МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 4 ШИФР 14-008

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 3x^2 - 4x + 2$ пересекает прямые $y = 17$, $y = 1$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?

2. Найдите количество 20-значных чисел, содержащих только цифры "1", "5" и "6" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно десять, и они идут подряд.

3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 38$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - a| \leqslant \sqrt{x-2}$ является отрезок длины 1?

5. Несколько рабочих выполняют работу за 21 день. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 15 дней. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 10 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 7$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $8 : 21$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 13.

7. Пиноккио выбрал по 7 целых чисел из каждого промежутка $[1; 50]$, $[51; 100]$, $[101; 150]$, $[151; 200]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 50. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати восьми выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14·008

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Кол-во чел	t-время	V произв. 1 чел	K-объём
x	21	V	K
$x+2$	15	$V+1$	K
$x+6$	10	$V+2$	K

$(x+2)(V+1)=15$; $xV=21$

$(x+6)(V+2)=10$

$xV+2V+x+2=15$

$xV+6V+2x+12=10$

$21+2V+x+2=15$ $\Big|\cdot 3$

$21+6V+x+6=10$

$63+6V+3x+6=45$

$21+6V+x+6=10$

$42+2x=35$

$2x=-7$?

$xV+2V+x+2=15$ $|\times 3$

$xV+2x+6V+12=10$

$3xV+6V+3x+6=45$

$-\ xV+6V+2x+12=10$

$2xV+x-6=35$

$42+x=41$

$x=-1$, $x>0$?

$x=1$

$21xV=K$ (1)

$15(x+2)(V+1)=K \Leftrightarrow 15xV+15x+30V+30=K$ (1) $(\times 2)$

$10(x+6)(V+1)=K \Leftrightarrow 10xV+10x+60V+600=K$ (2)

(1)=(2):

$15xV+15x+30V+30=-11xV+10x+60V+600$

$26xV+5x-30V-570=0$

$20xV+20x+540=K$

№7.

Т.к. наибольшее значение:

из последнего:

	1	2	3	4	5	6	7
[151; 200]	200	199	198	197	196	195	194
[101; 150]	143	142	141	140	139	138	137
[51; 100]	79	78	~~77~~	76	75	74	73
[1; 50]	19	18	17	16	15	14	13

Чтобы ни одна разностей 2-ух случайно выбранных чисел не делилась на 10 и чтобы их сумма была наибольш. следует рассмотреть с наибольшего промежутка, причем каждая следующая строка должна содержать число, которое составляет разность с числами из предыдущих строк не делящуюся на 10.

$\underbrace{340+340+340+349}_{1360}+\underbrace{270+270+270}_{910}+139+138+\underbrace{216}_{910}+79+78+\underbrace{90}_{50}+13+18+17+16+15+14=1360+\underbrace{910+216+50}_{2470}+139+$

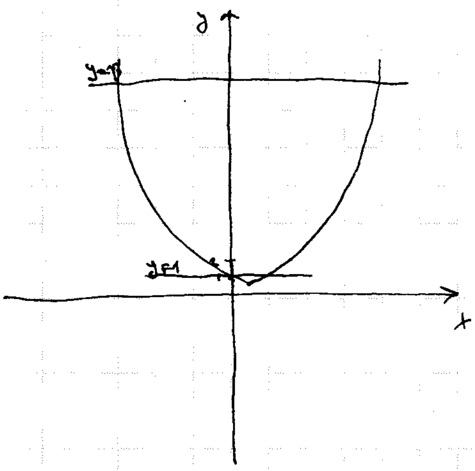
$+138+75+78+18+17+16+15+14=2470+277+157+57+30+15=2515+441=2986.$

$277+157=434$, $434+37=471$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№1



1). $y=17$

$y = 3x^2-4x+2$

$3x^2-4x+2 = 17$

$3x^2-4x-15=0$

$D=\sqrt{16+180} = \sqrt{196} = \sqrt{14^2}$

$x_1 = \frac{4+14}{6} = 3$

$x_2 = \frac{4-14}{6} = -\frac{10}{6}$.

$x_1 - x_2$ – отрезок, заключенный в прямой $y=17$

$x_1+|x_2| = 3+\frac{10}{6} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$

2. $y=1$

$y=3x^2-4x+2$

$3x^2-4x+2-1=0$

$3x^2-4x+1=0$

$D=\sqrt{16-12} = \sqrt{4} = \sqrt{2^2}$

$x_3 = \frac{4+2}{6} = 1.$; $x_4 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$

$x_3 - x_4$ – отрезок, заключенный в прямой $y=1$.

$x_3+x_4 = 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

2 случая;

$y=a$ – катет или гипотенуза

$y=a$

$y=3x^2-4x+2$

$3x^2-4x+2-a=0 \iff 3x^2-4x-(a+2)=0$

$D=\sqrt{16+12(a+2)}$

$x_5 = \frac{4+\sqrt{4(4+3(a+2))}}{6} = \frac{2+\sqrt{4+3(a+2)}}{3}$

$x_6 = \frac{4-\sqrt{4(4+3(a+2))}}{6} = \frac{2-\sqrt{4+3(a+2)}}{3}$

$x_5 - x_6$ – отрезок, заключенный на прямой $y=a$.

$x_5+x_6 = \frac{2+\sqrt{4+3(a+2)}}{3} + \frac{2-\sqrt{4+3(a+2)}}{3}$.

гипотенуза:

$\sqrt{\left(\frac{14}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{196}{9}+\frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{212}{9}}$

катет

$\sqrt{\left(\frac{14}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{196}{9}-\frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{180}{9}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-ССХ

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$|ax-a| \le \sqrt{x-2}$, т.к. $\sqrt{b} \ge |k| \Leftrightarrow b = k^2$, то:

$a^2(x-1) \le x-2 \Leftrightarrow (ax-a)^2 - x + 2 \le 0$ (1)

1. При $a=0$ $(ax-a)^2 - x + 2 \le 0$ – линейное ур-ние:

$-x+2 \le 0$

$x \ge 2 \Leftrightarrow x \in [2; +\infty)$ – не является отрезком длины 1.

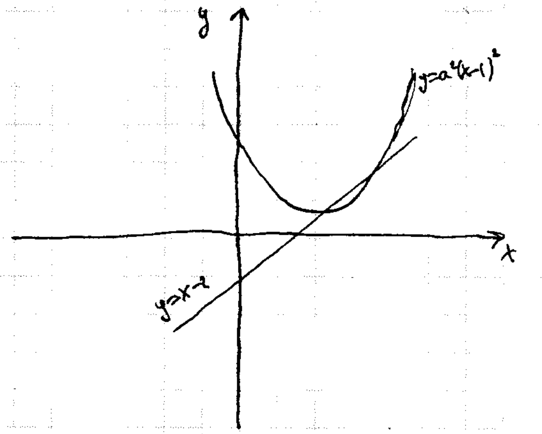
2. При $a \ne 0$

$a^2(x-1)^2 - x + 2 \le 0$ – квадратное ур-ние

$a^2x^2 - 2a^2x + a^2 - x + 2 \le 0 \Leftrightarrow a^2x^2 - x(2a^2+1) + 2$

$a^2(x-1)^2 \le x-2$

Пусть $a^2(x-1)^2 = y$; $x-2=y$, тогда:



Часть параболы $y = a^2(x-1)^2$ должна располагаться под графиком $y=x-2$. Это возможно, лишь при

$a \in [-1;1]$, т.к. $|a|>1$ "приведет к сужению" параболы

$y \in [0;1]$.
$x \in [2;3]$.
$a \in [1;-1]$.

Ответ: $[-1;1]$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№1

Т.к. нам необходимо наибольшее значение, то надо чтобы ни одна из разностей 2-ух случайно выбранных чисел не делилась на 50 и чтобы их сумма была наибольшей. Следует рассмотреть с наибольшего промежутка, причем каждая следующая строка должна содержать число, которое содержит разность с любым числом из предыдущих строк, не делящуюся на 50.

[151;200]	200	199	198	197	196	195	194
[101;150]	143	142	141	140	139	138	137
[51;100]	79	78	77	76	75	74	73
[1;50]	19	18	17	16	15	14	13

Сумма этих 28 чисел будет являться максимальной.

$\underbrace{340+340+340+340}_{1360}+\underbrace{270+270+270}_{810}+139+138+210+79+78+90+19+18+17+16+15+14=2986$.

Ответ: 2986

№2

Предположим, что 10 "5" занимают место, как 1 цифра, тогда:

$A_{11}^{1}=\frac{11!}{10!}=11$ – кол-во ~~размещений~~ перестановок 10 "5" без учета кол-ва "1" и "6".

(учтем того, что одна "1" или "6" ~~занимает~~ может занимать любое место из 10 оставшихся:

$10\cdot A_{11}^{1}=110$ – для ряда единиц с одной "6" или ряда шестерок с одной "1".

Т.К таких ряда 2: $2\cdot110=220$.

~~обо~~значим 10 ~~из~~ "5" за x, а "1" или "6" за t, тогда:

x t t t t t t t t t t
1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2

на месте x может стоять лишь 1 ряд из 10 "5", на месте t же может стоять либо 1 либо 6, значит кол-во способов (20-значных чисел):

$2^{10}\cdot220=2^{11}\cdot110=2048\cdot100+2048\cdot10=225280$

Ответ: 225 280

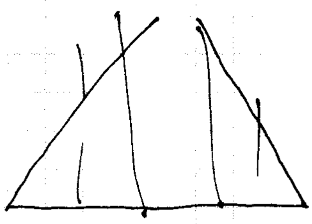
☐ черновик ☑ чистовик

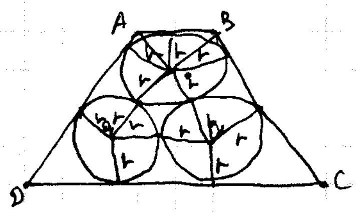
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

Пусть ABCD равнобокая трапеция:





$AD+BC-AB-CD=38$

$4r+4r-2r-4r=38$

$2r=38$

$r=19.$

Угол $AOB = \angle O_1OO_2 = 60°$, т.к. $\triangle OO_1O_2$ − равносторонний.

Ответ: 19; 60.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-ССХ

ШИФР

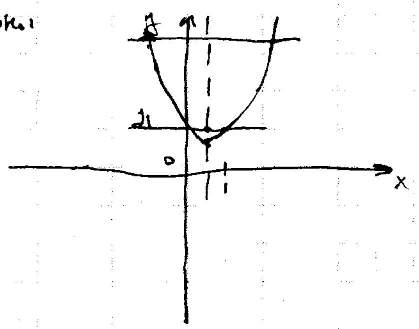
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$y=3x^2-4x+2$; Пусть $3x^2-4x+2=0$; $D=\sqrt{16-4\cdot 2\cdot 3}<0$

условие:



$y(1)=1$ $\quad y(0)=2 \quad y_c=-\frac{b}{2a}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$y=17$ $\quad y(-1)=3+4+2=9$.

$y(0,5)=\frac{3}{4}-1+2=\frac{3}{4}$ ~~$3x^2-4x+2-\frac{2}{3}=0$~~

~~$9x^2-12x+4=0$~~

~~$D=\sqrt{144-16\cdot 36}=\sqrt{\ldots}=3\sqrt{2}$~~

$x_1=$

№4

$|ax-a|\le\sqrt{x-2}$; $|a(x-1)|\le\sqrt{x-2}$; ОДЗ: $\sqrt{x-2}\ge 0 \Rightarrow x\ge 2$

$\begin{cases}|a(x-1)|\le\sqrt{x-2}\\ x\ge 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a(x-1))^2\le x-2\\ x\ge 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2(x-1)^2-x+2\le 0 \quad (1)\\ x\ge 2\end{cases}$

(1) При $a=0$ $\quad a^2(x-1)^2-x+2 \le 0$ – линейное уравнение;

$-x+2\le 0$ $\quad x\in[2;+\infty)$

~~$x=2$.~~

$x\ge 2 \Leftrightarrow$ ~~$x\in[2;+\infty)$~~ – не является отрезком длины 1

При $a\ne 0$

$a^2(x-1)^2-x+2\le 0$ – квадратное уравнение;

$a^2x^2-2a^2x+a^2-x+2\le 0$ $\quad , a^2\ge 0 \; |:a^2$

$x(a^2x-2a^2-1)+a^2+2\le 0$ $\quad x^2-2x+1\le+\frac{x-2}{a^2}$

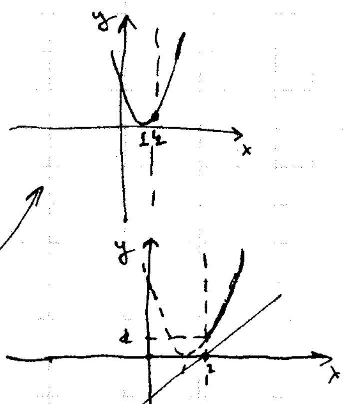
$a^2(x-1)^2=y$ $\quad (x-1)^2\le\frac{x-2}{a^2}$

$x-2=y$

часть

Парабола $a^2(x-1)^2$ должна располагаться под графиком $x-2$. Это возможно лишь при $a\in[-1;1]$, т.к. $|a|>1$ приводит к "сужению" параболы.

$a^2(x-1)^2\le x-2$



$y\in[0;1]$.

$x\in[2;3]$.

$a\in[-1;1]$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1

(Нумеровать только чистовики)

№2

Пусть 10 "5" ~~ровно~~ считаем за 1, тогда

11-~~значных~~ цифр ~~$A_{11}^{10} = \frac{11!}{1!}$~~ =

$\underbrace{5 \ldots\ldots 5}_{10}$ 1.... 6.... $\overset{1}{-10}$ $\overset{6}{+10}$

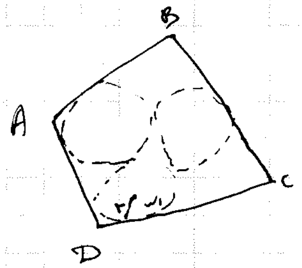
№3

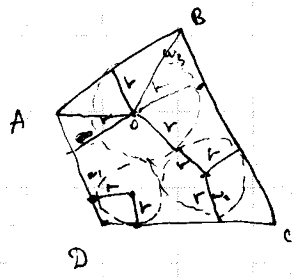
6r 4r 14r

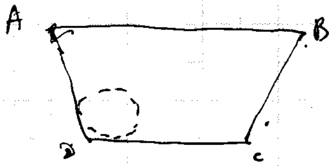
1) $AD + BC - AB - CD = 38.$ $2r = 3,$ $r = 1,5.$

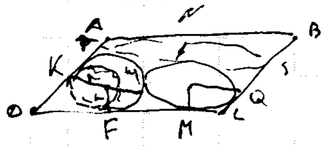
$4r = 38$

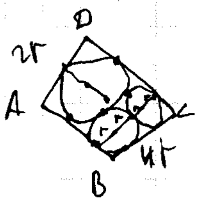
$r = \frac{38}{4}.$

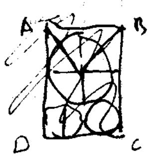


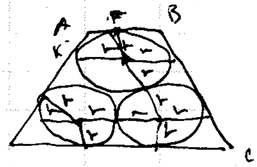




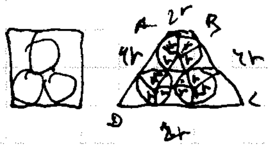




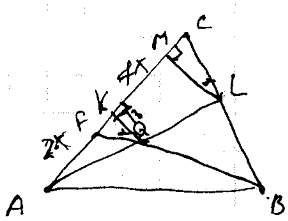




$AF + r = AK + r$



№6.



$S_{BQL} : S_{ABC} = \frac{8}{21}$

$KQ = 13$

$\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}} = \frac{8}{21}$

$LM - ?$

~~$\frac{2x}{KQ} = \frac{9x}{LM}$, т.к. $\triangle AKQ \sim \triangle AML$~~

~~$2LM = 9KQ$~~

~~$LM = \frac{9}{2}KQ = \frac{9 \cdot 13}{2} = \frac{117}{2} = 58{,}5$~~

№2.

$10 \cdot A_{11}^{10} = \frac{11!}{(11-10)!} \cdot 10 = \cancel{11 \cdot 10 = 110}$ если из 1 одна единица в ряду 6 или 16 в ряду единиц.

$110 + 110 = 220.$

5.... + + + + + + + + + +
2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 $2^{10} \cdot 220 = 2^{11} \cdot 110 = 2048 \cdot 110 = 2048 \cdot 100 + 2048 \cdot 10 =$

$= 204800 + 20480 = 225280$

$+ \frac{20480}{225280}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Кол-во, чел	t, время	V - скорость работы	K - объем
x	21	V	K
x+2	15	V+1	K
x+6	10	V+2	K

$(x+2)(V+1)=15 \quad ; xV=21$

$(x+6)(V+2)=10$

$xV+2V+x+2=15 \quad |\times 3$

$xV+6V+2x+12=10$

$3xV+6V+3x+6=45$

$-$

$xV+6V+2x+12=10$

$2xV+x\cancel{+18}^{-6}=35$

$2\cdot 21+x-6=35$

$x=-1$, т.к. $|x|>0$, то $x=1$.

Ответ: 1.