МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 3

ШИФР 1-008

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2 - 5x + 1$ пересекает прямые $y = -1$, $y = 4$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?

2. Найдите количество 16-значных чисел, содержащих только цифры "3", "4" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "9" ровно четыре, и они идут подряд.

3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 24$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 2a| \leqslant \sqrt{x-1}$ является отрезок длины 3?

5. Несколько рабочих выполняют работу за 28 дней. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 21 день. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 15 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)

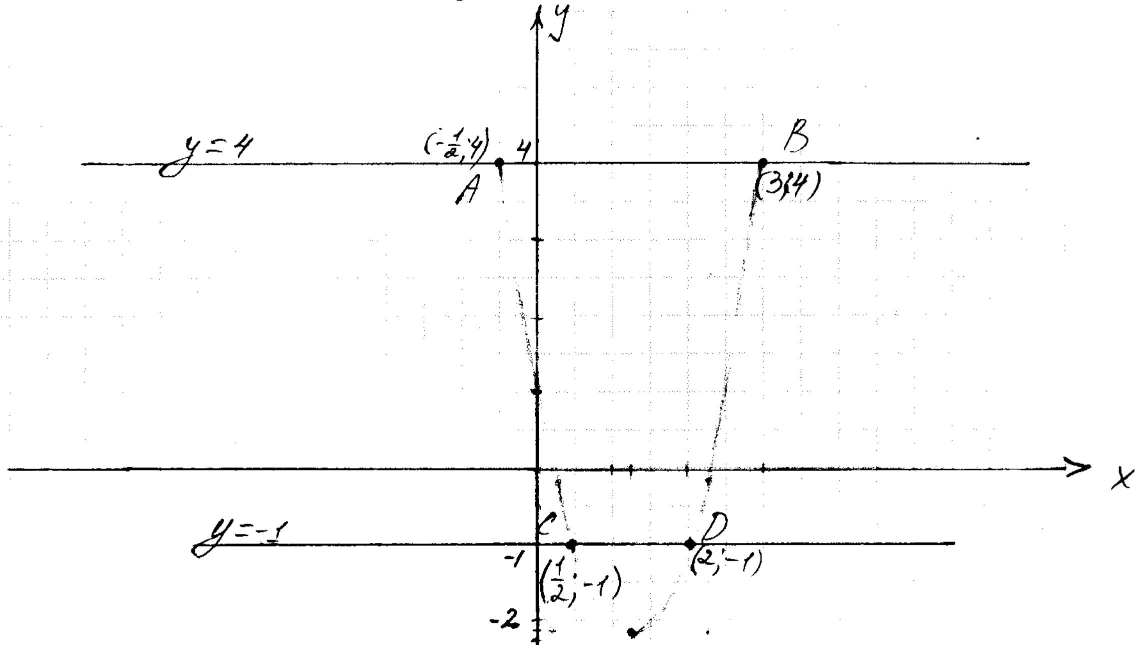
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 7 : 3$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $7 : 36$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 3.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 30]$, $[31; 60]$, $[61; 90]$, $[91; 120]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 30. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $y = 2x^2 - 5x + 1 = 2(x^2 - \frac{5}{2}x) + 1 = 2(x^2 - 2x\cdot\frac{5}{4} + \frac{25}{16}) - \frac{25}{8} + \frac{8}{8}$;

$y = 2(x - \frac{5}{4})^2 - \frac{17}{8}$; $y = -1$; $y = 4$.



Найдем точки пересечения параболы с прямыми $\left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=4 \end{array}\right.$

1) $2x^2 - 5x + 1 = -1 \Leftrightarrow$
$2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow D = 25 - 16 = 3^2$
$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2\cdot 2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1/2 \end{array}\right. \Rightarrow$

$f = 2x^2 - 5x + 1 \cap f = -1 = \{(\frac{1}{2}; -1); (2; -1)\}$

2) $2x^2 - 5x + 1 = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow$
$D = 25 + 24 = 7^2 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$

$f = 2x^2 - 5x + 1 \cap f = 4 = \{(3; 4); (-\frac{1}{2}; 4)\}$.

Отметим найденные точки как A, B, C, D

$|AB| = 3 - (-\frac{1}{2}) = 3,5$; $|CD| = 2 - \frac{1}{2} = 1,5$.

Пусть $f = 2x^2 - 5x + 1 \cap f = a$ и образуется какой-то отрезок $[EF]$

По теореме Пифагора из данных отрезков можно будет собрать прямоугольный треугольник, если:

$$\left[\begin{array}{l} |AB|^2 + |CD|^2 = |EF|^2 \\ |AB|^2 + |EF|^2 = |CD|^2 \\ |CD|^2 + |EF|^2 = |AB|^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3,5^2 + 1,5^2 = |EF|^2, & (1) \\ 3,5^2 + |EF|^2 = 1,5^2, & (2) \\ 1,5^2 + |EF|^2 = 3,5^2. & (3) \end{array}\right.$$

(1) $|EF|^2 = 3{,}5^2 + 1{,}5^2 = 12{,}25 + 2{,}25 = 14{,}5$

(2) $|EF|^2 = 1{,}5^2 - 3{,}5^2 \Rightarrow |EF| \in \varnothing$

(3) $|EF|^2 = 3{,}5^2 - 1{,}5^2 = 12{,}25 - 2{,}25 = 10$

т.пер. $\cap f = a \Rightarrow 2x^2 - 5x + 1 = a \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 1 - a = 0$.

Т.к. $f = a \parallel Ox$, то $|EF|^2 = (x_2 - x_1)^2 \Rightarrow x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1-a}{2} = 0$

$x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{1-a}{2}$; – По т. Виета.

По выше указанному: $\left[\begin{array}{l}(x_1 - x_2)^2 = 14{,}5, \quad (1)\\ (x_1 - x_2)^2 = 10. \quad (2)\end{array}\right.$

(1) $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$

$14{,}5 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1-a}{2}\right) \Leftrightarrow 14{,}5 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 2(a-1)$

(2) $10 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1-a}{2}\right) \Leftrightarrow 10 - \frac{25}{4} = -2(1-a)$

Имеем совокупность 2х уравнений:

$\left[\begin{array}{l}2a - 2 = \frac{29\cdot 2 - 25}{4},\\ 2a - 2 = \frac{40-25}{4}.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}8a - 8 = 58 - 25,\\ 8a - 8 = 15.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}8a = 41,\\ 8a = 23.\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a = \frac{41}{8},\\ a = \frac{23}{8}.\end{array}\right.$ Ответ: при $a = \frac{41}{8}$ или $a = \frac{23}{8}$.

№2. 16 значные числа; „9" четыре подряд „3"; „4".

$\overbrace{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot}^{9}\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\overbrace{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot}^{9}$

Т.к. цифры „9" идут подряд и их 4, то кол-во способов записать девятки **13**, т.к. берем по 4 цифры и на три последние „точки" не остается разрядов.

Итак, число способов выбрать девятки – 13.
После этого остается 12 свободных разрядов для „4" и „3", причем на каждой из них можно записать либо „4", либо „3", то есть число способов выбора остальных цифр числа: 2^{12}

А значит общее число таких способов $13 \cdot 2^{12}$, но мы не учли два случая, когда, помимо девяток, в числе встречаются только „4" или только „3", что не удовлетворяет условию, т.к. каждая цифра встречается хоть раз. Исключим эти два случая и получим ответ:

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

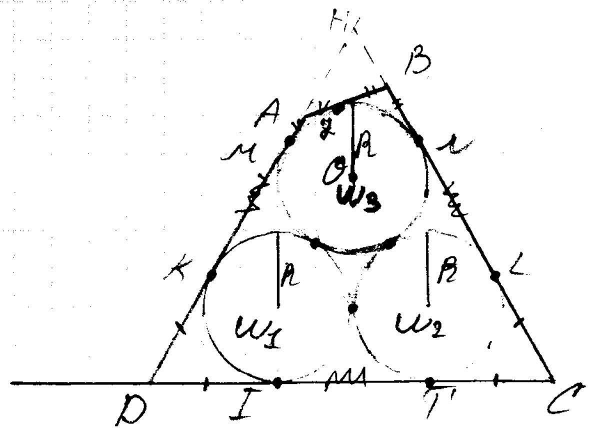
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(и получим ответ:)

$13 \cdot 2^{12} - 2$.

Ответ: кол-во таких 16-значных чисел $13 \cdot 2^{12} - 2$.

№3. Дано: $|AD| + |BC| - |AB| - |CD| = 24$.



Найти: а) R;
б) $\angle AOB$.

Решение.

I Т.к. 3 окружности с равными радиусами попарно касаются друг друга, то около них можно описать Δ, причем (равнобедренный) равносторонний.

По рисунку видно, что ABCD является частью такого равностороннего треугольника (CDH) $\Rightarrow \angle D = \angle C = 60°$.

По другому быть не может, т.к. любой малейший сдвиг общей касательной к двум таким окружностям ведет к пересечению другой.

Отметим на чертеже точки: M, N, K, L, I, T касания окружностей сторон ABCD (, а значит и сторон HDC)

Заметим, что $|IT| = |KM| = |NL| = d(\omega_1) = d(\omega_2) = d(\omega_3)$ это исходит из симметрии правильного ΔHDC и симметрии попарно касающихся окружностей с равными радиусами.

По т. об отрезках касательных: $|KD| = |ID|$; $|TC| = |LC|$, а т.к. ΔHDC - прав-й, то $|KD| = |ID| = |TC| = |LC|$

Пусть $[AB] \cap \omega_3 = \{Z\}$, тогда по той же теореме $|BN| = |BZ|$; $|AM| = |AZ|$

Тогда данное условие $|AD| + |BC| - |AB| - |CD| = 24$ примет вид:

$|DK| + d + |MA| + |BN| + d + |DK| - |AZ| - |ZB| - |DK| - d - |DK| = 24$.

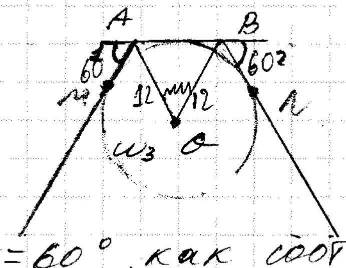
Приведем равенство и получим: $d=24$.

(а) Отсюда $R = 12$.

По условию и по отрезкам касательных видно, что значение угла $\angle AOB$ не зависит от наклона (AB) относительно (DC).

Тогда предположим, что $[AB] \parallel [DC]$, тогда $\angle A = \angle B$, т.к. такая трапеция равнобедренная, причем по доказанному $\angle D = \angle C = 60^\circ$.

Имеем:



Тогда $(BN) \parallel (AO)$, а $(OB) \parallel (AB) \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABO = \angle BAO = 60^\circ$, как соответственные найденным углам 1 и 2, равные по 60° как накрест лежащие с углами у основания $[DC]$ трапеции.

Это значит, что $\triangle AOB$ - равносторонний, соответственно $\angle AOB = 60^\circ$

Разумеется, не всегда такой четырехугольник является трапецией, но $\angle AOB = const = 60^\circ$ (т.к. насколько изменится $\angle B$, настолько и $\angle A$)

Ответ: а) $R_1 = R_2 = R_3 = 12$; б) $\angle AOB = const = 60^\circ$

№4. $|ax - 2a| \le \sqrt{x-1}$

$|a(x-2)| \le \sqrt{x-1}$ ОДЗ: $x \ge 1$.

$\Leftrightarrow x - 1 \geq a^2(x-2)^2$, т.к. $\sqrt{a} \ge 0$ и $|b| \ge 0$, что $\Rightarrow a \ge b^2$.

$x - 1 \ge a^2(x^2 - 4x + 4)$. (1)

$|f(x)|$ - симметричная функция относительно OX,

а $x - 1 \ge a^2(x^2 - 4x + 4)$ — мн-во точек, ограниченных параболой.

У параболы всегда 2 решения (иск. верш.), если она пересекает OX.

Данная парабола пересекает OX в точках $(k; 0)$ и $(k+3; 0)$

То есть $a^2x^2 - x(4a^2+1) + 4a^2 + 1 \le 0 \Leftrightarrow a^2(x-k)(x-k-3) \le 0$.

$D = 16a^4 + 8a^2 + 1 - 4a^2(4a^2+1) = 4a^2 + 1$

$x_1 = k = \dfrac{4a^2+1-\sqrt{4a^2+1}}{2a^2}$; $x_2 = k+3 = \dfrac{4a^2+1+\sqrt{4a^2+1}}{2a^2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7kn = 42k + 21n + 42, & (1) \\ 13kn = 90k + 30n + 120 \\ 6kn = 48k + 9n + 138 \cdot \times\frac{7}{6} & (2) \end{cases}$$

$$(1)-(2): \ 0 = 42k - 56k + 21n - \frac{21}{2}n + 42 - 23\cdot 7 \Leftrightarrow$$

161

$$\Leftrightarrow 14k = \frac{21}{2}n - 119$$

$$(1)\ 28kn = A \Leftrightarrow 2n\left(\frac{21}{2}n - 119\right) = A$$

$$(2)\ 21(k+1)(n+2) = A \Leftrightarrow 21\left(\frac{21}{28}n - \frac{119}{14} + 1\right)(n+2) = A \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 21n^2 - 238n = (21n + 42)\left(\frac{21}{28}n - \frac{105}{14}\right)$$

$$21n^2 - 238 = \frac{21^2 n^2}{28} - \frac{21n \cdot 105}{14} + \frac{21}{14}n - \frac{21\cdot \cancel{105}\,35}{\cancel{7}\,1}$$

$$21\cdot 28n^2 - 238\cdot 28 = 441n^2 - 21\cdot 210n + 42n - 21\cdot 35$$

$$(5600 + 28 - 441)n^2 + 21(210 - 2)n - (238\cdot 28 + 21\cdot 35) = 0$$

$$5187n^2$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x_2 - x_1 = 3 = \frac{4a^2+1+\sqrt{4a^2+1} - 4a^2 - 1 + \sqrt{4a^2+1}}{2a^2} \Leftrightarrow$$

$$6a^2 = 2\sqrt{4a^2+1} \Leftrightarrow 3a^2 = \sqrt{4a^2+1} \Leftrightarrow$$

$9a^4 = 4a^2+1$. Пусть $a^2 = t$, тогда ур-е примет вид:

$9t^2 - 4t - 1 = 0 \Rightarrow D = 16 + 36 = 52$;

$$\frac{D}{4} = 4 + 9 = \sqrt{13}^2 \Rightarrow a^2 = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{9}, \text{ но } \frac{2-\sqrt{13}}{9} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{2+\sqrt{13}}{9} \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{9}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{13}}}{3}, \\ a = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{13}}}{3}. \end{array}\right.$$

Проверка: $\frac{2+\sqrt{13}}{9}(x^2-4x+4) \le x-1$ ...

$$x_2 - x_1 = 3 = \frac{2\sqrt{\frac{4(2+\sqrt{13})}{9}+1}}{2\frac{2+\sqrt{13}}{9}}$$

Ответ: при $a = \pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{13}}}{3}$.

№5. $\boxed{A = Nt}$ 1) $1 = 28N_1$;

2) $1 = 21N_2$;

Найти: n рабочих.

3) $1 = 15N_3$;

$28N_1 = 21N_2 = 15N_3$, где N - суммарная производительность всех рабочих за данное время

Пусть изначально каждый работал k часов/день, тогда всего они работали 28k часов. Число рабочих можно считать за производительность, тогда имеем:

$28kn = 1$ (1);

$21(k+1)(n+2) = 1$ (2);

$15(k+2)(n+6) = 1$ (3)

Тогда, исходя из условия задачи, имеем систему из 3х уравнений (1); (2); (3) с 2мя переменными n, k. Нужно найти n.

$$\begin{cases} 28kn = (21k+21)(n+2), \\ 28kn = (15k+30)(n+6), \\ (21k+21)(n+2) = (15k+30)(n+6). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7kn = 42k + 21n + 42, \\ 13kn = 90k + 30n + 180, \\ 21kn + 42k + 21n + 42 = 15kn + 90k + 30n + 180. \end{cases} \Leftrightarrow$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 5 (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

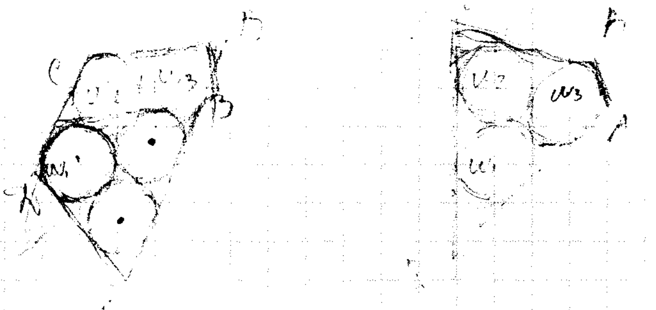
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

1-008

ШИФР

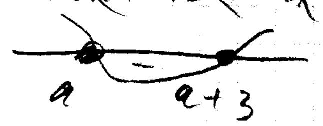
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$|DK|+1+|KA|+|BA|+x+|DK|-|AM|-|BA|-|DK|-x-|DK|=24$

$(x-a)(x-a-3)\le 0$



$=0$

$|x-2|\le\sqrt{x-1}$

$x^2-2x+4\le x-1$

$x^2-3x+3\le 0$

$a^2x^2-4xa^2+4a^2-x+1\le 0$

$a^2x^2-x(4a^2+1)+4a^2+1=0$

$=3$

$=3$

$x_1x_2= x(x+9)= \frac{4a^2+1}{a^2}$

$x_1+x_2= x+x+9= \frac{4a^2+1}{a^2}$

$2x+3=x^2+3x$

$x^2+x-3=0$

$D=1+12=\sqrt{13}$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

$2x+9=x^2+9x$

$x^2+7x-9=0$

$D=49+36=85$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)