МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 1 - 023

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1-С23

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$g(x) = \sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$g(x) = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) - 1 + \cos^2 x + \cos^2 5x + 4$

$g(x) = \frac{\cos 4x}{2} - \frac{\cos 10x}{2} \cancel{-1+} \cos^2 x + \cos^2 5x + 3.$

$\sin 3x \sin 7x = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) = \frac{1}{2}(\cos 4x$ $\quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha \Leftrightarrow 2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha.$

$g'(x) = \frac{\cos 4x}{2} - \frac{\cos 10x}{2} + \cos^2 x + \frac{1+\cos 10x}{2} + 3 =$

$= \frac{\cos 4x}{2} - \cancel{\frac{\cos 10x}{2}} + \frac{1}{2} + \cancel{\frac{\cos 10x}{2}} + \cos^2 x + 3 =$

$= \frac{\cos 4x}{2} + \cos^2 x + \frac{7}{2} = \frac{\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{7}{2} =$

$= \frac{\cos 4x}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + 4 = \cos^2 2x - \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + 4 = \cos^2 2x + 0{,}5\cos 2x + 3{,}5.$

$g(x) = \cos^2 2x + 0{,}5\cos 2x + 3{,}5.$ $\quad [3{,}5] = t^2 + 0{,}5t + 3{,}5.$

$g'(x) = -2\sin 2x \cos 2x \cdot 2 + 2 \cdot 0{,}5(-\sin 2x) = -4\sin 2x \cos 2x - \sin 2x =$

$= -\sin 2x(4\cos 2x + 1).$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ 4\cos 2x = -1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2x = \pi n, n \in \mathbb{Z}. \\ \cos 2x = -\frac{1}{4} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi - \arccos\frac{1}{4}}{2}, \frac{\pi n}{2} \end{array}\right.$

$g'(x) = 2t + 0{,}5$

$2t + 0{,}5 = 0 \Leftrightarrow [t = -0{,}5 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4}.$

1

$-0{,}5$

$0{,}5 \cdot 35$

4

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{1}, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, 5, 6, \cancel{7}$

$g(t) = t^2 + 0{,}5t + 3{,}5$.

$g(3) = 9 + 1{,}5 + 1{,}5 = 14$.

$g(5) = 25 + 2{,}5 + 3{,}5 = 31$. ← max

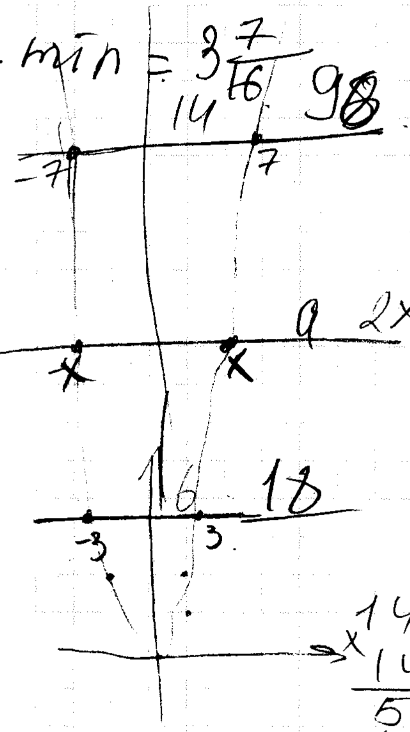
$g(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + 3{,}5 = \frac{7}{2} - \frac{1}{16} = \frac{55}{16} = $ — min $= 3\frac{7}{16}$

Ответ: 31; $3\frac{7}{16}$.

№5.

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$.

№1.



$y = 2x^2$, $y = 98$, $y = 18$, $y = a$.

$2x^2 = 98 \Leftrightarrow x = \pm 7$.

$2x^2 = 18 \Leftrightarrow x = \pm 3$

1) $4x^2 = 196 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 14 \cos 120°$

$4x^2 = 220 + 12 + 2 \cdot 6 \cdot 14 \cdot \frac{1}{2} = 232 + 84 = 316$.

$x^2 = 79 \Leftrightarrow x = \sqrt{79}$. $[8; 9]$

$14 \cdot 14 = 196$; $316 : 4 = 79$.

2) $196 = 4x^2 + 36 - 2 \cdot 2x \cdot 6 \cos 120°$.

$196 = 4x^2 + 36 + 2x \cdot 6$

$4x^2 + 12x - 160 = 0 \;|:4$

$x^2 - 3x - 40 = 0$

$D = 9 + 160 = 169$.

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{3+13}{2} = 8 \leftarrow \text{нельзя} \\ x = \frac{3-13}{2} = -5 \end{array}\right.$

3) $36 = 4x^2 + 196 + 2x \cdot 14$.

$4x^2 + 28x + 160 = 0 \;|:4$.

$x^2 + 7x + 40 = 0$

$D = 49 - 169 = -120 < 0$.

$y = 2x^2 = 158$

~~Ответ: $a = \sqrt{79}$~~.

$y = 2 \cdot 79 = 158$.

Ответ: $y = 158$.

$232 + 84 = 316$; $316 : 4$

$D = 169$; $49 \cdot 4 = 280 + 36$; $196 + 36 = 232$

$h = \frac{-3+13}{2} = 5$; $\frac{56}{16} = \frac{7}{2}$

$h = \frac{-3-13}{2} = -16$.

$x^2 = 79$. $x = \sqrt{79}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1-023

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

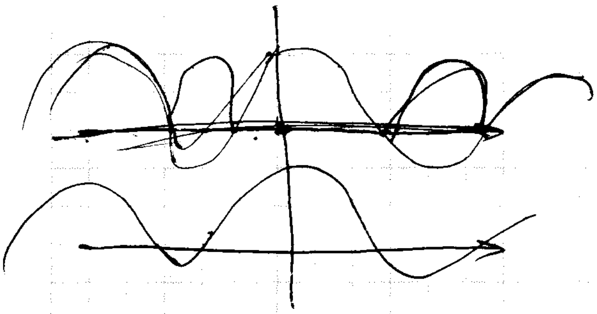
Парабола $y=2x^2$ симметрична относительно оси Oy.

$y=2x^2$ и $y=98$ пересекаются ~~в точках~~ при $2x^2=98 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=-7 \end{array}\right.$ ~~в точках A~~

$y=2x^2$ и $y=18$ пересекаются при $2x^2=18 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Т.к. $y=2x^2$ сим-на отн-но оси ординат, то парабола $y=2x^2$ пересекает прямую $y=a$ ~~в точка~~ ~~$x=a$ и $x=-a$~~ при $x=m$, и $x=-m$.

Обозначим



$1-0,5+3,5=4,5-0,5=4.$

$1-0,5+3,5=4$

$(0): 0+0+3,5=3,5.$

$(1): 1+0,5+3,5=5.$

$\left(\frac{7}{2}\right)^2+\frac{7}{2\cdot 2}+\frac{7}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1-C23

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3. $x_1 x_2 x_3 \ldots x_{17}$.

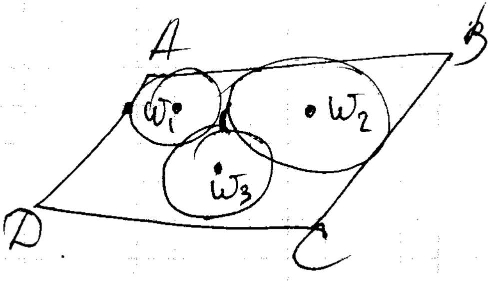
~~abcd~~ $A_{10}^3 = \frac{10!}{3!} = 4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10 = 20\cdot42\cdot72\cdot10\cdot10 =$

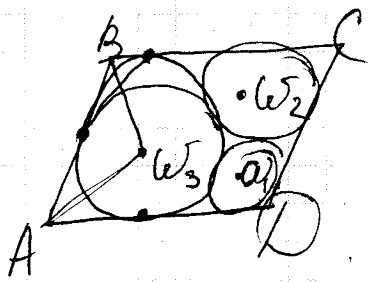
$= 20\cdot100\cdot3024 =$

$= 6048000$

$$\begin{array}{r} \times\ 42 \\ 72 \\ \hline 84 \\ 294 \\ \hline 3024 \end{array}$$

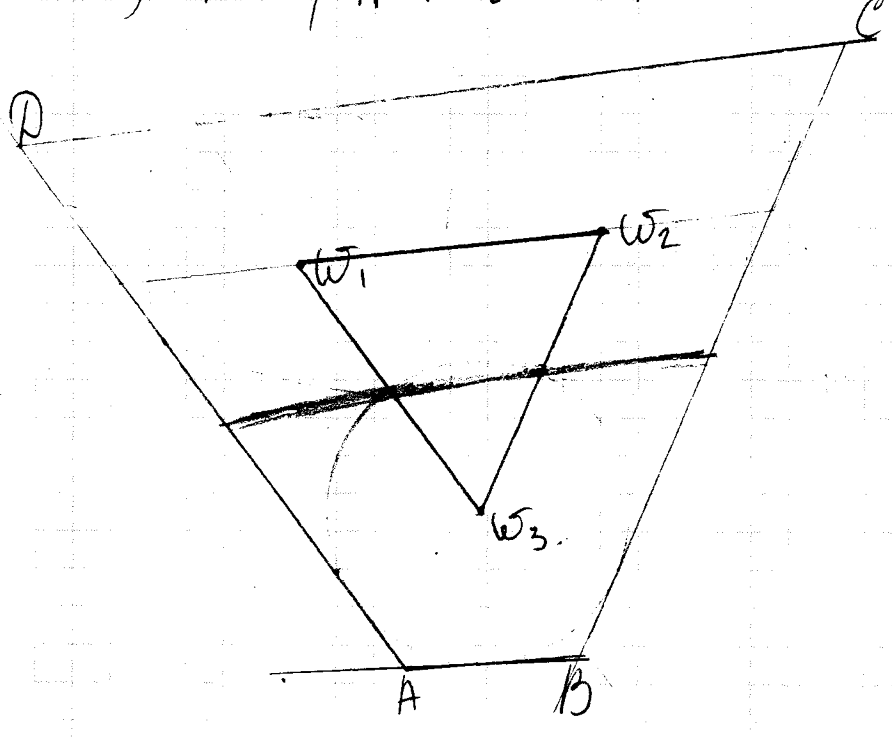
№4.





а) $AD + BC = AB - CD = 12$.

в) $|AB|$, $|AO||OB| = 58$.

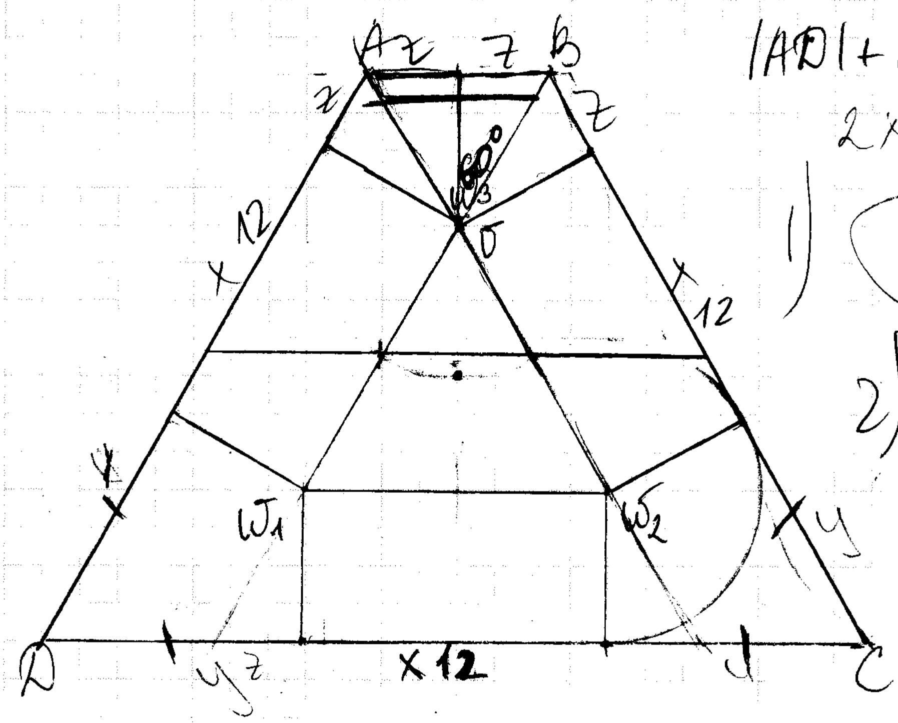


☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$MM_1 = 3R$

$|AD| + |BC| = 2x$

$2x = 12 + |AB| + |CD|$

1) $r = 6$.

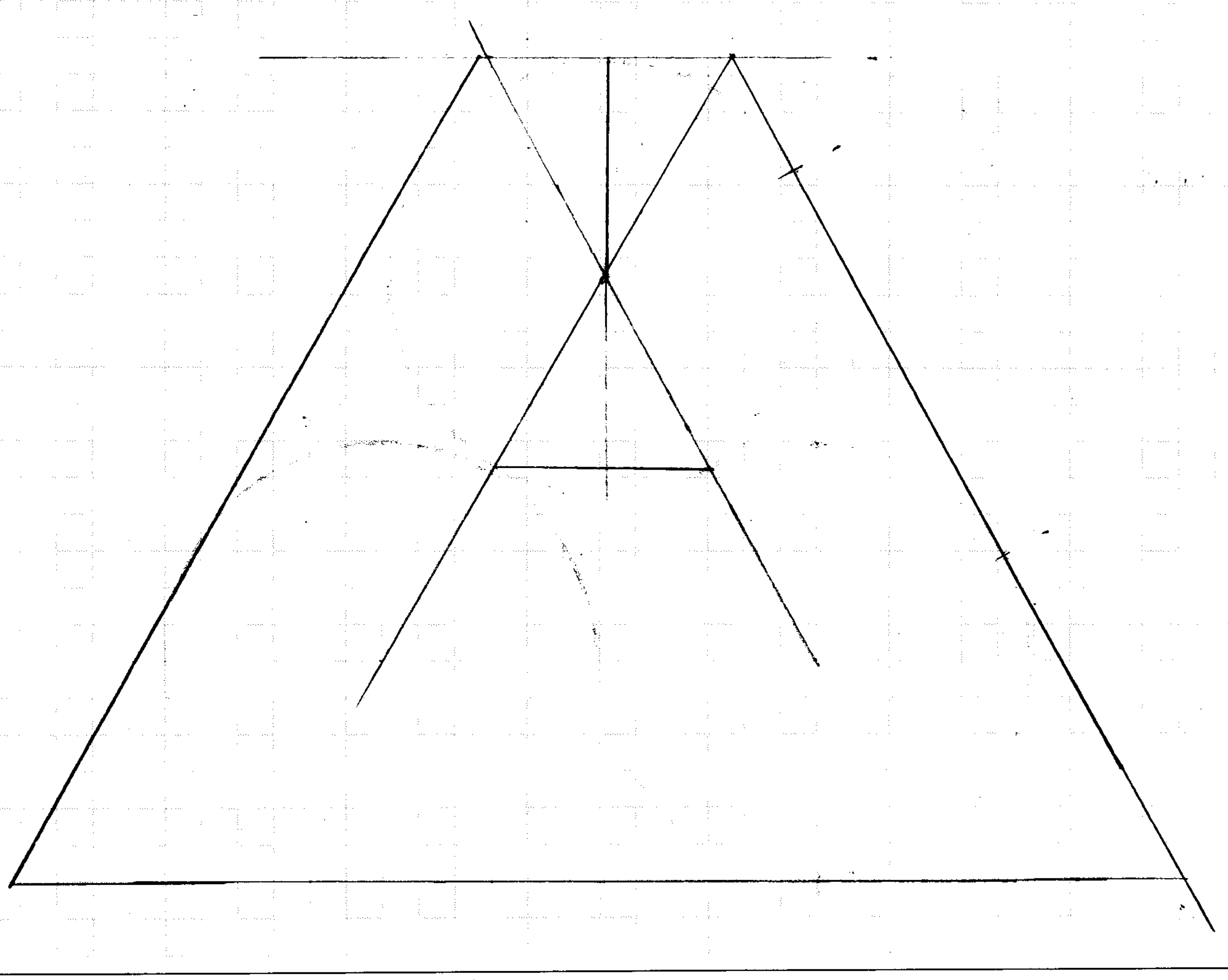
2) 60°

3) $\frac{1}{2}\sin 60^\circ \cdot 58 =$

$= \frac{58\sqrt{3}}{4} = \frac{29\sqrt{3}}{2}$ S

$\frac{1}{2} \cdot 6\,|AB| = \frac{29\sqrt{3}}{2}$

$|AB| = \frac{29\sqrt{3}}{6}$.



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

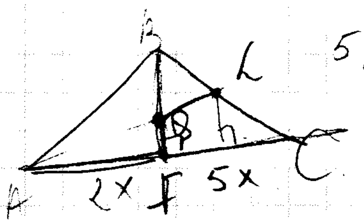
1-С23

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

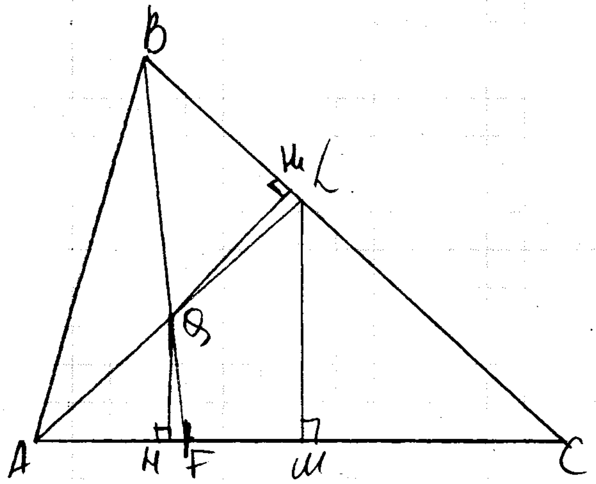


$|AF|:|FC| = 2:5.$

$BF \cap AL = Q$

$QM = 6$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12}.$



$|QM_1|$ $|BL|$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№7. 25–30 19–24 13–18 7–12 I 6

[1; 45], [46; 90], [91; 135], [136; 180], [181; 225].

Если из I выбрали 1, то нельзя выбрать

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$, $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$, $b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$, $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6$,

$d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6$, $l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 l_6$.

Если выбрали I 6 целых чисел из каждого, то в ост-ых пром, нельзя выбрать I 6 целых чисел

181, 182, 183, 184, 185, 186, | 142, 143, 144, 145, 146, 147, |
103, 104, 105, 106, 107, 108 | 64, 65, 66, 67, 68, 69 |
| 25, 26, 27, 28, 29, 30 |

$S = 3(2\cdot181+5+142\cdot2+5+103\cdot2+5+64\cdot2+5+25\cdot2+5) =$

$= 3(2(181+142+103+64+25)+25) =$

$= 3(2(181+89+245)+25) = 3(2(270+245)+25) =$

$= 3(540+490+25) = 3\cdot1055 = 3000+150+15 = 3165.$

0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

$A_{10}^3 = \frac{10!}{3!}$

11 вар. для 7·8

$20\cdot42\cdot72\cdot9 = 180.$

$A_9^3 = \frac{9!}{3!}$

$\begin{array}{r} \times\ 42 \\ 42 \\ \hline 144 \\ 288 \\ \hline 3024 \end{array}$

$\begin{array}{r} \times\ 3024 \\ 18 \\ \hline 24192 \\ 3024 \\ \hline 54432 \end{array}$

$\begin{array}{r} 34 \\ +49 \\ \hline 1030 \end{array}$

1030+25.

2) l лежит напротив 120°.

$l^2 = m^2 + k^2 - 2mk\cos 120^\circ$

$4n^2 = 196 + 36 + 6 \cdot 14$

$4n^2 = 232 + 84$

$n^2 = \frac{316}{4}$

$n = \pm\sqrt{79}$

Т.к. $n \geq 0$ по условию, то $n = \sqrt{79}$

$\sqrt{79} + 6 \geq 14$, сл-но, выполняется неравенство Δ-ка.

Зн-т, при $n = \sqrt{79}$ можно получить Δ-к с углом 120°.

$y = 2 \cdot 79 = 158$

Тогда $a = 158$.

3) k лежит напротив 120°.

$k^2 = m^2 + l^2 - 2ml\cos 120^\circ$

$36 = 196 + 4n^2 + 28n$

$4n^2 + 28n + 160 = 0$

$n^2 + 7n + 40 = 0$

$n \in \varnothing$

Зн-т, k не может лежать напротив 120°.

Зн-т, только при $a = 158$, парабола $y = 2x^2$ отсекает на прямых $y = 98$, $y = 18$, $y = a$ отрезки, из к-ых можно составить Δ-к с углом 120°.

Ответ: 158.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Парабола $y=2x^2$ симметрична от-но оси ординат, сл-но, она пересекает прямую $y=a$ в точках симметричных от-но Oy.

$y=2x^2$ пересекает прямую $y=98$ при $2x^2=98 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7 \\ x=-7 \end{array}\right.$

Обозначим отрезок, отсекаемый на $y=98$, как m, тогда $m=14$.

$y=2x^2$ пересекает прямую $y=18$ при $\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Обозначим отрезок, отсекаемый на $y=18$, как k, тогда $k=6$.

Пусть парабола $y=2x^2$ пересекает прямую $y=a$ при $\left[\begin{array}{l} x=n \\ x=-n \end{array}\right.$ где $n \geq 0$

Обозначим отрезок, отсекаемый на $y=a$, как l, тогда $l=2n$

Рассмотрим 3 случая расположения угла в $120°$ и отрезков. Т.к. нам нужен треугольник, то воспользуемся теоремой косинусов.

1) m лежит напротив $120°$:

$m^2=l^2+k^2-2lk\cos 120°$

$196=4n^2+36+2n\cdot 6$

$196=4n^2+36+12n$

$4n^2+12n-160=0$

$n^2+3n-40=0$

$\left[\begin{array}{l} n=5 \\ n=-8 \end{array}\right.$ Т.к. $5+6\leq 14$, то не вып-ся нер-во треугольника

$n=-8$ не соотв. условию $n\geq 0$ сл-но, m не лежит напротив $120°$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

1-023

№3.

Если „8" ровно 7 и они идут подряд, то примем семь „8" за 1 единицу.

Тогда кол-во 17-значных чисел из „0", „7" и „8" будет равно

$A_{11}^4 = \frac{11!}{4!} = 5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11$

Т.к. „0" не может быть в начале числа, то отнимем от A_{11}^4 варианты с началом „0".

Кол-во вариантов, начинающихся с „0"

$A_{10}^4 = \frac{10!}{4!} = 5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10.$

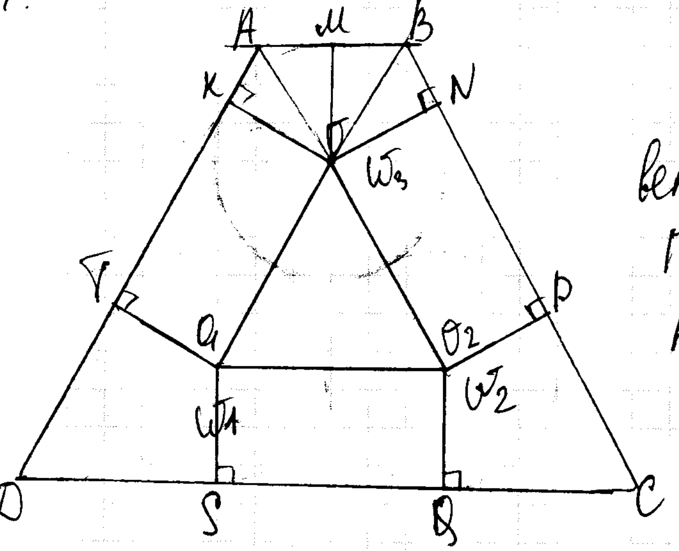
$A_{11}^4 - A_{10}^4 = 5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot10 = 30\cdot100\cdot72\cdot9 = 1000\cdot27\cdot72 =$

$= 1944000.$

$$\begin{array}{r} \times\ 72 \\ 27 \\ \hline 504 \\ 144 \\ \hline 1944 \end{array}$$

Ответ: 1944000.

№4.



Пусть ω_3 касается [AB], [BC], [AD] в точках M, N, K, соответственно.

Пусть ω_2 касается [BC], [CD] в точках P, Q соответственно.

Пусть ω_1 касается [CD], [AD] в точках S, T соответственно.

Пусть O_1 и O_2 - центры окр. ω_1 и ω_2 соотвественно.

$KTOO_1 = OO_2NP = O_1O_2QS$, причем $|OK|$ равен радиусу, а $|TK|$ - диаметру.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$g(x) = \sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$g(x) = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) - 1 + \cos^2 x + \frac{1+\cos 10x}{2} + 4$.

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x - \cancel{\frac{1}{2}\cos 10x} + \frac{1}{2} + \cancel{\frac{\cos 10x}{2}} + 3 + \cos^2 x$.

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x + \cos^2 x + 3\frac{1}{2}$.

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1+\cos 2x}{2} + 3\frac{1}{2}$.

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{\cos 2x}{2} + 4$.

$g(x) = \frac{2\cos^2 2x - 1}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + 4$

$g(x) = \cos^2 2x + 0{,}5\cos 2x + 3{,}5$.

Пусть $\cos 2x = t$, $t \in [-1;1]$.

$g(t) = t^2 + 0{,}5t + 3{,}5$.

$E(g) = [3{,}5; 5]$

$g'(t) = 2t + 0{,}5$.

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t + 0{,}5 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{4}$

$g(3{,}5) = \frac{49}{4} + \frac{7}{4} + 3{,}5 = \frac{56}{4} + 3{,}5 = 17{,}5$.

$g(5) = 25 + 2{,}5 + 3{,}5 = 31$

$g(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + 3{,}5 = \frac{7}{2} - \frac{1}{16} = \frac{55}{16} = 3\frac{7}{16}$

$g_{min} = 3\frac{7}{16}$, $g_{max} = 31$.

Ответ: $3\frac{7}{16}$; 31.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Т.к. $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ равные окружности, то по теореме о касательных $|AK|=|AM|=|MB|=|BN|$, $|DT|=|DS|=|QC|=|CP|$.
Пусть $|AK|=x$, $|DT|=y$, радиус обозначим r.
$|AB|=2x$, $|DC|=2y+2r$, $|AD|=|BC|=x+2r+y$.
$|AD|+|BC|-|AB|-|CD|=12$.
$\cancel{2x}+4r+\cancel{2y}-\cancel{2x}-\cancel{2y}-2r=12$.
$2r=12$
$r=6$.
Зн-т, радиус равен 6.
Ответ: 6.

№5.
$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)\geq 1$
$(\sqrt{x+7}-x-1)(x+4-1)\geq 0$
$(\sqrt{x+7}-x-1)(x+3)\geq 0$

№7.

[1; 45], [46; 90], [91; 135], [136; 180], [181; 225].

Будем считать, что нам даны арифм. прогрессии a, b, c, d, e соответственно.

Числа делящиеся на 45 из данных промежутков, это 45, 90, 135, 180, 225.

Если в прогрессии a выбрать 5 член и из любой другой данной прогрессии выбрать 5 член, то их разность будет кратна 45.

Зн-т, если из любых двух прогрессий выбрать одинаковый по порядку член, то их разность будет кратна 45.

Например: $c_n = 91 + d(n-1)$, $e_n = 181 + d(n-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e_n - c_n = 181 + d(n-1) - 91 + d(n-1) = 90 \vdots 45$.

Значит, нужно из этих промежутков выбирать числа стоящие на разных номерах.

Т.к. [181; 225] имеет самые большие числа, то нужно выбрать из них ~~самые~~ наименьшие 6, т.е. на 1-6 позициях. С пром. [136; 180] нужны числа с 7 по 12 позиции, [91; 135] – 13–18 поз., [46; 90] – 19–24 поз., [1; 45] – 25–30 поз.

Их сумма равна $3 \cdot (2 \cdot 181 + 5 + 142 \cdot 2 + 5 + 103 \cdot 2 + 5 + 64 \cdot 2 + 5 + 25 \cdot 2 + 5) = 3(2(181 + 142 + 103 + 64 + 25) + 25) =$

$= 3(2(181 + 89 + 245) + 25) = 3(2(270 + 245) + 25) =$

$= 3(540 + 490 + 25) = 3 \cdot 1055 = 3165$.

Ответ: 3165

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)