МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР 10-001

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры “0”, “7” и “8” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “8” ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

10-001

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

1) Найдем координаты концов отрезков, т. е. координаты т. пересечения параболы с прямыми. Найдем длины, зная что $y=98$, $y=18$, $y=a$ параллельны Ox.

Отрезок ①:

$y=98$; $2x^2=98$; $\left[\begin{array}{l}x=-7\\x=7\end{array}\right.$; Его длина соотв. 14

Отрезок ②: $y=18$; $2x^2=18$; $\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-3\end{array}\right.$ длина - 9

Отрезок ③: $y=a$; $2x^2=a$; $\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt{\frac{a}{2}}\\x=\sqrt{\frac{a}{2}}\end{array}\right.$ длина: $2\sqrt{\frac{a}{2}}=\sqrt{2a}$

Если ∃Δ по условию, то выполняется теорема о косинусе. Рассмотрим каждый угол в отдельности;

$\cos(120°)=\cos(90+30)=-\sin 30=-\frac{1}{2}$

2) 2.1. $(\sqrt{2a})^2=14^2+6^2+\frac{1}{2}\cdot14\cdot6=196+36+42=274$

$a=\frac{274}{2}=137.$

2.2. $14^2=(\sqrt{2a})^2+6^2+\frac{1}{2}\cdot6\cdot\sqrt{2a}=2a+36+3\sqrt{2a}=196$

Пусть $\sqrt{2a}=t$; $t\geq0$

$t^2+3t-160=0 \Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l}\cancel{t=-\frac{17}{2}}\\\cancel{t=\frac{11}{2}}\end{array}\right.$

$D=9+640=649$

$t_1=\frac{-3-\sqrt{649}}{2}<0$ - не подходит

$t_2=\frac{-3+\sqrt{649}}{2}>0$ +, $\sqrt{2a}=\frac{-3+\sqrt{649}}{2}$, $2\sqrt{2a}=-3+\sqrt{649}$;

$8a=9-6\sqrt{649}+649=640-6\sqrt{649}$

$a=80-\frac{3}{4}\sqrt{649}.$

2.2. $6^2=(\sqrt{2a})^2+14^2+\frac{1}{2}\cdot14\cdot\sqrt{2a}$; Пусть $\sqrt{2a}=t\geq0$

$t^2+7t+160=0 \Rightarrow S=\varnothing$

$D=49-640<0$

Ответ: $a\in\left\{137; 80-\frac{3}{4}\sqrt{649}\right\}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№3

Зная, что "8" повторяется ровно 7 раз и подряд, запишем число в общем виде:

$$\underbrace{\ldots\ldots}_{x}\underbrace{8888888}_{7}\underbrace{\ldots\ldots}_{10-x}$$

x цифр "0" и "7" $10-x$ цифр "0" и "7"

1) $x=0$

$$\underbrace{8888888}_{7\text{ цифр}}\underbrace{\qquad\qquad}_{10\text{ цифр "0" и "7"}}$$

Всего есть 2^{10} способов расставить нули и 7-рки в оставшихся местах, 2 из которых не подходят (все нули или все семерки)

$\Rightarrow$ $n_1 = 2^{10}-2$ - кол-во способов

2) $x>0$; $x\le 10$

Поскольку число ~~н~~ 17-значное, то 1 цифра не ноль $\Rightarrow$ это 7 число!

$$7\underbrace{\qquad}_{x-1}\underbrace{8888888}_{7}\underbrace{\qquad}_{10-x}$$

; 9 позиций и имеем 2^9 вариантов, 2 из которых исключаем (все нули или все семерки)

$n_k = 2^9-2$; $\forall x\in(0;10]$ кол-во способов n_k такое же

Итог:

$$N = 2^{10}-2+10(2^9-2) = 2^{10}-2+5\cdot 2^{10}-20 = 6\cdot 2^{10}-22$$

Ответ: $N = 6\cdot 2^{10}-22$ способа

№5

$$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)\ge 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x+7}-x>1 & (1)\\ x+4\ge\sqrt{x+7}-x\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x+7}-x\in(0;1) & (2)\\ x+4\le\sqrt{x+7}-x\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\boxed{ОДЗ:\ \begin{cases}x\ge -7\\ x\ge -4\end{cases}\Rightarrow x\ge -4}$$

$$(1)\begin{cases}\sqrt{x+7}-x>1 & (1.1)\\ x+4\ge\sqrt{x+7}-x & (1.2)\end{cases}$$

(1.1) $\sqrt{x+7}-x>1$; $\sqrt{x+7}>x+1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+7>x^2+2x+1\\ x\ge -1\end{cases}\\ x\le -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+x-6<0\text{; корни: }2;-3\\ x\ge -1\end{cases}\\ x\le -1\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in[-3;2]\\ x\ge -1\end{cases}\\ x\le -1\end{array}\right. \underset{+ОДЗ}{\Leftrightarrow} x\in[-7;2]$$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.2

$x+4 \geq \sqrt{x+7}-x$

$2x+4 \geq \sqrt{x+7} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 4x^2+16x+16 \geq x+7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 4x^2+15x+9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Delta = \cancel{225-176} = 9^2$

$x_1 = -3$

$x_2 = -\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x \in (-\infty; -3] \cup [-\frac{3}{4}; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-\frac{3}{4}; +\infty)$

$x \in [-\frac{3}{4}; +\infty)$

Итог: $\begin{cases} x \in [-7; 2] \\ x \in [-\frac{3}{4}; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-\frac{3}{4}; 2]$; $x \in [-\frac{3}{4}; +2)$; $x \in [-\frac{3}{4}; 2)$

2

$\begin{cases} \sqrt{x+7}-x \in (0;1) \\ x+4 \leq \sqrt{x+7}-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+7}-x > 0 \\ \sqrt{x+7}-x < 1 \\ x+4 \leq \sqrt{x+7}-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+7}-x > 0 \quad (2.1) \\ x \in (-\infty; -7) \cup (2; +\infty) \text{ - ранее решали} \\ x+4 \leq \sqrt{x+7}-x \quad (2.2) \end{cases}$

2.1 $\sqrt{x+7}-x > 0$

$\sqrt{x+7} > x$; $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ x+7 > x^2 \end{cases} \\ x < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-x-7 > 0 \end{cases} \\ x < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in (-\infty; \frac{1-\sqrt{29}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{29}}{2}; +\infty) \end{cases} \\ x < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$x^2-x-7 \geq 0$

нули: $x^2-x-7=0$

$\Delta = 1+28 = 29$

$x_1 = \frac{1-\sqrt{29}}{2}$

$x_2 = \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$\frac{1-\sqrt{29}}{2}$, 0, $\frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \frac{1+\sqrt{29}}{2} \\ x < 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (\frac{1+\sqrt{29}}{2}; +\infty)$

2.2 $x+4 \leq \sqrt{x+7}-x \Leftrightarrow$

$2x+4 \leq \sqrt{x+7}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cancel{x+4 \geq 0} \; x \geq -2 \\ 4x^2+16x+16 \leq x+7 \end{cases} \\ x < -2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq -2 \\ x \in [-3; -\frac{3}{4}] \text{ ранее решали} \end{cases} \\ x < -2 \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow x \in [-3; -\frac{3}{4}]$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [-2; -\frac{3}{4}] \\ x < -2 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\frac{3}{4}]$

② Итог: $\begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1+\sqrt{29}}{2}; +\infty\right) + ОДЗ \\ x \in (-\infty; -\frac{3}{4}] \\ x \in (-\infty; -7) \cup (2; +\infty) \end{cases}$ ~~$x \in [-7; -2]$~~ $x \in \varnothing$

Объединяя, получаем: ~~$S = [-7; -1] \cup$~~

~~$S = [-\frac{3}{4}; +\infty) \cup \varnothing = [-\frac{3}{4}; +\infty)$~~

$S = [-\frac{3}{4}; 2) \cup \varnothing = [-\frac{3}{4}; 2)$

Ответ: $S = [-\frac{3}{4}; 2)$

№7

Пусть Пиноккио выбрал числа $x_1 \ldots x_{30}$, где

$x_1 \ldots x_6$ из $[1, 45]$

$x_7 \ldots x_{12}$ из $[46; 90]$

$x_{13} \ldots x_{18}$ из $[91; 135]$

$x_{19} \ldots x_{24}$ из $[136; 180]$

$x_{25} \ldots x_{30}$ из $[181; 225]$

Введем числа $r_i = x_i \bmod 45$ (остаток от деления)

Примечание: При $x_i \bmod 45 = 0$ скажем что $r_i = 45$ это не влияет на решение, на договорился

Итак:

$\sum_{i=1}^{30} x_i \to \min$; ~~$\sum_{i=1}^{30} x_i = 12$~~

Исходя из условия:

$x_1 \ldots x_6$ представили как r_i

$x_7 \ldots x_{12}$ как $45 + r_i$

$x_{13} \ldots x_{18}$ как $90 + r_i$

$x_{19} \ldots x_{24}$ как $135 + r_i$

$x_{25} \ldots x_{30}$ как $180 + r_i$

где r_i соответствует x_i

Так же: ~~$x_i - x_j$~~

$\forall i, j, x_i > x_j$ имеем

$x_i - x_j$ не дел. на 45

$45k + r_i - 45n - r_j$ не дел. на 45

k, n - натуральные числа; ~~которые~~

Имеем: $r_i - r_j + 45(k - n)$ не дел. на 45 и $r_i - r_j \le 45$ (остатки)

$\Rightarrow r_i \neq r_j \ \forall i, j$. (усл. 1)

$\sum_{i=1}^{30} x_i = 6 \cdot 0 + 6 \cdot 45 + 6 \cdot 135 + 6 \cdot 90 + 6 \cdot 180 + \sum_{i=1}^{30} r_i =$

$= 6 \cdot 450 + \sum_{i=1}^{30} r_i = 2700 + \sum_{i=1}^{30} r_i$; чтобы минимизировать сумму положим $r_i = i$, чтобы выполнить усл. 1

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S=\sum_{i=1}^{30} x_i \to \min$; $S = 2700 + \sum_{i=1}^{30} i = 2700 + \frac{30\cdot 31}{2} = 2700+15\cdot 31 =$

$= 2700+465 = 3165$

Ответ: наименьшее знач. – 3165.

№2

$g(x) = \sin 3x\cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$= \sin\frac{10x-4x}{2}\sin\frac{10x+4x}{2} - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$= \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$= \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1 - 2\cos^2 5x + 1) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$= \cos^2 2x - \cancel{\cos^2 5x} - \sin^2 x + \cancel{\cos^2 5x} + 4 =$

$= \cos^2 2x - \frac{1-\cos 2x}{2} + 4 = \cos^2 2x + \frac{\cos 2x - 1}{2} + 4$

Поскольку $\cos 2x$ принимает <u>все</u> значения от $[-1;1]$

введём $t=\cos 2x$; $t\in[-1;1]$

$g(t) = \cancel{\cos}\, t^2 + \frac{t}{2} + \frac{7}{2}$; Это парабола и её точка минимума есть вершина

$x_в = \frac{-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$; $g_{min} = g(x_в) = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{7}{2} = \frac{7}{2} - \frac{1}{16} = \frac{55}{16}$

Достигается эта точка при $\cos 2x = -\frac{1}{4}$

$\boxed{2x = \arccos(-\frac{1}{4})}$; $x = \frac{\arccos(-\frac{1}{4})}{2}$

$\cancel{x\in \frac{\arccos(-\frac{1}{4})}{2}}$

Поскольку ~~$D_g\ g(t)\ t\in$~~

$t\in[-1;1]$ и, то $g_{max} = \max(g(1), g(-1))$ – парабола принимает max. значение на одном из концов интервала, т.к. при $t\geq 0$; $g(t)\nearrow$ строго и $g_{max} = g(1)$ на $t\in[0;1]$

$t<0$; $g(t)\searrow$ строго и $g_{max} = g(-1)$ на $t\in[-1;0]$

$g(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 5$

$g(-1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 4$

$g_{max} = 5$; Достигается max, например при $x=0$

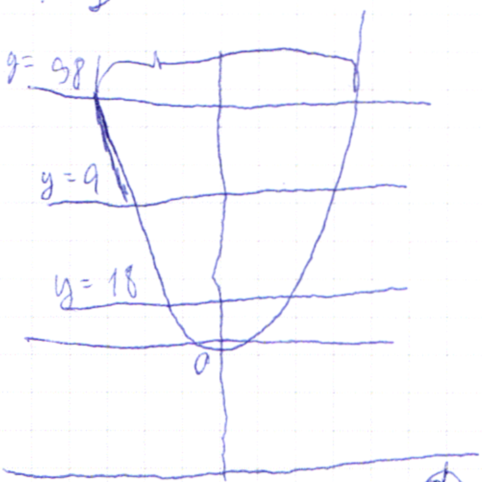
Ответ: $g_{max} = 5$; $g_{min} = \frac{55}{16}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 :



Найдем т. пересечения

1 прямая

~~2x~~

$2x^2 = 98$

$x^2 = 49$

$x = \pm 7$

2 прямая :

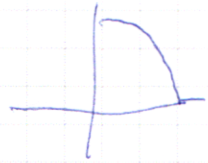
$2x^2 = 18$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

3. прямая — $x^2 = \frac{a}{2}$

$98 : 2 = 49$; $14 \cdot 14 = 196$



Длины:

14

6

$\sqrt{\frac{a}{2}}$

$14 \cdot 6 = 84$

$\cos(120^\circ) = \cos(90+30) =$

$= -\sin 30 = -\frac{1}{2}$

по т. косинуса:

1) $\frac{a}{2} = 14^2 + 6^2 + \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 6 =$

$\frac{a}{2} = 196 + 36 + \cancel{8} \cdot 42 = 274$

$a = 274 \cdot 2 = 548$

$196 + 36 = 232$; $232 + 42 = 274$; $274 \cdot 2 = 548$

2) $196 = \frac{a}{2} + 6^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{2}} \cdot 6$

$160 = \frac{a}{2} + 3\sqrt{\frac{a}{2}}$;

$\sqrt{\frac{a}{2}} = t > 0$

$160 \cdot 4 = 640$; $196 - 36 = 160$

$9 + 640 = 649$

$t^2 + 3t - 160 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\frac{17}{2} < 0 \\ t = \frac{11}{2} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{2}} = \frac{11}{2}$; $\frac{a}{2} = \frac{121}{4}$

$a = \frac{121}{2}$

$\frac{-3-14}{2}$; $\frac{-3+14}{2} = \frac{11}{2}$

$\frac{-3-13}{2} = -\frac{16}{2} = -8$

$\frac{-3+13}{2} = 5$

2) $36 = 196 + \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{2}} \cdot 14$

$0 = 160 + \frac{a}{2} + 7\sqrt{\frac{a}{2}}$

$t = \sqrt{\frac{a}{2}} > 0$

$t^2 + 160 + 7t = 0 \Rightarrow S = \varnothing$

$a \in \left\{548; \frac{121}{2}\right\}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№2

$g(x) = \sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

~~$g'(x) = 3\cos x$~~

$g'(x) = \cancel{3\sin}\ 3\cos 3x \sin 7x + 7\cos 7x \sin 3x - 2\sin x \cos x - 2\sin 5x \cos 5x =$

$= 3\cos 3x \sin 7x$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

~~$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(\alpha - \beta + \beta)$~~ $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\alpha + \beta = 14$
$\alpha - \beta = 6$

$\alpha = 10$
$\beta = 4$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x =$
$= 2\cos^2 x - 1$

$\cos^2 x$

~~$g'(x) = 3\cos 3x \sin 7x$~~

$g(x) = \sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$= \sin(5x-2x)\sin(5x+2x) \cancel{+\cos^2} - \sin^2 x + \cos^2 5x + \cancel{4} =$

$= (\sin 5x \cos 2x - \cos 5x \sin 2x)(\sin 5x \cos 2x + \cos 5x \sin 2x) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$= \sin^2 5x \cos^2 2x - \cos^2 5x \sin^2 2x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$\sin\alpha + \sin\beta$

№3

$\underbrace{\cancel{7}}_{x}\ 888888\ \underbrace{\qquad}_{10-x}$

$x = 0$
$x = 1$
$x = 2$
$x = 3$
$x = 4$
$x = 5$
$x = 6$
$x = 7$
$x = 8$
$x = 9$
$x = 10$

Итого - 11

Пусть x фикс.

10 позиций $0, 7$

способов выбрать - $\cancel{9}$ сит.

~~пусть x нулей~~, ~~9-x семерок~~

2^{10} вариантов поставить 0 и 7

$(2^{10}-2)$ - убираем 2 варианта где все ~~двойки~~ нули или семерки

$x = 0$ – $2^{10}-2$ вар.

$x > 0$; $2^{\cancel{9}}-2$ вар (первая семерка)

Итого: $(2^{10}-2) + 10(2^9-2) = 2^{10}-2+10 \cdot 2^9 - \cancel{8}\,28 = 2^{10} + 5\cdot 2^{10} - \cancel{22} =$

$= \underline{6\cdot 2^{10} - 22}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

10-001

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$g(x) = \sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$g'(x) = \cancel{3\sin 3x \, s}$

$3\cos 3x \sin 7x + 7 \cos 7x \sin 3x \; \cancel{- \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =}$

$- 2\sin x \cos x - 2 \cdot 5 \cdot \cos 5x \sin 5x =$

$= 3\sin 10x + 4\cos 7x \sin 3x - \sin 2x - 10 \sin 10x =$

$= 4\cos 7x \sin 3x - \sin 2x - 7\sin 10x$

$\frac{1}{2}\cos 4x =$
$= \frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1) =$
$= \cos^2 2x - \frac{1}{2}$

$1 - \sin$

$g(x) < 1 - 0 + 1 + 4 = 6$

$\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$

$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ $\quad (2\cos^2 x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$

$\frac{\cos 10x + 1}{2} + \frac{\cos x - 1}{2}$

$g(t) = t^2 + \frac{t}{2} + \frac{7}{2}$

$\sin\alpha + \sin\beta = \cancel{2\sin\frac{\alpha}{2}} \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2}\right) =$

$= \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cancel{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} + \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2} + \cancel{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}$

$= 2\sin$

$\cos\alpha - \cos\beta = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\beta-\alpha}{2}\right) =$

$= \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cancel{- \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}} + \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$

$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\beta-\alpha}{2}$

$\frac{\alpha+\beta}{2} = 6x \qquad \beta = 10x$

$\alpha - \beta = 4x \qquad \alpha = 4x$

$\sin\frac{10x-4x}{2}\sin\frac{10+4x}{2}$

$g(x) = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x) - \sin^2 x$

$+ \cos^2 5x + 4$

$\frac{1}{2}(\cancel{\cos 4x} - 2\cos^2 5x + 1) =$ $\quad 2\cos^2 2x - 1$

$= \cancel{\frac{1}{2}\cos 4x - \cos^2 5x + \frac{1}{2}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

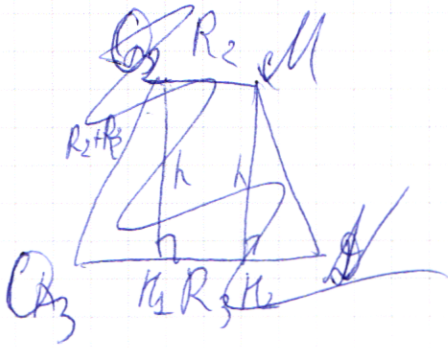
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{DE}+EF+\cancel{FA}+\cancel{BN}+MN+\cancel{CM}-\cancel{BQ}-\cancel{QA}-\cancel{CL}-KL-\cancel{KD}$

$EF+MN-KL=12$



MNO_3O_2 – трапеция

$\cancel{AH_1=\sqrt{\ }}$

$\cancel{h^2 = AH_1^2 + (R_1+R_3)^2 = H_2D^2}$

$h^2 = \cancel{O_3H}\ (R_2+R_3)^2 - O_3H_1^2 = MN^2 - O_3MH_2^2$

$\cancel{O_3H_1^2 - MH_2^2 = (R_2+R_3)^2 - MN^2}$

$(O_3H_1 - MH_2)(R_3-R_2) = (R_2+R_3)^2 - MN^2$

$R_3^2 = \cancel{MH^2}\ MO_3^2 - MN^2$

$R_2^2 = MO_3^2 - (R_2+R_3)^2$

$R_3^2 + MN^2 = R_2^2 + (R_2+R_3)^2$

$\cancel{R_3^2} + MN^2 = R_2^2 + R_2^2 + 2R_2R_3 + \cancel{R_3^2}$

$MN^2 = \cancel{2h}\ 2R_2(R_2+R_3)$

$KL^2 + R_1^2 = R_2^2 + (R_1+R_2)^2$

$KL^2 = 2R_2(R_1+R_2)$

181 182 183 184 185 186

~~136 137 138 139~~

142 143 144 145 146 147

7 8 9 10 11 12

~~225 − 144~~

$16 \cdot 9 = 144$

$225 - 144 = 81$

$147 - 16$

$t^2 + \frac{t}{2} + \frac{7}{2}$

$x_1 = \frac{-15-9}{8} = -\frac{24}{8} = -3$

$x_2 = \frac{-15+9}{8} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$

$y' = 2t + \frac{1}{2} = 0$

$\sqrt{6}+1$

$x = -2$

$152 - 141 = 51$

$2t = -\frac{1}{2}$

$t = -\frac{1}{4}$

$\log_{16} \sqrt{5} + 2^2$

~~112 − 41~~ 16

$y(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{7}{2}$

$\log_1$

$-\frac{3}{4} + 4 \geq \sqrt{\frac{28}{4} - \frac{3}{4}} + \frac{3}{4}$

$\frac{13}{4} \geq \sqrt{\frac{25}{4}} + \frac{3}{4}$

$\frac{13}{4} \geq \frac{5}{2} + \frac{3}{4}$

N7

~~$x_1 \in [1; 45]$~~

~~$x_2 \in [46; 90]$~~

$x_1 .. x_6 \in [1; 45]$

$y_2 .. y_6 \in [46; 90]$

$z_1 .. z_6 \in [91; 135]$

$k_1 .. k_6 \in [136; 180]$

$m_1 .. m_6 \in [181; 225]$

$x_1 .. x_6 \in [1; 45]$

$x_7 .. x_{12} \in [46; 90]$

$x_{13} .. x_{18} \in [91; 135]$

$x_{19} .. x_{24} \in [136; 180]$

$x_{25} .. x_{30} \in [181; 225]$

136 | 45, 135 | 3

141 | 45, 135 | 3, 6

~~$\forall i, j: \; x_i \not\equiv y_j \pmod{45}$ числа не равны по модулю~~

$\forall i, j: \; x_i \not\equiv x_j \pmod{45}$

$\sum_{i=1}^{30} x_i \to \min$

55 | 16, 32 | 3, 23

136 137 138 139 140 141

97 98 99 100 ~~101~~ ~~102~~

181 182 183 184 185 186

7 8 9 10 11 12

$137 + 181 = 318$

~~137 138 139~~

~~143~~

135 | 45, 3

136 137 138 139 140 141

$186 - 147 = 39$

$14 \cdot 4 = 56$

$\frac{1}{4} - 14 = -\frac{55}{4}$

$\frac{1}{16} - \frac{1}{8} + \frac{7}{2} = \frac{7}{2} - \frac{1}{16} \quad \frac{55}{16}$

$-\frac{0}{49} =$

$\frac{\frac{55}{4}}{4} = \frac{55}{16}$

$181 - 136 = 45$

$7 \cdot 8$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

10-001

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+7}-x>1 \\ x+4 \geq \sqrt{x+7}-x \end{cases} \quad 1) \\ \begin{cases} \sqrt{x+7}-x<1 \\ x+4 \leq \sqrt{x+7}-x \end{cases} \quad 2) \end{array}\right.$$

I) $\begin{cases} \sqrt{x+7}-x>1 \\ x+4 \geq \sqrt{x+7}-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-7;2] \\ x \in [-1;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1;2]$

1) $\sqrt{x+7} > x+1$

1.1 $x \geq -1$

$x+7 > x^2+2x+1$

$x^2+x-6<0$

$-3 \quad 2$

$x \in [-1;2]$

1.2 $x<-1$; $x+1<0 \Rightarrow x \in [-7;-1]$

$x \in [-7;2]$

$\sqrt{6}+1$

2) $x+4 \geq \sqrt{x+7}-x$

$2x+4 \geq \sqrt{x+7}$

2.1 $x<-2 \rightarrow S=\varnothing$

2.2 $x \geq -2$

$4x^2+16x+16 \geq x+7$

$4x^2+15x+11 \geq 0$ $\quad D=225-176=7^2$ $\quad x_1 = \frac{-15-7}{8} = -\frac{22}{8} = -\frac{11}{4}$

$x_2 = -\frac{15+7}{8} = -1$

$-\frac{11}{4} \quad -2 \quad -1$

$x \in [-1;+\infty)$

$2,5 \cdot 2,5 = 6,25$

$2<\sqrt{6}<3$

$2<\sqrt{6}<2,5$

$\sqrt{6}+1<$

$\log_{\sqrt{6}+1} 3 > 1$ $\quad \log_7$

ОДЗ:

$\sqrt{x+7}-x \geq 0$

$x \geq -7$

$x \neq 2$

$\cancel{x \in [-7;0) \cup \left[\frac{1+\sqrt{29}}{2};+\infty\right)}$

$x \in \left[-7; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right]$

$\sqrt{x+7} \geq x$ $\quad$ Пусть $x \geq 0$

$x+7 \geq x^2$

$x^2-x-7 \leq 0$

$D = 1+28 = 29$

$x_1 = \frac{1-\sqrt{29}}{2}$

$x_2 = \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$\frac{1-\sqrt{29}}{2} \quad \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$\frac{1-\sqrt{29}}{2} \quad \frac{1+\sqrt{29}}{2}$

$\sqrt{x+7}-x \neq 1$ $\quad 2 \geq \sqrt{6}$

$\begin{cases} \sqrt{x+7} \neq x+1 \\ x \geq -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+7 \neq x^2+2x+1 \\ x \geq -1 \end{cases}$ $\quad x \in [-1;2]$

$\begin{cases} x^2+x-6 \neq 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq -3 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \neq 2$

$\sqrt{7}$

$x \geq 0$

$\sqrt{x+7}-x \leq 0$

$\sqrt{x+7} < x$

$x^2+2x+1<x^2$

$2x+1<0$

$x<-1,5$ $\quad -7 \leq x \leq -4$

$\sqrt{4}$

$x \neq 4$

$x+4 \geq \sqrt{x+7}-x$

$4x^2+16x+16 \leq x+7$

$4x^2+15x+11 \leq 0$

$-\frac{11}{4} \quad -1$

$\sqrt{x+7}-x = x+4 = 1$ $\quad x=-3$

$\sqrt{4}+3$

$15 \cdot 15 = 225$, $\quad 11 \cdot 16 = 176$, $\quad 225-176=49$

$\log_{1+} \frac{15}{11}$ $\quad \frac{121}{16} - \frac{165}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7 промежутки промежутка 1: [1; 45] 4: [136; 180]
$\forall i$ ~~...~~ $z_i \in [1; 45]$ 2: [46; 90] 5: [181; 225]
3 [91; 135]

$x_1 \dots x_6$ есть ~~0 + z_i~~ $0+z_i$ z_i все разные

$x_7 \dots x_{12}$ есть ~~90 + z_i~~ $45+z_i$

$x_{13} \dots x_{18}$ есть $90+z_i$

$x_{19} \dots x_{24}$ — $135+z_i$

$x_{25} \dots x_{30}$ $180+z_i$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 6\cdot 0 + 6\cdot 45 + 6\cdot 90 + 6\cdot 135 + 6\cdot 180 + \sum_{i=1}^{30} z_i =$$

$$= 6(\overbrace{45+90+135+180}^{180}) + \sum_{i=1}^{30} z_i$$

$31 \cdot 15 = 155$, $155 + 31 = 465$

$1+2+3+4$ $\frac{3\cdot 45}{2}$

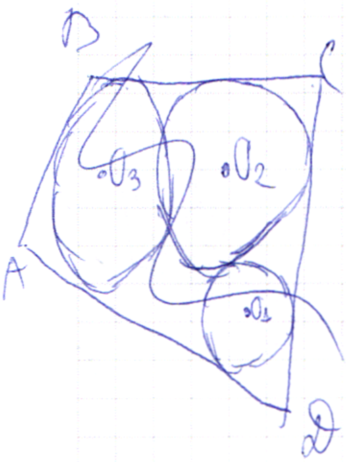
$45+135=180$ $360+90=450$ $450\cdot 6=2700$ $16\cdot 7=112$

$2t+\frac12$ $t=-\frac14$

$$6\cdot 450 + \sum_{i=1}^{30} z_i = 2700 + \sum_{i=1}^{30} z_i = 2700 + \sum_{i=1}^{30} i =$$

$$= 2700 + \frac{30\cdot 31}{2} = 2700 + 465$$

$2700 + 465 = 3165$



$\frac{4\cdot\frac14}{4}$ $13\cdot 15$ $45\cdot 6 = 270$ $4-\frac12$

$31 \cdot 15 = 155$, 465

$b = \frac14 - 14$

$g(x) = \cos^2 2x - \sin^2 x + 4$

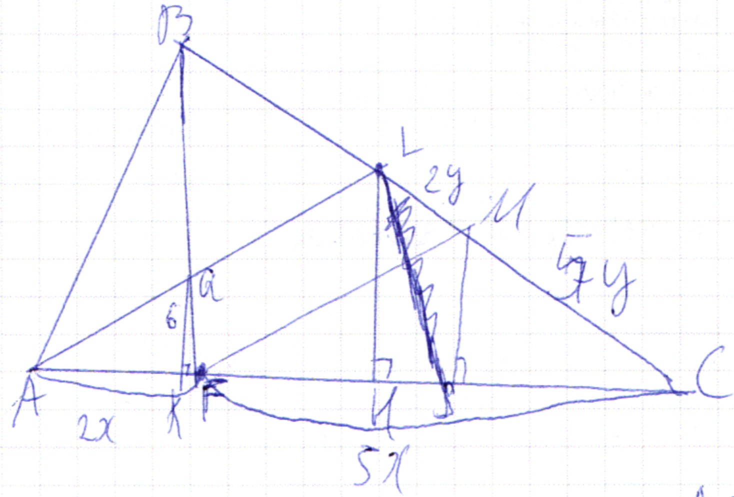
$\cos^2 2x + \frac{\cos 2x - 1}{2} + 4$ $-\frac14$

$t^2 + \frac{t}{2} + \frac{7}{2}$ $\frac18 - \frac18$

$g(-\frac14) = \frac{1}{16} - \frac18 + \frac72 = -\frac{1}{16} + \frac72 = \frac{111}{16}$

$f(-1) = 3$

№6



$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{5}{12}$

$\frac{AF}{FC} = \frac{2}{5}$

$LH - ?$ $LH \perp AC$

$QK = 6$ $QK \perp AC$

$AF = 2x$

$FC = 5x$

$4+4+5+5$

18

$\frac{\frac{5x}{7}}{35}$ 20

$AQ = \sqrt{4x^2+36} = 2\sqrt{x^2+9}$

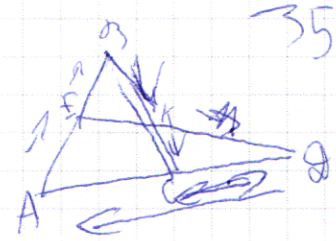
$\frac{QK}{LH} = \frac{AQ}{QL}$?

$FM \parallel AL$

$\frac{MC}{LC} = \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}$

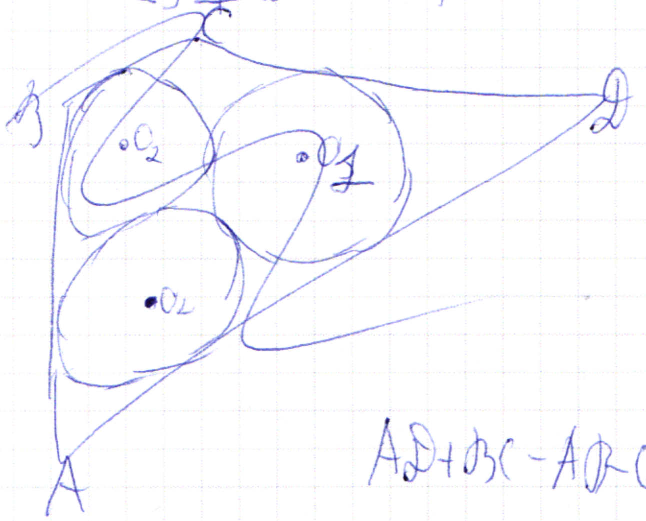
$\frac{MC}{LC} = \frac{5}{7}$; $MC = 5y$, $LC = 7y$

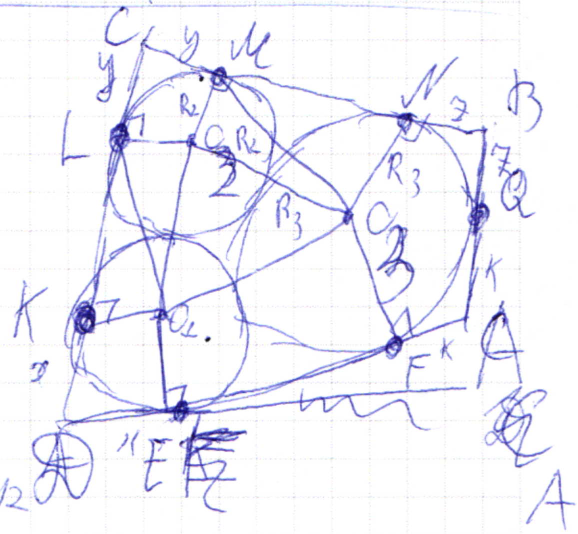
$LM = 2y$



$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CD}{AD} = 1$

$MS \perp LH$





$AD + BC - AB - CD = 12$