

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 4

ШИФР

8-006

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = 3x^2 - 4x + 2$  пересекает прямые  $y = 17$ ,  $y = 1$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Найдите количество 20-значных чисел, содержащих только цифры “1”, “5” и “6” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “5” ровно десять, и они идут подряд.
3. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ ; причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
  - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 38$ .
  - б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
4. При каких значениях параметра  $a$  решением неравенства  $|ax - a| \leq \sqrt{x - 2}$  является отрезок длины 1?
5. Несколько рабочих выполняют работу за 21 день. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 15 дней. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 10 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 2 : 7$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $8 : 21$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 13.
7. Пиноккио выбрал по 7 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 50]$ ,  $[51; 100]$ ,  $[101; 150]$ ,  $[151; 200]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 50. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати восьми выбранных Пиноккио чисел?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4

При каких значениях параметра  $a$  решением неравенства  $|ax - a| \leq \sqrt{x-2}$  является отрезок длины 1?

Решение:

Рассмотрим при целых  $(ax - a)$  и  $\sqrt{x-2}$

$$|ax - a| \leq \sqrt{x-2}$$

Обе части можно возвести в квадрат, т.к. они целые (почка-малу решены), положительное по определению кв. корни и модуля.  $0 \leq x-2$ ;  $x \neq 2$

$$(ax - a)^2 \leq x - 2$$

$$a^2 x^2 - 2a^2 x + a^2 \leq x - 2$$

$$a^2 (x^2 - 2x + 1) \leq x - 2$$

$$a^2 (x-2)^2 \leq x-2$$

$$\begin{cases} a^2 (x-2)^2 \leq x-2 \\ (x-2)^2 > 0 \\ a^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow x-2 > 0$$

т.к.  $x-2 > 0$  (или  $\star$ ), то:

$$a^2 (x-2) \leq 1$$

$$a^2 (x-2) - 1 \leq 0$$

Графиком функции  $f(a) = a^2 (x-2) - 1$  является парабола с ветвями, направленными вверх (старший коэффициент  $> 0$ ), и её вершина лежит на оси  $Ox$  ( $M(x) = \frac{b}{2a} = \frac{0}{2(x-2)}$ ), а значит ось симметрии —  $Ox$ .  $\Rightarrow$  чтобы решением

неравенства  $a^2 (x-2) - 1 \leq 0$  является отрезок длиной 1 нужно чтобы график функции  $f(a) = a^2 (x-2) - 1$  пересек  $Ox$  в точках  $(\pm 0,5; 0)$ .

Значит при целых  $ax - a$  и  $\sqrt{x-2}$  решением неравенства  $|ax - a| \leq \sqrt{x-2}$  будет являться отрезок с длиной 1 при  $a = 0,5$  и  $a = -0,5$ .

Ответ:  $0,5; -0,5$

№5

Несколько рабочих выполняют работу за 21 день. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день больше, то они выполнили бы эту работу за 15 дней. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день больше, они выполнили бы эту же работу за 10 дней. Сколько было рабочих (Принять производительность всех одинаковой).

Решение:

Пусть рабочих было  $x$  человек, тогда во втором случае их  $(x+2)$  человек, а в третьем  $(x+2+4)$  человек. Пусть их производительность  $N$ , а кол-во рабочих часов в день  $R$ , тогда производительность рабочих в первом случае  $xN$ , во втором  $(x+2)N$ , в третьем  $(x+2+4)N$ . Тогда работа в I день  $x \cdot N \cdot 21 \cdot R$  во II день  $(2+x) \cdot N \cdot 15 \cdot (R+1)$ , в III день  $(2+4+x) \cdot N \cdot 10 \cdot (R+1+1)$ . Составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} x \cdot N \cdot 21 \cdot R = 1 & (1) \\ (2+x) \cdot N \cdot 15 \cdot (R+1) = 1 & (2) \\ (2+4+x) \cdot N \cdot 10 \cdot (R+1+1) = 1 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(1)}{(2)} \cdot \frac{x \cdot N \cdot 21 \cdot R}{(2+x) \cdot N \cdot 15 \cdot (R+1)} = \frac{1}{1} \\ \frac{(2)}{(3)} \cdot \frac{(2+x) \cdot N \cdot 15 \cdot (R+1)}{(6+x) \cdot N \cdot 10 \cdot (R+2)} = \frac{1}{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 21 \cdot R \cdot x = (2+x) \cdot 15 \cdot (R+1) \\ (6+x) \cdot 10 \cdot (R+2) = (2+x) \cdot 15 \cdot (R+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 21R \cdot x = 30R + 30 + 15R \cdot x + 15x \\ 60R + 20 + 10R \cdot x + 20x = 30R + 30 + 15R \cdot x + 15x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6R \cdot x = 30R + 30 + 15x \\ 30R + 20 + 5x = 5R \cdot x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2R \cdot x = 10R + 10 + 5x \\ 6R + 18 + 4x = R \cdot x \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = \frac{10+5x}{2x-10} \\ \frac{6(10+5x)}{2(x-5)} + 18 + 4x = \frac{(10+5x) \cdot x}{2x-10} \end{cases} *$$

$$\begin{cases} R = \frac{10+5 \cdot 12}{2 \cdot 12 - 10} \\ x = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R = 5 \\ x = 12 \end{cases}$$

$$*: \frac{60+30x+15(2x-10)+x(2x-10)}{-2x-10} = \frac{(10+5x)R}{2x-10}$$

$$60+30x+36x-180+2x^2-10x=10x+5x^2$$

$$-120+46x-3x^2=0$$

$$\frac{D}{4} = 529-360=169$$

$$\begin{cases} x = \frac{-23+13}{-3} \\ y = \frac{-23-13}{-3} \end{cases}$$

$x = \frac{10}{3}$  - не удовлетворяет условию.  
 $y = 12$ , значит было 12 рабочих

Ответ: 12 рабочих

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Парабола  $y = 3x^2 - 4x + 2$  пересечёт прямые  $y = 14$  и  $y = 1$ , и  $y = 0$ , выходя на каждую из прямых отрезок. Три каких значения параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?

Решение

$l_a, l_b, l_c$  - отрезки, отсекаемые параболой от  $y = 0, y = 14, y = 1$ .

Для наличия прямого угла по теореме Пифагора:  $l_1^2 + l_2^2 = l_3^2$  (1)  
третьего случая не будет, т.к. тогда  $l_3$  будет гипотенузой -  $l_3^2 = l_1^2 + l_2^2$  (2)  
и не будет прямой т.к.  $\sin \alpha < l_1 + l_2$ .

$$(1) 3x^2 - 4x + 2 = 14$$

$$3x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$D/4 = 4 + 12 = 16$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4+4}{3} \\ x_2 = \frac{4-4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$l_a = 3 - (-\frac{5}{3}) = \frac{14}{3}$$

$$l_a = x_1 - x_2$$

$$(2) 3x^2 - 4x + 2 = 1$$

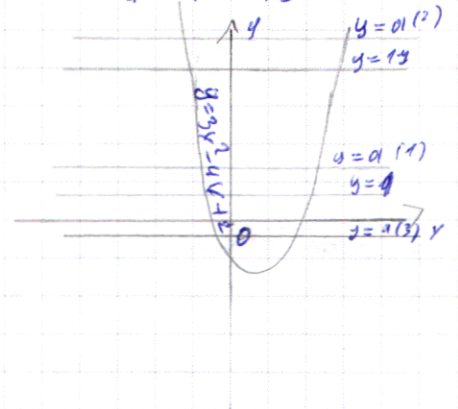
$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$D/4 = 4 - 3 = 1$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4+1}{3} \\ x_2 = \frac{4-1}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 5/3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$l_b = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$



$$(1) \left(\frac{2}{3}\right)^2 + l_a^2 = \left(\frac{14}{3}\right)^2$$

$$l_a^2 = \frac{140}{9}$$

$$l_a = \frac{\sqrt{140}}{3}$$

$$(2) l_c^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{14}{3}\right)^2$$

$$l_c^2 = \frac{148}{9}$$

$$l_c = \frac{\sqrt{148}}{3}$$

$$\begin{cases} l_a = x_1 - x_2 \\ y = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \\ D = b^2 - 4ac \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_a = \frac{-b + \sqrt{D} - (-b) - (-\sqrt{D})}{2a} \\ D = b^2 - 4ac \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_a = \frac{2\sqrt{D}}{2a} \\ D = b^2 - 4ac \end{cases} \Rightarrow \boxed{l_a = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a}}$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} b = 4 \\ \frac{140}{3} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{140} = \sqrt{16 - 12c} \quad c = -\frac{12c}{12} = 10\frac{4}{3}; \quad c = 2 - a = 7a - 2c$$

$$d = 2 + \left(\frac{12 \cdot 4}{12}\right) = 12 \frac{1}{3}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{\sqrt{148}}{3} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \\ a=3 \\ b=11 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{148} = \sqrt{16 - 12c}$$

$$c = 11 \quad a = 2 - 11 = \underline{-9}$$

Ответ:  $d \in \{-9; 12 \frac{1}{3}\}$

№2

Найдите кол-во 20-значных чисел, содержащих только цифры 1, 5, 6 (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) так, что цифра 5 равно десяти, и если идут подряд.

Решение:

I 10 клеток могут раскладываться 11 способами (или иначе, но и ещё 10 для перемещений - 10+1).

II "6 и 1" на 10 клеток могут раскладываться  $\frac{(10-3) \cdot 10}{2} + 10$  (представ-

шим 10-угольник все его диагонали и стороны будут комбинациями двух цифр.  $\frac{(n-3)n}{2} + n$  - диагонали + 1 сторона). Т.е. комбинация число-

сложения цифр, когда из 10 клеток составляем или 5, но чтобы учесть сколько всего комбинаций цифр

на 5. Значит "6" и "1" на 10 клеток могут раскладываться  $\frac{(10-3) \cdot 10}{2} + 10$  способами. (или  $\frac{6 \cdot 10}{2} + 10$ )

Каждая пара пар клеток может занимать 2-цифр способами, пар всего пять, значит, чтобы сосчитать все комбинации достаточно сосчитать кол-во диагоналей и сторон в 10-угольнике.

$\frac{(n-3) \cdot n}{2}$  - кол-во диагоналей,  $n$  - кол-во сторон.

Значит кол-во комбинаций расположения "6 и 1" по десяти клеткам  $\frac{(10-3) \cdot 10}{2} + 10 = 45$ , тогда

Значит всего комбинаций чисел  $11 \cdot 45 = 495$

Ответ: 495



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7 0 . . . . .

10-5 +

2.5.

□□□□  
11 12 13 14 15

10 значений могут размещаться 11 способами (если  
строго, но замкнуто 10 чисел и еще 10 для завершения.)

1,61

$$\begin{array}{r} 10 \\ (1-9) \cdot 1 \\ \hline 2 \end{array}$$

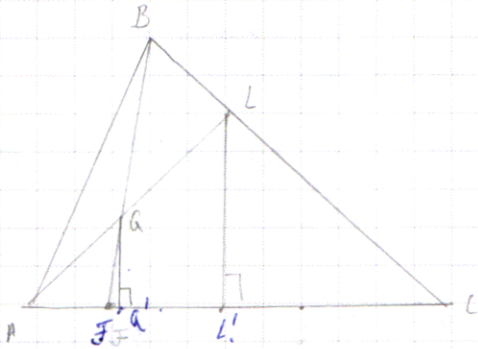


черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Дано:  
 $\frac{BF}{FC} = \frac{2}{1}$   
 $\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{8}{21}$   
 $AQ' = 13$   
 $LL' = ?$

$$\frac{LL'}{AQ'} = \frac{AL}{AQ} = \frac{AL'}{AQ'}$$

$$L = 2 - a =$$

$$3 \frac{5}{3} = \frac{14}{3}$$

$$\frac{\sqrt{12}}{3} = \frac{\sqrt{10}}{a} \Rightarrow 10 = 12 \Rightarrow 16 - 3c = 12 \Rightarrow 3c = 4$$

$$c = \frac{4}{3} \Rightarrow a = 2 - c$$

$$l_a = x_2 - x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{c\sqrt{D}}{2a} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$a=3 \Rightarrow D = 16 - 3c$$

$$b=4$$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 4x + 12 &= 14 \\ 3x^2 - 4x - 2 &= 0 \\ D &= 4 + 24 = 28 \\ \begin{cases} x_1 = \frac{2 + \sqrt{7}}{3} \\ x_2 = \frac{2 - \sqrt{7}}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -5/3 \end{cases} \\ l_2 = 3 + \frac{5}{3} = \frac{14}{3} = 4 \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 4x + 12 &= 1 \\ 3x^2 - 4x + 11 &= 0 \\ D &= 16 - 132 = -116 \\ \begin{cases} x_1 = \frac{4 + \sqrt{-116}}{6} \\ x_2 = \frac{4 - \sqrt{-116}}{6} \end{cases} \\ \begin{cases} v_1 = 5/3 \\ x_2 = 1 \end{cases} \\ l_1 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_1^2 + l_2^2 &= l_a^2 \quad (1) \\ l_a^2 &= l_1^2 + l_2^2 \quad (2) \\ 3 \frac{5}{3} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \left(\frac{2}{3}\right)^2 + l_2^2 &= \left(\frac{14}{3}\right)^2 \\ l_2^2 &= \frac{196 - 4}{9} \\ l_2 &= \frac{\sqrt{192}}{3} \\ l_2 &= \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 148 &= 16 - 12c \\ c &= \frac{148 - 16}{12} = \frac{132}{12} = 11 \\ 140 &= \sqrt{16 - 12c} \\ 140 &= 16 - 12c \\ c &= \frac{140 - 16}{12} = \frac{124}{12} = 1 \end{aligned}$$

№4  $|ax-a| \leq \sqrt{x-2}$  м.к.  $1 < 0$ , и  $\sqrt{\quad} \geq 0$ , то знак не изменяется при возведении в квадрат

$$(ax-a)^2 = x-2$$

$$a^2x^2 - 2a^2x + a^2 \leq x-2$$

$$a^2(x^2 - 2x + 1) - x + 2 \leq 0$$

$$a^2(x-2)^2 \leq (x-2)$$

$$\frac{a^2(x-2)^2}{(x-2)^2} \leq \frac{x-2}{(x-2)^2}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$u(x) = \frac{6}{x-2} = \frac{6}{1} = 1$$

$$\frac{D}{4} = 1 - 1 = 0$$

$$u(9) = (1)^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$$

$$x = 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x-2)^2$$

$(x-2) \geq 0$ ,  $a^2 > 0 \Rightarrow (x-2) > 0$ ,  $\Rightarrow$  это  $a$ -квадратная функция,  
 либо  $x-2$  - квадратная функция, либо оба.

$a^2$  должна делиться на  $x-2$  квадрат  $x-2$ ,  $3$  и  $10$  чет

$$a^2(x-2) \leq 1, x-2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

$$\begin{cases} a^2 \leq \frac{1}{x-2} \\ x > 2 \end{cases}, \text{ знаменатель } \neq 0 \quad x \neq 2, a^2 \neq 0, a \in (0; 1)$$

и на графике видим  $\Rightarrow$   $a$  найдется  $a^2(x-2) - 1 = f(a)$ ,  $f(a)$  имеет корни  $a_1 = 0,5$   
 $a_2 = -0,5$

$$a^2(x-2) - 1 = 0$$

$$D = (x-2)^2 + C$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 \cdot a_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -a_2 \\ -a_1^2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = \pm 1 \\ a_2 = \mp 1 \end{cases}$$

$$a = \pm 1$$

$$\frac{10 + 5 \cdot 12}{2 \cdot 12 - 10} = \frac{70}{14} = 5$$

$$\left(\frac{10}{2}\right)^2 - (25)^2 = \frac{100}{4} - 625 = \frac{100 - 2500}{4} = \frac{-2400}{4} = -600$$

№5

$$\begin{cases} xN + 21 \cdot R = 1 & (1) \\ (2+x)N + 15(R+1) = 1 & (2) \\ (2+4+x)N + 10(R+1+1) = 1 & (3) \end{cases}$$

$$(2+4+x)N + 10(R+1+1) = 1$$

$$60 + 30x + 18(2x+10) + x(2x+10) =$$

$$\frac{2x-10}{(10+5v)x}$$

$$= \frac{2x-10}{2x-10} \cdot 36v$$

$$60 + 30v + 180 + 180 + 18v^2 - 180 = 10x + 5v^2$$

$$-10 + 10x - 3v^2 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 25$$

$$-120 + 40v - 3v^2 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 529 - 360 = 13^2$$

$$x = \frac{-23 + 13}{-1 + 10} = \frac{-10}{9}$$

$$x = \frac{-23 - 13}{-1 + 10} = \frac{-36}{9} = -4$$

$$v = \frac{10 + 13}{2} = \frac{23}{2} = 11,5$$

$$x = \frac{10 + 13}{2} = \frac{23}{2} = 11,5$$

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \cdot \frac{1}{(2)} = \frac{x \cdot 21 \cdot R}{(2+4v)15(R+1)} = 1$$

$$\begin{cases} (2) \\ (3) \end{cases} \cdot \frac{(2+4v) \cdot 15(R+1)}{(6+x) \cdot 10 \cdot (R+2)} = 1$$

$$21Rx = (2+4v)15(R+1)$$

$$(6+x)10(R+2) = (2+4v)15(R+1)$$

$$21Rx = 30R + 30 + 15Rv + 15v$$

$$60R + 120 + 10Rx + 20v = 30R + 30 + 15Rv + 15v$$

$$30Rv = 30R + 30 + 15v$$

$$30R + 30 + 5x = 5Rv$$

$$2Rv = 10R + 10 + 5v$$

$$6R + 18 + x = Rv$$

$$R = \frac{10+5v}{2v-10}$$

$$\frac{6 \cdot (10+5v)}{2(v-5)} + 18 + v = \frac{(10+5v) \cdot v}{2v-10}$$

$$\begin{cases} v = \frac{3}{10} \\ R = \frac{10 + 1,5}{1,06 - 10} \\ x = \frac{10 + 1,5}{10 + 5 \cdot 1,5} \end{cases} \Rightarrow R = \frac{10 + 1,5}{10 + 7,5} = \frac{11,5}{17,5}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

8-006

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)