-\frac{1}{2}; 4\right] \text{ и } [3; 4]$$

$$\frac{11,5}{4}$$

$$\begin{array}{r} \times 39 \\ + 39 \\ \hline 357 \end{array}$$

$$2 \frac{7}{8}$$

$$2,25$$

$$\begin{array}{r} \times 35 \\ + 35 \\ \hline 175 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 117 \\ + 117 \\ \hline 234 \end{array}$$

$$2,875$$

$$\begin{array}{r} 105 \\ + 105 \\ \hline 210 \end{array}$$

$$-\frac{1,5}{4}$$

$$\begin{array}{r} \times 32 \\ + 32 \\ \hline 64 \\ + 96 \\ \hline 1024 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 31 \\ + 31 \\ \hline 31 \\ + 93 \\ \hline 981 \end{array}$$

$$3,250$$

$$\frac{3}{8}$$

$$0,375$$

3 чел. 10 час 18 грм.
 5 чел. 12 часа 21 грм.

840 грм. $\times 7,5$
~~2108~~
 12604 $\begin{array}{r} 525 \\ \hline 5625 \end{array}$

$\begin{array}{r} 76 \\ + 76 \\ \hline 456 \\ + 532 \\ \hline 5776 \end{array}$

3,
4,
9

$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11$
 10
 10 10 10

66

$\times 13$

9-4
погреш

$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 1 \end{array}$ и $\begin{array}{r} 4 \\ \hline 101 \end{array}$

12×13
способов

$\begin{array}{r} 13 \\ \hline 1 \end{array}$

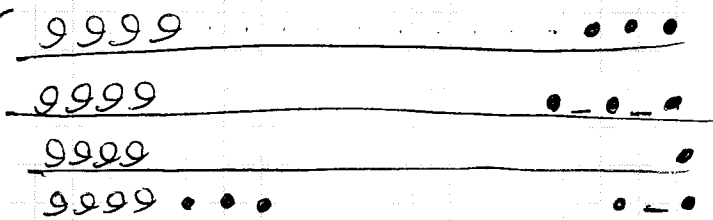
12×13
способов

$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 10 \end{array}$

3 чел 1 час 84 5 чел 4 часа
 2 часа 164

4 чел 10 час 280

3 $\times 12$ 756



$\begin{array}{r} 27 \\ \hline 9+9+9 \end{array}$

7

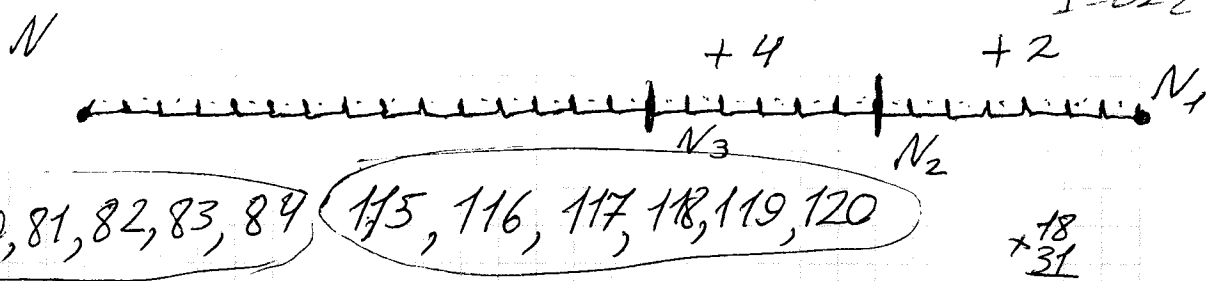
$\begin{array}{r} +8 \\ +7 \\ +6 \\ +5 \\ +4 \\ +3 \\ +2 \\ +1 \end{array}$ +36

$\begin{array}{r} +24 \\ +21 \\ \hline 24 \\ +48 \\ \hline 504 \end{array}$

$\begin{array}{r} \times 36 \\ \times 21 \\ \hline 21 \\ +36 \\ \hline 72 \\ +756 \end{array}$

$27 + 36 + 12 + 7$

$\begin{array}{r} \times 32 \\ 18 \\ \hline 288 \\ 32 \\ \hline 502 \end{array} \begin{array}{l} 12 \\ 2 \\ \hline 14 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 34 \\ \hline 768 \end{array}$



43, 44, 45, 46, 47, 48

$\neq 85, 55, 25, 86, 56, 26,$
 $87, 57, 27$
 $\neq 88, 58, 28$
 $89, 59, 29$
 $30, 60, 90$

$\begin{array}{r} 18 \\ + 31 \\ 18 \\ \hline 54 \\ 558 \overline{) 16} \\ 3 \end{array}$

$x \cdot t \cdot 28 = 420$

$\begin{array}{r} \times 33 \\ 21 \\ \hline 33 \\ 66 \\ \hline 693 \end{array}$

- 10 ; ~~21~~
- 18 ;
- 17 ; $19 \cdot 1 \frac{15}{17} = 19 \cdot \frac{32}{17}$
- 16 ; $18 \cdot \frac{11}{16} = 18 \cdot \frac{31}{16}$
- 15 ;
- 14 ;
- 13 ;
- 12 ;
- 11 ;

$\neq 49, 50, 51, 52, 53, 54$
 $19, 20, 21, 22, 23, 24$

$\neq 18, 17, 16, 15, 14, 13$

12, 11, 10, 9, 8, 7

$8 + 7 = 15 + 9 = 24 + 10 = 34 + 11 = 45 + 12 = 57 + 13 = 100$

$44 + 45 = 89 + 46 = 135 + 47 = 182 + 48 = 230$

$79 + 80 = 159 + 81 = 240 + 82 = 322 + 83 = 405 + 84 =$
 $= 489$

$115 + 116 = 231 + 117 = 348 + 118 = 466 + 119 = 585$

$585 + 120 = 705$

7 чел

$1035 + 489 = 1524$

9 чел · 3 часа 15 грней.

270 кал. раб.
140

$\begin{array}{r} \times 28 \\ 21 \\ \hline 28 \\ 56 \\ \hline 588 \end{array}$

11 чел

1 чел · 1 час = 28

3 чел · 1 час = 28

3ч. 28г. = $\frac{3}{84}$ в день

4ч. 21г 5 чел · 2 час =

N	t	28	7 × 4	<u>84</u>
N + 2	t + 1	21	7 × 3	420
N + 6	t + 2	15	5 × 3	

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

9999
9999 XX

$$\frac{9+8+8+7}{32}$$

..... XXX

$$\frac{+8+8+6+6+7+5+4}{16+16+17}$$

$9 \cdot \frac{15}{9} =$

$8 \cdot \frac{15}{8} = 1,875$

$\frac{49}{5}$

$19 \cdot \frac{15}{19}$

$10 \cdot 1\frac{2}{3}$

$10 \cdot 28,75$

$+5$

$21 \cdot 1\frac{15}{19}$

$11 \cdot 22\frac{2}{3}$

$6 \cdot \frac{15}{6} = 2,5$

86

$+12$

$8 \cdot 3,5 = 28t_1$

$18 \cdot \frac{5}{8}$

$t_1 + 1x$
 $N = 000 \dots + 2$
21 день

0 0 0
28g

$30 \cdot \frac{1}{2}$

$20 \cdot 1\frac{5}{6}$

$32 - 1$

40

$20 \cdot \frac{3}{4}$

$20 \cdot \frac{11}{6}$

$N + 6$

$14 \cdot \frac{15}{14}$

22.

$5 \cdot 3 = 15$

$t_1 + 2x$

$14 \cdot 1\frac{1}{14}$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 24 \\ \hline 112 \\ 56 \\ \hline 672 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times 24 \\ \hline 84 \\ 42 \\ \hline 504 \end{array}$$

$\frac{220}{6}$

$7 \cdot 4 = 28$

$E_{\text{на}} 15g$

$16 \cdot 2\frac{1}{14}$

36

$4 \cdot \frac{15}{4}$

$32 \cdot \frac{16}{14} = 33$

$4 \cdot 3,75$

$$\begin{array}{r} 32 \\ + 13 \\ \hline 96 \end{array}$$

$28 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 7$

$\times 15$

$6 \cdot 4,75$

$1+9$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 406 \overline{) 14} \\ \underline{28} \\ 136 \end{array}$$

$21 = 3 \cdot 7$

$\times 24$

$24 + 4,5$

$2+8$

$15 =$

$\frac{60}{360}$

$2 \cdot 7,5$

$3+7$

$4+6$

$5+5$

$11 \cdot \frac{15}{11}$

$16 \cdot \frac{15}{16}$

$4 \cdot 8,5 = 3$

28

$11 \cdot 1\frac{4}{11}$

$18 \cdot 1\frac{15}{16}$

$12 \cdot 1\frac{1}{4}$

$\frac{60}{4} = 15$

$13 \cdot 2\frac{4}{14} = 26$

$18 \cdot \frac{270}{16}$

$14 \cdot 2\frac{1}{4} \cdot \frac{14 \cdot 9}{4} = \frac{126}{4} = 31,5$

$\frac{32}{14} \times 13$