

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 3

ШИФР

5-022

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2 - 5x + 1$ пересекает прямые $y = -1$, $y = 4$ и $y = a$, отсекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Найдите количество 16-значных чисел, содержащих только цифры “3”, “4” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “9” ровно четыре, и они идут подряд.
3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 24$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 2a| \leq \sqrt{x - 1}$ является отрезок длины 3?
5. Несколько рабочих выполняют работу за 28 дней. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 21 день. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 15 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 7 : 3$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $7 : 36$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 3.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 30]$, $[31; 60]$, $[61; 90]$, $[91; 120]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 30. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Заметим, что получившиеся отрезки равны $|x_1 - x_2|$, где x_1 и x_2 корни получившихся уравнений. Заметим $|x_1 - x_2| = \frac{|\sqrt{D}|}{a}$ (a - старший коэффициент).
Найдём отрезки для: (в нашем случае $a=2$)

1) $y = -1$

$$2x^2 - 5x + 1 = -1$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\frac{|\sqrt{D}|}{a} = \frac{|\sqrt{25 - 16}|}{2} = \frac{3}{2}$$

2) $y = 4$

$$2x^2 - 5x + 1 = 4$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$\frac{|\sqrt{D}|}{a} = \frac{|\sqrt{25 + 24}|}{2} = \frac{7}{2}$$

3) $y = a$

$$2x^2 - 5x + 1 = a$$

$$2x^2 - 5x + (1 - a) = 0$$

$$\frac{|\sqrt{D}|}{a} = \frac{|\sqrt{25 - 2 \cdot 4(1 - a)}|}{2} = \frac{\sqrt{17 + 8a}}{2}$$

Чтобы получились прямоугольный треугольник есть только два случая

1) отрезок при $y = a$ будет катетом при том заметим, что гипотенузой будет $\left(\frac{7}{2}\right)$ (или наибольший) отрезок. Тогда по теореме

$$\frac{9}{4} + \frac{17 + 8a}{4} = \frac{49}{4} \quad 8a = 23 \quad a = \frac{23}{8}$$

Проверяем подставляем.

2) Отрезок при $y=0$ является интервалом
Тогда получаем:

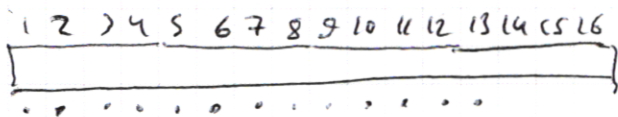
$$\frac{9}{4} + \frac{49}{4} = \frac{17+8a}{4} \quad 8a = 41 \quad a = \frac{41}{8}$$

Проверяем и он подходит.

Все случаи исчерпаны.

Ответ: $a = \frac{41}{8}$ или $a = \frac{23}{8}$

2. Заметим, что размеры подраз деловки можно расположить только 13 вариантами



«Первая» деловка не может быть в 47 (3/4) раз

Тогда осталось подсчитать каким образом можно поместить 3 и 4 в оставшиеся клетки,

А именно $2^{12} - 2$, 2^{12} потому что в каждую клетку можно только 3 или 4, но есть 2 случая в 12 клетках. А - 2 так как все должно быть сделано, что только один 3 или 4 в 12 разрядов. Получаем

$$13(2^{12} - 2) = 13 \cdot 2^{12} - 26$$

Ответ: $13 \cdot 2^{12} - 26$ ($13 \cdot 2^{12} - 26$)

4. Предполагая, что $x-1$ будет положительным ($x > 1$) возведем обе части в квадрат, получаем

$$(ax - 2a)^2 \leq x - 1 \quad a^2x^2 + 4a^2 - 4a^2x \leq x - 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$0 \leq -a^2 x^2 + x(1+4a^2) - 1 - 4a^2$$

Решим квадратное уравнение относительно x

$$x_{1,2} = \frac{-1-4a^2 \pm \sqrt{(1+4a^2)^2 - 4a^2(1+4a^2)}}{-2a^2} = 2 + \frac{1}{2a^2} \pm \frac{\sqrt{1+4a^2}}{-2a^2} \quad (*)$$

Как и в первом задании отрезком будет $|x_1 - x_2| = \left| \frac{\sqrt{D}}{a} \right|$ (а-стационарные значения)

Тогда получаем: $\left| \frac{\sqrt{1+4a^2}}{-a^2} \right| = 3$

Возведем в квадрат: $1+4a^2 = 9a^4$

$$9a^4 - 4a^2 - 1 = 0$$

Пусть $t = a^2$ тогда решим квадратное уравнение относительно t

$$9t^2 - 4t - 1 = 0 \quad D = 16 + 4 \cdot 9 = 52$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{13}}{18}$$

П.к. $t = a^2 \quad t \neq 0$ из этого

следует, что $t = \frac{2+2\sqrt{13}}{9} \quad a_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2+2\sqrt{13}}{9}} =$
 $= \frac{\pm \sqrt{2+2\sqrt{13}}}{3}$

Подставив данные в $(*)$ получаем $x_2 > 1$
 Значит $\sqrt{x-1}$ не будет отрицательным, наше предположение верно

Ответ: $a_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{2+2\sqrt{13}}}{3}$

5. Сложите уравнения по условию, при этом r - рабочую которую нужно сделать p -треугольниками и x - изначально рабочих, тогда:

$$1) \frac{r}{px} = 28 \quad 2) \frac{r}{(p+1)(x+2)} = 21 \quad 3) \frac{r}{(p+2)(x+6)} = 15$$

Тогда приравнивая r из 1) и 2) и подставив на 7 получаем:

$$4px = 3(p+1)(x+2); \quad 4px = 3px + 6 + 3x + 6p;$$

$$px - 6p = 3x + 6$$

$$p = \frac{3x+6}{x-6}$$

Приравниваем r из 1) и 3)

$$28px = 15(p+2)(x+6) \quad 28px = 15px + 180 + 30x + 90p$$

$$p(13x-90) = (30x+180); \quad \text{Подставим } p = \frac{3x+6}{x-6}$$

$$3(x+2)(13x-90) = 3(10x+60)(x-6) \quad \text{Сократим на 3 и разложим}$$

$$13x^2 - 90x + 26x - 180 = 10x^2 + 60x - 60x - 360$$

$$3x^2 - 64x + 180 = 0 \quad D = 64^2 - 4 \cdot 180 \cdot 3$$

$$\text{Решим квадрат. отк. } x \quad D = 4^2(16^2 - 3 \cdot 45) \quad D = 4^2 \cdot 11^2$$

$$x_{1,2} = \frac{64 \pm 4 \cdot 11}{6} \quad x_1 = 18 \quad x_2 = \frac{20}{6} \left(\frac{10}{3} \right)$$

$x_2 = \frac{10}{3}$ невозможна так как люди целые и $x \in \mathbb{Z}$

$x_1 = 18$ Единственный вариант. Подставив все проверяем

Ответ: $x = 18$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. П.к. разность двух выбранных не делится на 30, то все выбранные числа имеют разные остатки на 30, в противном случае числа с одинаковыми остатками противоречили условию. Заметим, что каждой разности соответствует число остатков 1 по 6 30, следовательно, это бы сумма была наибольшей числа в ней могут иметь остатки $0, 29, 28, 27, 26, 25, 24, 23, 22, 21, \dots, 7$ (24 остатка)

Заметим, что выбрав по 6 чисел (каждого ^(с разными остатками) разности) сумма будет равна

$$120 \cdot 6 + 60 \cdot 6 + 90 \cdot 6 + 30 \cdot 6 - 0 - 1 - 2 - 3 - \dots - 23 = S$$

И это верно п.к. как бы мы не выбрали числа с остатками они будут представлять к примеру в попар в виде $29 - 29 = 30 - 1$

А так как уменьшаются $120 = 120 - 0$ и т.д.
 $57 = 60 - 3$
будут разности (-1, -2, -3)

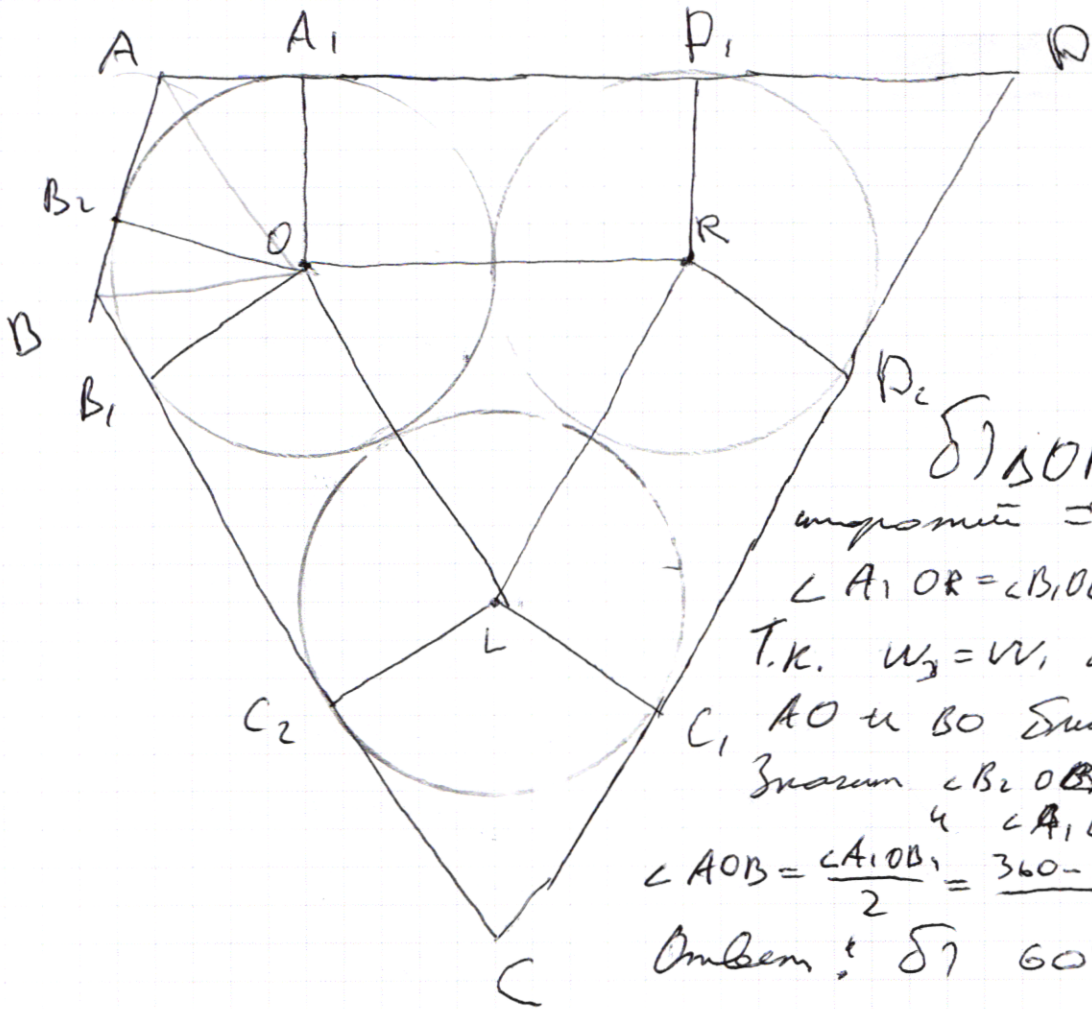
Они не повторяются и мы можем представить наибольшую сумму в виде S

$$\text{Каждое } S = 6 \cdot (120 + 90 + 60 + 30) - \frac{23 \cdot 24}{2} \text{ (арифм.)} =$$

$$= 1524$$

Ответ: 1524

3.



$\delta) \triangle ORL$ - равно-
 угловый $\Rightarrow \angle ORL = 60^\circ$
 $\angle A_1OR = \angle B_1OL = 90^\circ$
 Т.к. $W_3 = W_1$ и $W_3 = W_2$
 AO и BO биссектрисы
 Знаем $\angle B_2OB = \angle B_1OB$
 и $\angle A_1OA = \angle AOB_2$
 $\angle AOB = \frac{\angle A_1OB_1}{2} = \frac{360 - 90 - 90 - 60}{2} = 60^\circ$
 Ответ: $\delta) 60^\circ$

$a) AD = AA_1 + A_1D_1 + D_1D$ $DC = CC_1 + C_1D_2 + D_2D$
 $BC = BB_1 + B_1C_2 + C_2C$ $AB = AB_2 + B_2B$

П.к. у нас как есть пересекющиеся касательные,
 то $AA_1 = AB_2$ $BB_2 = BB_1$ $C_2C = C_1C$ $\& D_1D = D_2D$

Заметим разность вычтем

$AD + BC - AB - CD = 24$ $A_1D_1 + B_1C_2 - D_2C_1 = 24$

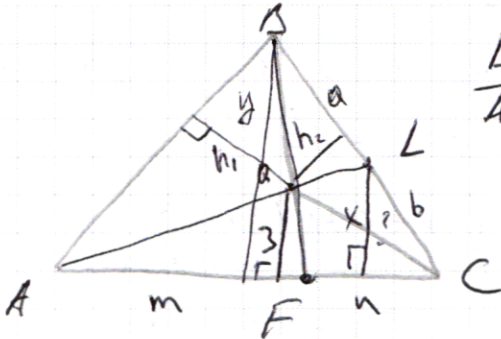
Заметим, что $A_1D_1 = B_1C_2 = D_2C_1 = 2r$ где

r радиус и это верно так как это касательные
 к двум одинаковым окр. $\Rightarrow 2r = 24$

$r = 12$

Ответ: а) $r = 12$ $\delta) 60^\circ$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{S_{QCL}}{S_{ABC}} = \frac{7}{36}$$

$$X(m+n) + \frac{7}{18} S_{ABC} = 3(m+n) + h_2 \cdot BC$$

$$\frac{7}{10} S_{ABC} = h_2 \cdot BC + 3 \cdot n$$

$$\frac{AF}{FC} = \frac{7}{3} \quad \frac{S_{AFB}}{S_{BFC}} = \frac{7}{3} \frac{X \cdot AC}{z \cdot AC} + \frac{h_1 \cdot AB}{2} + \frac{h_2 \cdot AC}{2} = S_{ABC}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{3 \cdot AC}{2} + \frac{h_1 \cdot AB}{2} + \frac{h_2 \cdot AC}{2} = S_{ABC}$$

$$3m = 7n$$

$$(x-3)AC - h_2(a-b) = 0$$

$$S_{ADC} = S_{AFB} + S_{BFC} \quad (x-3)(m+n) - b h_2 = 0$$

$$S_{AFB} = \frac{7}{10} S_{ABC} \quad \frac{y \cdot n}{2} -$$

$$\frac{7}{10} S_{ABC} = S_{AFB} \quad \frac{y \cdot n}{2} -$$

$$\frac{7}{3} n$$

$$X \cdot \frac{10}{3} \cdot n + h_2 \cdot a = 10n + h_2 \cdot b$$

$$10n \left(\frac{x}{3} - 1 \right) = h_2 b$$

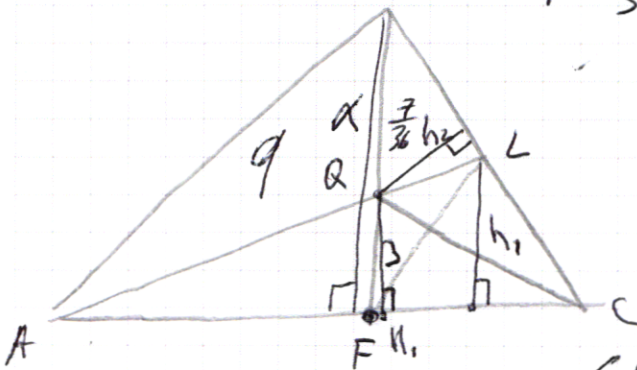
$$h_2(a+b) - h_1 a$$

$$\frac{3 \cdot AC}{2} + \frac{h_2 \cdot LC}{2} = \frac{h_1 \cdot AC}{2}$$

$$h_1?$$

$$\frac{3}{7} \quad \frac{10}{8}$$

$$\frac{S_{AFB}}{S_{BFC}} = \frac{7}{3}$$



$$\frac{3 \cdot AC}{2} \neq 3m$$

$$\frac{r}{px} = 28$$

$$\frac{r}{(p+1)(x+2)} = 21$$

$$\frac{r}{(p+2)(x+6)} = 15$$

$$4px = 3(p+1)(x+2)$$

$$px = 6 + 6p + 3x$$

$$6 = 15$$

$$30 \cdot 6$$

$$p = \frac{3x+6}{x-6}$$

$$15(p+2)(x+6) = 28px$$

$$15px + 180 + 90p + 30x = 28px$$

$$(30x+180) = p(13x-90)$$

$$(x-6)(30x+180) = (3x+6)(13x-90)$$

$$(x-6)(10x+60) = (x+2)(13x-90)$$

$$10x^2 + 60x - 60x - 360 = 13x^2 - 90x + 26x - 180$$

$$3x^2 - 64x + 180 = 0$$

$$64^2 - 3 \cdot 180 \cdot 4$$

$$180 \cdot 20 \cdot 4 \cdot 4$$

$$4^2(16^2 - 3 \cdot 45)$$

$$64$$

$$16 \cdot 16 = 160 + 96$$

$$256 - 135 = 121$$

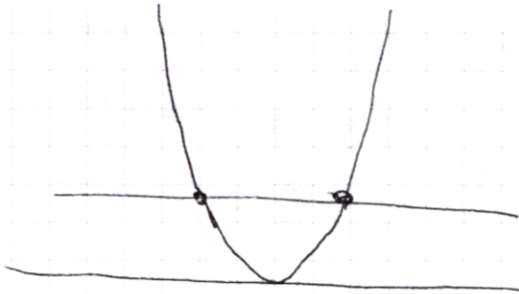
$$x_{1,2} = \frac{64 \pm 4 \cdot 11}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{32 \pm 22}{3}$$

$$\frac{54}{3} = 18$$

$$\frac{48+6}{12} = \frac{54}{12}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{D}{4} + \frac{9}{4} = \frac{49}{4}$$

$$b^2 - 4ac = 40$$

$$25 - 4 \cdot 2(1-a) = 40$$

$$8a = 40 - 25 + 8$$

$$a = \frac{23}{8}$$

$$y = 1$$

$$f(x) = x^2$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$\text{Сумма } x_1 + x_2 =$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{\pm 2}{2} = \pm 1$$

$$\left| \frac{\sqrt{D}}{a} \right| \quad x_1 - x_2$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 16 \quad D = 9 \quad \frac{3}{2}$$

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$25 + 24 = 49 \quad \frac{7}{2}$$

$$\frac{9}{4} + \frac{49}{4} = \frac{\sqrt{D}^2}{a^2} \quad \frac{D}{a^2}$$

$$58 = 25 - 4a - 4 \cdot 2(1-a)$$

$$58 = -8 + 8a$$

$$66 = -8 + 8a$$

$$41 = 8a$$

$$a = \frac{41}{8}$$

$$6x^2 - 18x + 12x - 36 = 3x^2 - 18x + 26x - 156$$

$$3x^2 - 14x + 120 = 0$$

~~14~~

$$\frac{r}{px} = 28$$

$$28px = 21(p+1)(x+2)$$

$$4px = 3(p+1)(x+2)$$

$$28 \cdot 8 = 21 \cdot 16 \cdot 2$$

$$4px = 3px + 6 + 6p + 3x$$

-264

$$p(x-6) = 3x+6$$

$$\frac{18 \cdot 8}{2} = 220$$

$$p = \frac{3x+6}{x-6} = \frac{30}{2} = -6 \cdot 94$$

$$\frac{24}{7}(p+1)(x+2) = \frac{15}{5}(p+2)(x+6)$$

$$2px + 14 + 14p + 7x = 3px + 60 + 30p + 10x$$

$$p(2x - 16p) = 3x + 44$$

$$(3x+6)(2x-16) = (x-6)(3x+44)$$

$$6x^2 - 48x + 12x - 96 = 3x^2 + 44x - 18x - 264$$

$$3x^2 - 62x + 168$$

$$62^2 - 4 \cdot 168 \cdot 3$$

$$4(31^2 - 168 \cdot 3)$$

$$16 + 2 \cdot 4 = 52$$

$$120 + 119 + 118 + 117 + 116 + 115$$

$$84 + 83 + 82 + 81 + 80 + 79$$

$$120 \cdot 6 + 90 \cdot 6 + 60 \cdot 6 + 30 \cdot 6 - 0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7$$

$$10 \sqrt{13}$$

$$64 + 44$$

$$20$$

$$\begin{array}{r} 108 \overline{) 6} \\ 16 \\ \hline 48 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2900

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

12

+

$2^{12} \cdot 13$

X

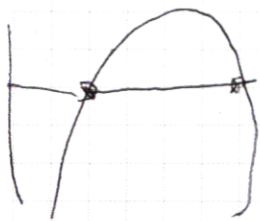
(ответить надо)

$2 \leq 2,5 \leq 3$
 $2 \leq 2,4 \leq 3$

$$(ax - 2a)^2 \leq x - 1$$

$$a^2 x^2 + 4a^2 - 4a^2 x \leq x - 1$$

$$-a^2 x^2 + x(1 + 4a^2) + (-1 - 4a^2)$$



$$\frac{\sqrt{D}}{a}$$

$$\frac{\sqrt{(1+4a^2)^2 + 4a^2(-1-4a^2)}}{-a^2}$$

$$\frac{(1+4a^2)(1+4a^2 - 4a^2)}{\sqrt{1+4a^2}}$$

$$1+4a^2 = a^4$$

$$a^4 - 4a^2 - 1 = 0$$

$$\frac{4 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$\frac{\pm \sqrt{2} \pm \sqrt{5}}{\pm \sqrt{2 + \sqrt{5}}}$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot h_{AC} + \frac{1}{2} AB \cdot h_{AB}$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot h_{AC} + \frac{1}{2} AB \cdot h_{AB}$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot h_{AC} + \frac{1}{2} AB \cdot h_{AB}$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot h_{AC} + \frac{1}{2} AB \cdot h_{AB}$$

$$S(ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot h_{AC} + \frac{1}{2} AB \cdot h_{AB}$$

$$X \begin{array}{r} 26 \\ 6 \\ 36 \\ 12 \\ \hline r \cdot 56 \\ \hline p x \end{array} = 28$$

$$\frac{r}{(p+1)(x+2)} = 21$$

$$\frac{r}{(p+2)(x+4)} = 15$$

$$7(p+1)(x+2) = 5(p+2)(x+4)$$

$$\begin{aligned} 7px + 14 + 14p + 7x &= \\ &= 5px + 40 + \\ &\quad + 20p + 10x \end{aligned}$$

$$2px - 26 - 6p - 3x = 0$$

$$p(2x - 6) = 3x + 26$$

$$(3x+6)(2x-6) = (3x+26)(x-6)$$

$$\begin{aligned} 28px &= 21(p+1)(x+2) \\ \cancel{28px} &= \cancel{21px} + 42 + \cancel{42p} + 21x \\ 7px &= \cancel{42} + \cancel{42p} + 21x \\ p(7x - 42) &= 42 + 21x \\ p &= \frac{42 + 21x}{7x - 42} \end{aligned}$$

$$4px = 3(p+1)(x+2)$$

$$4px = 3px + 6 + 6p + 3x$$

$$px - 6p = 6 + 3x$$

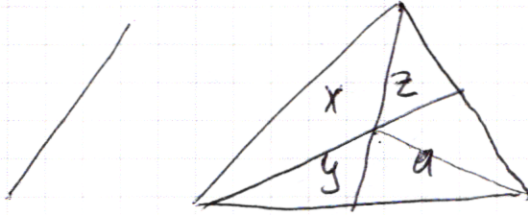
$$p = \frac{3x+6}{x-6}$$

$$28px = 15(p+2)(x+4)$$

$$\cancel{28px} = \cancel{15px} + 60p + 30x + 12p$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$AE \left(\frac{x}{2} \left(1 - \frac{7}{10} - \frac{7}{36} \right) - \frac{9}{20} \right) = \frac{h_1}{2} - \frac{3}{2}$$



$$\frac{x+z}{y+a} = 1 + \frac{x+z}{y+a} - ?$$

$$z = \frac{7}{36} (z + x + y + a)$$

$$7(x+y) = 3(z+a)$$

$$36z = 10z + 10a$$

$$26z = 10a$$

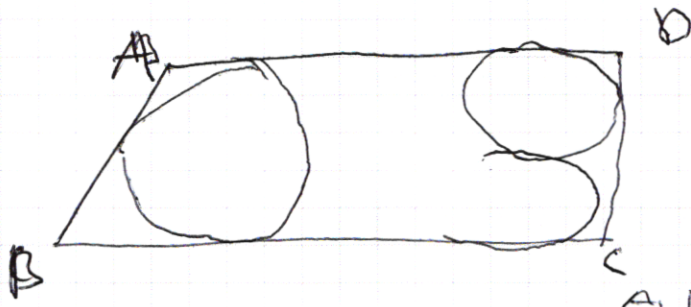
$$29 - x + z = 24$$

$$31 - 24 = x$$

$$7 = x$$

$$AE \quad 6(120300 - 46) = 6 \cdot 300 - 12 \cdot 23$$

$$\begin{array}{r} 300 \quad 294 \\ \quad \quad 6 \\ \quad \quad 24 \\ \quad \quad 30 \\ 12 \\ \hline 1524 \end{array}$$



$$2r = 12$$

