

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 4

ШИФР

9-3

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 3x^2 - 4x + 2$ пересекает прямые $y = 17$, $y = 1$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Найдите количество 20-значных чисел, содержащих только цифры “1”, “5” и “6” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “5” ровно десять, и они идут подряд.
3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 38$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - a| \leq \sqrt{x - 2}$ является отрезок длины 1?
5. Несколько рабочих выполняют работу за 21 день. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 15 дней. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 10 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 7$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $8 : 21$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 13.
7. Пиноккио выбрал по 7 целых чисел из каждого промежутка $[1; 50]$, $[51; 100]$, $[101; 150]$, $[151; 200]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 50. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати восьми выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 = 6z + x + 18$$

$$x(1,5x - 13) = 6(2x - 13) + x + 18$$

$$1,5x^2 - 13x = 12x - 78 + x + 18$$

$$1,5x^2 - 23x + 60 = 0$$

$$3x^2 - 46x + 120 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^2 \ 6 \\ + 2 \ 76 \\ \hline - 27 \ 76 \\ \hline 7940 \end{array}$$

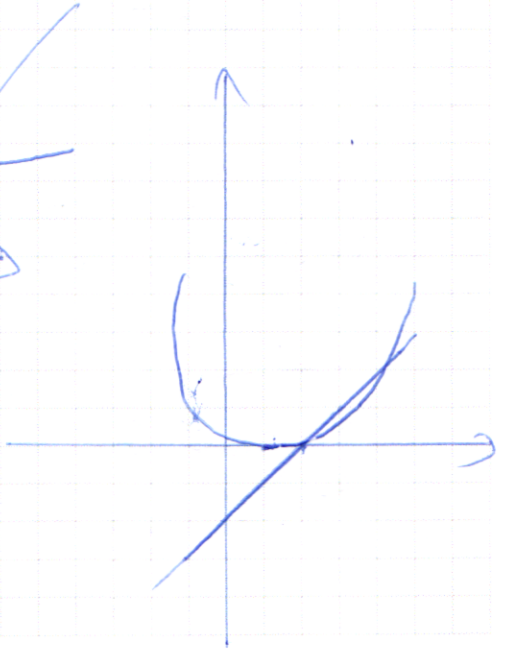
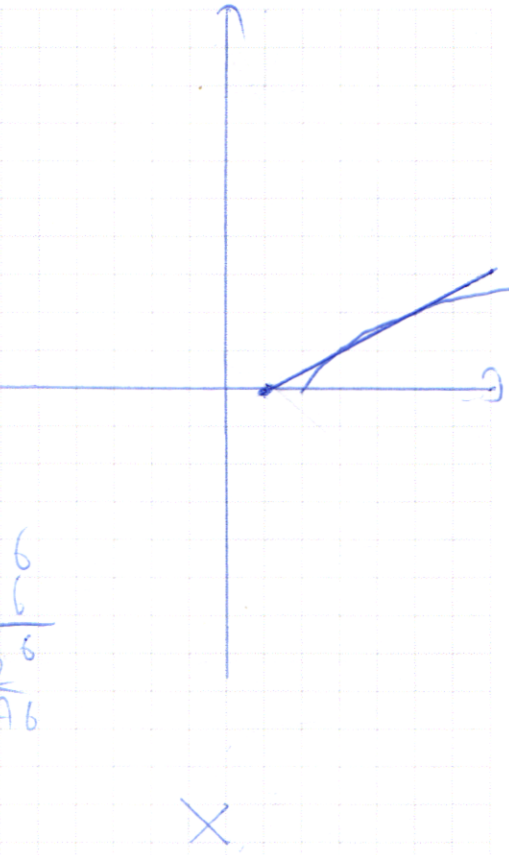
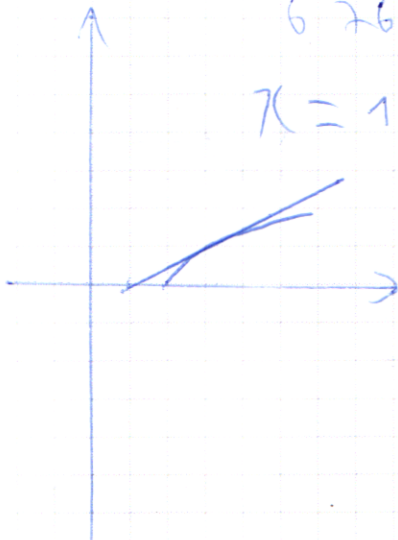
$$\begin{array}{r} \times 720 \\ \times \\ \hline 7940 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 2 \ 6 \\ \times 26 \\ \hline + 75 \ 6 \\ \hline 6 \ 76 \end{array}$$

$$6 \ 76 = 26^2$$

$$x = 12$$

$$z = 5$$



~~210 744 720 70 146
14 105 744 243 712
97 20 20 87 87
36 35 64 17 32~~

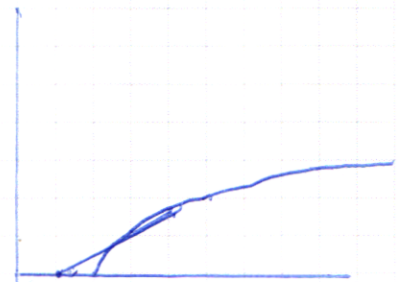
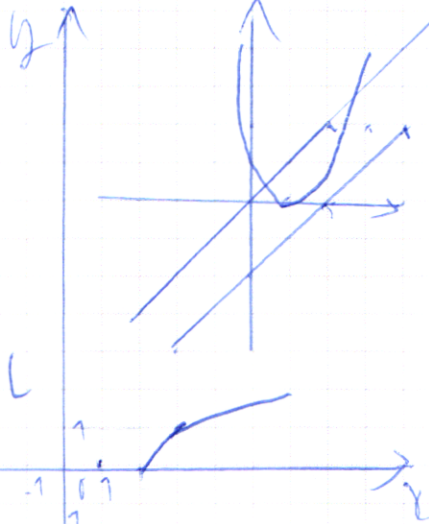
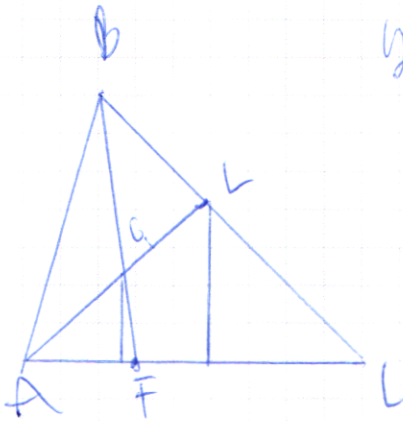
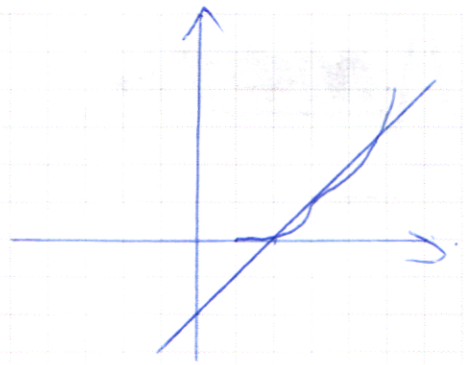
$$x^2 - 2x + 7 \leq 16x - 32$$

$$x^2 - 18x + 39 \leq 0$$

$$D = 94L$$



$$\begin{array}{r} x^2 \\ + 144 \\ + 72 \\ - 324 \\ \hline 132 \\ \hline 192 \end{array}$$



$$x a^2 (x-1)^2 \leq x-1$$

$$0,5x - 0,5 \leq x - 2$$

$$2 - 1 \leq 2x - 4$$

$$3 \leq x$$

$$0,25x^2 - 0,5x + 0,25 \leq x - 2$$

$$x^2 - 2x + 1 \leq 4x - 8$$

$$x^2 - 6x + 9 \leq 0 \quad 0,5x - 0,25 \leq x - 2$$

$$(x-3)^2 \leq 0$$

$$x = 3$$

$$x - 1 \leq 4x - 8$$

$$7 \leq 3x$$

$$\frac{7}{3} \leq x$$

$$a \leq 0,25$$

$$a^2 x^2 - 2a^2 x + a^2 \leq x - 1$$

$$a^2 (x-1)^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1 = 3x^2 - 4x + 2$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$D = 2^2$$

$$x = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

~~$$76a^2 - 64 - 24 = 0$$~~

$$\frac{64}{9} + \frac{792 \cdot 76 \cdot u}{9} = 0$$

$$\frac{4}{9} \quad \frac{796}{9}$$

$$\begin{array}{r} \times 26 \\ \hline 186 \\ + 186 \\ \hline 256 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$$

$$5x^2 - 4x - 15 = 0$$

$$D = 26^2 = 196 = 14^2$$

$$x = 1$$

$$x = -\frac{5}{3}$$

$$l = \frac{l_1}{2} = 4 \frac{2}{3}$$

~~$$2 \pm \sqrt{11}$$~~

$$\begin{array}{r} \times 74 \\ \hline 29 \\ \times 23 \\ \hline 56 \\ \hline 29 \\ \hline 706 \end{array}$$

$$2 + \sqrt{192} \quad 796$$

$$3x^2 - 4x + 2 - u = 0$$

$$D = 16 - 24 + 12u$$

$$D = 12u - 8$$

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{12u - 8}}{6}$$

$$x_2 = \frac{4 - \sqrt{12u - 8}}{6}$$

~~$$4x^2 - 4x - 3 = 0$$~~

$$2u = 4$$

$$6u = \sqrt{4u + 4}$$

$$l = x_1 - x_2$$

$$u = \frac{\sqrt{4u + 4}}{6}$$

$$4u - 2 \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{192}}{3}$$

$$x_1 = 2u = \frac{2}{3}$$

$$l = 4u - 2 \frac{2}{3}$$

$$\frac{\sqrt{192}}{3}$$

$$4u - 2 \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{200}}{3}$$

$$x_2 = 2 - 2u$$

$$4u - 2 \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{192}}{3}$$

$$12u = \sqrt{192} + 8$$

$$l = 4a - 2\frac{2}{3}$$

$$a = \frac{\sqrt{44+4}}{6}$$

$$4a - 2\frac{2}{3} = \frac{\sqrt{200}}{3}$$

$$\frac{4a}{12a} =$$

$$12a = \sqrt{200} + 8$$

74545

$$6a = \frac{\sqrt{90+4}}{\sqrt{90+4}}$$

$$a = \frac{\sqrt{90+4}}{6}$$

70

$$(2^{10} - 2) \cdot 77$$

$$\frac{1}{xy} = 21$$

$$\frac{1}{(x+2)(y+1)} = 15$$

$$\frac{1}{(x+6)(y-2)} = 7$$

$$6xy = 30y + 15x + 30$$

$$xy = 5y + 2,5x + 5$$

$$21xy = 1$$

$$15xy + 30y + 15x + 30 = 1$$

$$10xy + 60y + 20x + 120 = 1$$

$$5xy = 30y + 5x + 90 \neq$$

$$xy = 6y + x + 78$$

$$0 = y - 1,5x(x+78)$$

$$1,5x = y + 78$$

$$y = 1,5x - 78$$

$$\begin{array}{r} 315 \\ \times 45 \\ \hline 1260 \end{array}$$

| - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |

$$|ax - a| \leq \sqrt{x-2}$$

$$a^2x^2 - 2a^2x + a^2 \leq x - 2$$

$$a^2(x^2 - 2x + 1) \leq x - 2$$

$$a^2(x-1)^2 \leq x-2$$

$$a \leq \sqrt{\frac{x-2}{x-1^2}} = \sqrt{\frac{x-2}{x^2-2x+1}}$$

$$27(1,5x^2 - 13x) = 1$$

$$27 \cdot 1,5x^2 - 27 \cdot 13x = 1$$

$$37,5x - 273x - 1 = 0$$

$$\begin{array}{r} +74429 \\ 126 \\ \hline 74545 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 273 \\ 273 \\ + 774 \\ 1917 \\ 516 \\ \hline \end{array}$$

74429

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} x - \\ \hline y - \\ \hline z - \end{array}$$

$$x + z = 27$$

$$27xz = 7$$

$$\frac{1}{(x+z)(z+7)} = 75$$

$$75xz + 30z + 15x + 30 = 7$$

$$10(xz + 6z + 2x + 20) = 7$$

$$\frac{1}{(x+6)(z+2)} = 70$$

$$6xz = 30z + 15x + 30$$

$$xz = 5z + 2,5x + 5$$

$$5xz = 30z + 15x + 30$$

$$xz = 6z + x + 6$$

$$\frac{1}{(x+6)(1,5x-7)} = 70$$

$$7 = 70(1,5x^2 - 2x - 66)$$

$$7 = 70(1,5x^2 - 20x - 660)$$

$$15x^2 - 20x - 659 = 0$$

$$77xz =$$

$$0 = z - 7,5x + 73$$

$$z = 7,5x - 73$$

$$xz = 10x - 60$$

$$\frac{7}{10x-60} = 27$$

$$7 = 270x - 1260$$

$$x = \frac{1257}{270}$$

$$\begin{array}{r} x 594 \\ \times 2536 \\ \hline 75 \\ \hline 73170 \\ \hline 2636 \\ \hline 39540 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1744 \\ 432 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 246 \\ 12 \\ +92 \\ \hline 552 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 432 \\ +246 \\ \hline 568 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{1}{x^2} = \cancel{27}$$

$$\frac{1}{(x+2)(2+1)} = \cancel{5}$$

$$\frac{1}{(x+6)(2+7)} = \cancel{10}$$

$$\frac{1}{x^2} = 27$$

$$\frac{1}{(x+2)(2+1)} = 15 \cdot \frac{1}{2+1+6}$$

$$\frac{1}{x+6}(2+2) = 10$$

$$\begin{array}{r} 46 \\ \times 46 \\ + 276 \\ \hline 139 \\ + 276 \\ \hline 3148 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2776 \\ + 1632 \\ \hline 3148 \\ + 7197 \\ + 798 \\ \hline 1995 \\ + 1995 \\ \hline 3990 \\ + 2380 \\ \hline 2964 \end{array}$$

$$1,5x^2 - 73x = 69x - 177 + x + 78$$

$$1,5x^2 - 23x + 99 = 0$$

$$3x^2 - 46x + 198 = 0$$

$$70(x+6)(2+2)$$

$$70(x+6)(2+2)$$

$$1 = 27x^2$$

$$1 = 150(2+6)(2+7)$$

$$1 = 70(x+6)(2+2)$$

$$6x^2 = 302 + 75x + 30$$

$$x^2 = 52 + 2,5x + 5$$

$$5x^2 = 702 + 5x + 10$$

$$x^2 = 72 + x + 2$$

$$x^2 = 52 + 2,5x + 5$$

$$0 = 32 + 1,5x + 3$$

$$x^2 = 62 + x + 78$$

$$14 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 27 \cdot 20 \cdot 3$$

$$1,5x^2 - 13x = 69x - 40 + x + 70$$

$$x^2 = \frac{1}{27}$$

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \quad 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$1 = 27x^2$$

$$1,5x^2 - 23x + 68 = 27x^2 = 7$$

$$3x^2 - 46x + 136 = 0$$

$$70(x+6)(2+2)$$

$$\begin{array}{r} \times 177 \\ 7 \\ \hline + 136 \\ 197 \\ \hline + 272 \\ 7632 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 28 \\ 23 \\ \hline + 74 \\ 3708 \\ \hline + 58 \\ 644 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $17 = 3x^2 - 4x + 2$
 $3x^2 - 4x - 15 = 0$
 $D = 196 = 14^2$

$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -\frac{5}{3} \end{cases}$

Пусть l — длина отрезка отсекаемого параболой

$l_0 = x_1 - x_2 = 4\frac{2}{3}$

$l_c = \sqrt{l_0^2 + l_0^2} = \frac{\sqrt{200}}{3}$

или

$l_0 = \sqrt{l_c^2 + l_c^2} \pm l_c = \sqrt{l_c^2 - l_c^2} = \frac{\sqrt{192}}{3}$

$3x^2 - 4x + 2 = a$

$3x^2 - 4x + 2 - a = 0$

$D = 12a - 7$

$x_1 = \frac{4 + \sqrt{12a - 7}}{6}$

$x_2 = \frac{4 - \sqrt{12a - 7}}{6}$

$l = \frac{\sqrt{12a - 7}}{3}$

$\frac{\sqrt{12a - 7}}{3} = \frac{\sqrt{192}}{3}$

$\frac{\sqrt{12a - 7}}{3} = \frac{\sqrt{200}}{3}$

$\begin{cases} a = \frac{20}{3} \\ a = \frac{22}{3} \end{cases}$

Отметим $a = \frac{50}{3}; a = \frac{52}{3}$

2) Взяли 146 цифр из 146 цифр:

$$\underbrace{2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2}_{10 \text{ раз}} = 2^{10}$$

Взяли 2 варианта (1111111111 и 0000000000), т.к. каждая группа цифр должна быть одинаковой.

$$2^{10} - 2$$

Теперь предположим, что в 20-м значении 9

то есть 17 вариантов ~~того количества~~

~~мы не считаем~~ ~~того количества~~ ~~того количества~~ ~~того количества~~ ~~того количества~~

$$| \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad | \quad |$$

Умножаем на $(2^{10} - 2) \cdot 17$ ~~того количества~~

5 / Пусть x - количество людей, z - время, которое они работают каждый день, W - работа которую они могут сделать.

$$\begin{cases} 21x + z = W \\ 15(x+2) + (z+1) = W \\ 10(x+6) + (z+2) = W \end{cases}$$

Взяли из первого уравнения:

$$6x + z = 30z + 15x + 50$$

$$xz = 9z + 2,5x + 5$$

Взяли из второго уравнения

$$5xz = 30z + 9x + 40$$

$$xz = 6z + x + 7,8$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Выделить корень уравнения

$$= 2 + 7,5x - 73 = 0$$

$$x = 7,5x - 73$$

Подставим x в уравнение $x(x - 6x + 73)$

$$x(7,5x - 73) = 6(7,5x - 73) + x + 73$$

$$+ 7,5x^2 - 23x + 60 = 0$$

$$5x^2 - 46x + 72 = 0$$

$$D = 676 = 26^2$$

$$\begin{cases} x_1 = 12 \\ x_2 = \frac{20}{3} \end{cases}$$

Отметим $x = 12$ $x = 5$

№7. Точность для малых значений x в единицы отклонения от значения $x = 5$ в радиусе

~~Точность~~ Точность предельно малая

$$x \quad x+7 \quad x+2 \quad x+3 \quad x+4 \quad x+5 \quad x+6$$

$$x+57 \quad x+59 \quad x+59 \quad x+60 \quad x+67 \quad x+62 \quad x+63$$

$$x+174 \quad x+175 \quad x+176 \quad x+177 \quad x+178 \quad x+179 \quad x+180$$

$$x+177 \quad x+178 \quad x+179 \quad x+180 \quad x+181 \quad x+182 \quad x+183$$

Максимальная возможная сумма будет при $k=23$

$$21k + 27 + 54 \cdot 7 + 27 + 774 \cdot 7 + 27 + 177 \cdot 7 + 27 =$$

$$23k + 84 + 309 + 794 + 1797 = 280 + 2464 = 3706$$

Ответ 3706

~~4~~ ~~3~~ 2

