

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 3

ШИФР

2-003

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2 - 5x + 1$ пересекает прямые $y = -1$, $y = 4$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Найдите количество 16-значных чисел, содержащих только цифры “3”, “4” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “9” ровно четыре, и они идут подряд.
3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 24$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 2a| \leq \sqrt{x - 1}$ является отрезок длины 3?
5. Несколько рабочих выполняют работу за 28 дней. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 21 день. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 15 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 7 : 3$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $7 : 36$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 3.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 30]$, $[31; 60]$, $[61; 90]$, $[91; 120]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 30. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$$y = 2x^2 - 5x + 1$$

обозначим отрезки
— l

$$y = -1$$

$$2x^2 - 5x + 1 = -1$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{5 \pm 3}{4} = 2; \frac{1}{2}$$

$$l_1 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y = 4$$

$$2x^2 - 5x + 1 = 4$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{5 \pm 7}{4} = -\frac{1}{2}; 3$$

$$l_2 = 3 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}$$

$$\begin{cases} l_1^2 + l_2^2 = a^2 \\ l_1^2 - l_2^2 = a^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = \frac{9}{4} + \frac{49}{4} = \frac{58}{4} = \frac{29}{2} \\ a^2 = \frac{49-9}{4} = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \pm \sqrt{\frac{29}{2}} \\ a = \pm \sqrt{10} \end{cases}$$

Ответ. $\sqrt{10}$
 $\sqrt{\frac{29}{2}}$

2.

16 значное число | остается 12 чисел
 кол. - 9 цифр ≥ 4 .

обозначим 9999 — a.

a может стоять в одном из 13 позиций

И/р *9999*****

Количество возможных 12 значных чисел $\geq 2^{12}$ — кол. чисел
 3 4
 количество цифр

Ответ $13 \cdot 2^{12}$

4. $|ax - 2a| \leq \sqrt{x-1}$

$$\begin{aligned} x-1 &\geq 0 \\ x &\geq 0+1 \\ x &\geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} ax - 2a \leq \sqrt{x-1} \\ ax - 2a \geq 0 \\ ax - 2a \geq -\sqrt{x-1} \\ ax - 2a \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) Обозначим t - количество часов работы в день
 x - количество рабочих

$$28x - x - A \text{ работы} - t$$

$$21 - x + 2 - A \text{ работы} - t + 1$$

$$15 - x + 6 - A \text{ работы} - t + 2$$

$$\frac{28x}{t} = \frac{21(x+2)}{t+1} = \frac{15(x+6)}{t+2} \quad \left| \Rightarrow \begin{aligned} t &= \frac{1}{6} \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned} \right.$$

$$28xt = 21(x+2)(t+1) = 15(x+6)(t+2) \quad \left| \Rightarrow \begin{aligned} t &= 50 \\ x &= 78 \end{aligned} \right.$$



4

$$|ax - 2a| < \sqrt{x - 1}$$

$$3x + 6t + 6 = \frac{30x + 90t + 180}{13} = \frac{53x + 46t + 46}{2}$$

t - A
t + 1 -

$$6x + 12t + 12 = 3x + 16t + 46$$

$$3x = 11t + 34$$

$$x = \frac{11t + 34}{3}$$

$$2\left(\frac{20}{3}(11t + 34) + 90t + 180\right) = 13\left(\frac{11t + 34}{3} + 16t + 46\right)$$

$$160t + 1360 + 90t + 180 = 52t + 442 + 208t + 598$$

5 T₂ = 28

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + 2 & x_3 &= x_1 + 2 + 4 \\ t_2 &= t_1 + 60 & x_3 &= t_1 + 100 \\ T_2 &= 21 & T_3 &= 15 \end{aligned}$$

$$x = \frac{200 + 34}{3} = \frac{234}{3} = 78$$

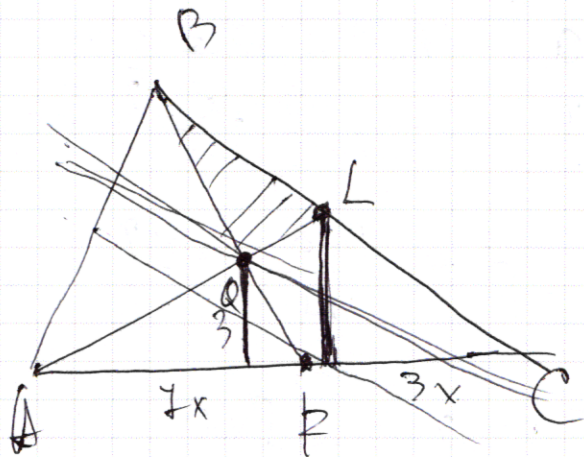
28

$$28 \cdot x_1 \cdot t_1 = 21 \cdot (x_1 + 2) \cdot (t_1 + 60) = 15 \cdot (x_1 + 6) \cdot (t_1 + 120)$$

$$\begin{cases} 28xt = 21(xt + 6x + 2t + 120) & 7xt = 3x + 6t + 360 \\ 28xt = 15(xt + 20x + 6t + 120) & 13xt = 180x + 90t + 1800 \\ 21(xt + 6x + 2t + 120) = 15(xt + 20x + 6t + 120) & .5 \\ 7xt = 180x + 14t + 840 & 5xt = 600x + 30t + 3600 \\ 2xt = 180x + 16t + 2760 & \\ 15 + 22 + 50 + 20 = 107 & 15 \cdot 22093600 / 20 = 1800 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned}
 & 28tx + 28x = 21tx + 42t \\
 & 21tx + 42x + 42t + 8t = 15tx + 90t + 15x + 90 \\
 & 28tx + 56x = 15tx + 90t \\
 & 13tx = 34t = 56x \\
 & tx = \frac{34t - 56x}{13} = 6t - 4x \\
 & 34t - 56x = 78t - 52x \\
 & 39t =
 \end{aligned}$$



$$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{7}{36} = \frac{4}{10x}$$

12

14

2.3.4

3334
4333
3433
3343

3344
3434
4334
3443
4343
4433

3444
4344
4434
4443

28 — ~~X~~ сумм/ремонт — тас/день 9

28x.

$$I_{\text{ausm}} = \frac{a}{t}$$

teacher - 9.

$$\frac{28x \cdot a}{28ax + 2} = \frac{29(x+1)(a)}{29(a+x+2+a)} = \frac{15(x+6)(a)}{15(a+x+2+a)}$$

$$28x(t+1) = 21(x+2)t$$

$$28t + x + 28x = 21t + x + 42t \quad \frac{1}{6}x = 6t = 4x$$

$$2x^2 - 5x + 1 \quad z = 1$$

$$X_{12} = 2; \frac{1}{2}$$

$$1 \cdot 22 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$2x^2 - 5x + 1 = 4$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$n 225 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49$$

$$X_{L/2} = \frac{5 \pm 7}{4} = 2, 1, 3$$

$$28x(x+2) = 15(x+6) + 1$$

$$2 \times t + 56 \times 215 \times t + 90 \times 23 + \frac{1}{2} = 3,5$$

$$(3,5)^2 + (1,5)^2 = 13x+2$$

$$(3,5)^2 - (1,5)^2 = a^2 -$$

$$2(2525)^2 - 5.5 + 1.$$

$$2 \left(\frac{5}{2} \right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 1$$

$$\frac{49}{4} + \frac{9}{4} \geq a^2$$

$$Q^2 = \frac{58}{4} = \frac{29}{2} \quad Q = \pm \sqrt{\frac{29}{2}}$$

$$\frac{99}{4} - \frac{9}{4} = 240 = 2 \times 120$$

$$a \geq \pm \sqrt{40}$$

$$\frac{25}{2} - \frac{25}{2} + 1^4$$

$$\sqrt{10} \approx 3,22$$

$$2x^2 - 5x + 12 - \sqrt{10}$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

0225 -

28-5

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 180x + 6t + 360 = 1800x + 90t + 10800 \\ = 90x + 8t + 1380 \end{cases}$$

$$90x = 2t + 1020$$

$$t = 45x - 510$$

$$13(180x - 6(45x - 510) + 360) = 1800x + 90(45x - 510) + 10800$$

$$13(180x - 270x + 3060 + 360) = 1800x - 4050x - 45900 + 10800$$

$$-1120x + 44460 = -2250x - 35100$$

$$\begin{array}{r} -2250 \\ -1120 \\ \hline 1080 \end{array}$$

$$1080x = 44460 - 35100$$

$$x = \frac{9360}{1080} = 8$$

$$|8x - 16| \leq \sqrt{x - 1} \quad x \in [0, 2]$$

$$t = 45 \cdot 8 - 510 = 360 + 510 = 150$$

$$x - 2 \leq \sqrt{x - 1}$$

$$\begin{cases} x - 2 \leq \sqrt{x - 1} \\ x - 2 \geq -\sqrt{x - 1} \end{cases} \quad x \in [0, 2]$$

$$|ax - 2a| \leq \sqrt{x - 1}$$

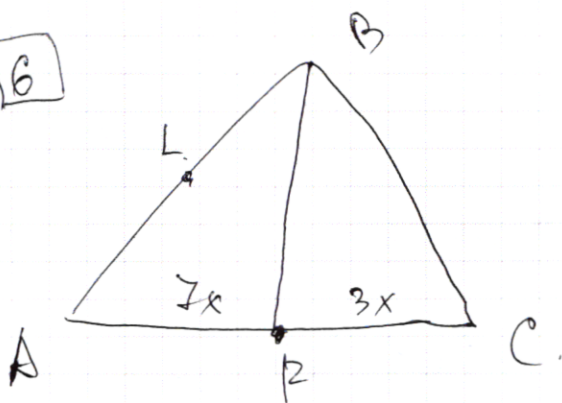
$$\begin{cases} ax - 2a \leq \sqrt{x - 1} \\ ax - 2a \geq -\sqrt{x - 1} \end{cases} \quad x \in [0, 2]$$

$$\begin{cases} a^2(x - 2)^2 \leq x - 1 \\ a^2(x - 2)^2 \geq x - 1 \end{cases}$$

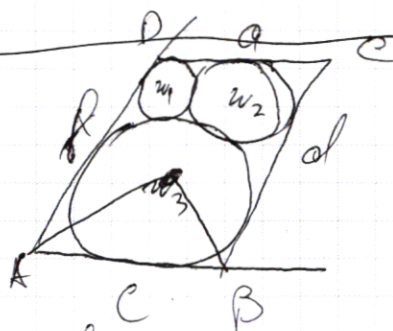
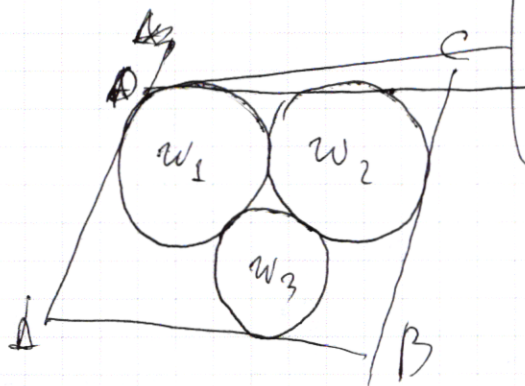
$$\begin{cases} a^2 \leq \frac{x - 1}{(x - 2)^2} \\ a^2 \geq \frac{x - 1}{(x - 2)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 \geq \frac{1}{4} \\ a^2 \geq 0 \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}$$

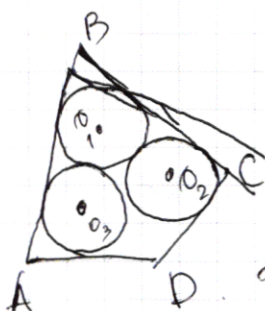
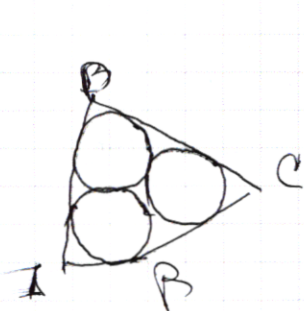
6



$$\frac{AR}{RC} = \frac{7}{3}$$



$$b + d = c - a = 24$$



2 first - 2op - 2hup.
1 - 1op - 0,5hup

$$28 \frac{x}{t}$$

$$x_{\text{first}} = 280r - n \text{ hup.}$$

$$1 - 280r = \frac{n}{x}$$

$$1 - er = \frac{n}{28x}$$

$$28 \frac{x}{t} \geq \frac{21(x+2)}{(t+1)} = \frac{15(x+6)}{(t+2)}$$

$$28tx + 56x \geq 15tx + 90t.$$

$$28tx + 28x \geq 15tx + 42t.$$

$$21tx + 42x + 42t + 84 \geq 15tx + 15x + 90t + 90.$$