

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 4

ШИФР

2-001

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = 3x^2 - 4x + 2$  пересекает прямые  $y = 17$ ,  $y = 1$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Найдите количество 20-значных чисел, содержащих только цифры “1”, “5” и “6” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “5” ровно десять, и они идут подряд.
3. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
  - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 38$ .
  - б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
4. При каких значениях параметра  $a$  решением неравенства  $|ax - a| \leq \sqrt{x - 2}$  является отрезок длины 1?
5. Несколько рабочих выполняют работу за 21 день. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 15 дней. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 10 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 2 : 7$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $8 : 21$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 13.
7. Пиноккио выбрал по 7 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 50]$ ,  $[51; 100]$ ,  $[101; 150]$ ,  $[151; 200]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 50. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати восьми выбранных Пиноккио чисел?



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑤

	работы (N)	время (t)	производительность (x)	работа (A)
I	N	21 <sup>дней</sup> <del>дней</del>	Z	A
II	N+2	15 <sup>дней</sup> <del>дней</del>	m	A
III	N+4	10 <sup>дней</sup> <del>дней</del>	n	A

1 день — 1 рабочий работает y часов и производит Z деталей.

За 1 час 1 рабочий производит ~~x~~  $\frac{Z}{y}$  деталей.

I  $1y - yz - z$

$2AN = A = 21Nz = 15(N+2)m =$

II  $1y - y + yz - z + \frac{z}{y}$

$= 10(N+4)n$

III  $1y - y + yz - z + \frac{z}{y}$

$21Nz = 15(N+2)(z + \frac{z}{y}) = 10(N+4)(z + \frac{z}{y})$

$15(N+2) = 10(N+4)$

$15N+30 = 10N+40$

$5N = 10$

$N = 2$  ответ 2

$$\textcircled{1} \quad y = 3x^2 - 4x + 2$$

$$y = 17$$

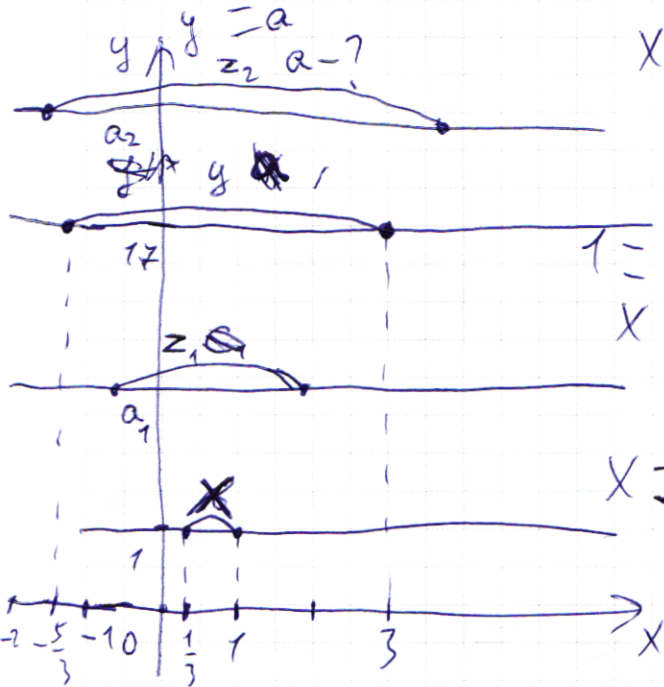
$$y = 1$$

$$17 = 3x^2 - 4x + 2$$

$$3x^2 - 4x - 15 = 0$$

$$x = \frac{4 - \sqrt{4^2 + 4 \cdot 3 \cdot 15}}{6} = \frac{4 - \sqrt{196}}{6} = \frac{4 - 14}{6} = -\frac{5}{3}$$

$$x = \frac{4 + \sqrt{4^2 + 4 \cdot 3 \cdot 15}}{6} = \frac{4 + \sqrt{196}}{6} = \frac{4 + 14}{6} = 3$$



$$1 = 3x^2 - 4x + 2$$

$$x = \frac{4 - \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{6} = \frac{4 - \sqrt{4}}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{4 + \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{6} = \frac{4 + \sqrt{4}}{6} = 1$$

$$z_1 = \sqrt{y^2 - x^2} = \sqrt{\left(3 + \frac{5}{3}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$z_2 = \sqrt{y^2 + x^2} = \sqrt{\left(3 + \frac{5}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} 8Ny - 15N - 30y - 30 &= 0 \\ 6Ny + 6N - 36y - 36 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3Ny - 5N - 10y - 10 &= 0 \\ 3Ny + 3N - 18 - 18 &= 0 \end{aligned}$$

$$2xN - 66y - 66 = 0$$

$$-8N + 8y + 8 = 0$$

$$17 = 3x^2 - 4x + 2$$

$$3x^2 - 4x - 15 = 0$$

$$N = y + 8$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \quad x = \frac{4 - \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 3} = \frac{4 - \sqrt{4}}{6} = \frac{2}{3}$$

$$11Ny - 20N - 60y - 120 = 0$$

$$33Ny - 60N - 180y - 360 = 0$$

$$11Ny + 11N - 66y - 66 = 0$$

$$33Ny - 55N - 110y - 110 = 0$$

$$-31N + 6y - 54 = 0$$

$$-5N - 70y - 250 = 0$$

$$31N = 6y - 54 \quad x = \frac{4 - \sqrt{4^2 + 4 \cdot 3 \cdot 15}}{6} = \frac{4 - \sqrt{196}}{6} = \frac{4 - 14}{6} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$$

$$31(y + 8) = 6y - 54$$

$$x = \frac{4 + \sqrt{4^2 + 4 \cdot 3 \cdot 15}}{6} = 3$$

$$31y + 248 = 6y - 54$$

25

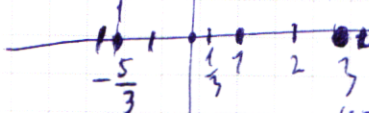
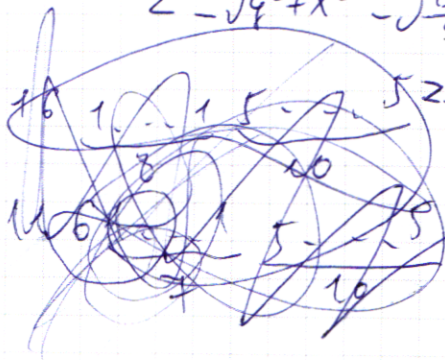
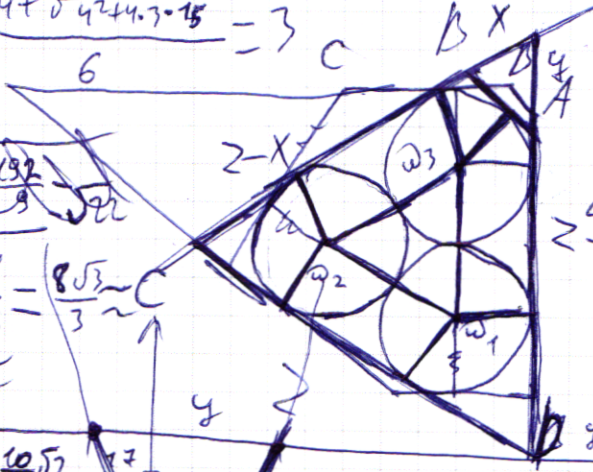
$$z = \sqrt{\frac{196}{9} - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{192}{9}} = \sqrt{21.33} \approx 4.62$$

$$AD + BC - AB - CD = 38$$

$$z = \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8\sqrt{3}}{3} \approx 4.62$$

$$z = \sqrt{y^2 + x^2} = \sqrt{\frac{196}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{10\sqrt{2}}{3} \approx 4.71$$

$$z = \frac{200}{9} \approx 22.22$$



$$y = 3 + \frac{5}{3} = \frac{14}{3}$$

$$x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

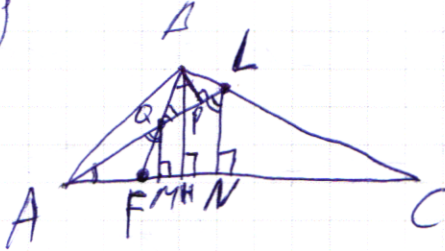


черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6



$$\frac{AF}{FC} = \frac{2}{7} \quad LN = ?$$

$$QM = 13$$

$$\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}} = \frac{8}{21} = \frac{BP \cdot QL}{2} = \frac{8}{21}$$

$$\frac{BP \cdot QL}{BH \cdot AC} = \frac{8}{21}$$

$\triangle AQM \sim \triangle ALN \sim \triangle BQP$

$$\frac{QL}{AQ} = \frac{MN}{AM} \quad \frac{AQ}{AL} = \frac{AM}{AN} = \frac{QM}{LN}$$

$$\frac{AQ}{AQ+QL} = \frac{AM}{AM+MN} = \frac{QM}{LN}$$

r	b	n	работа
N	+	X	A
N	2tg	<del>X</del>	A
N+2	15g	m	A
N+6	10g	n	A

~~10g~~ 10g - 15g = -5g  
1g =  $\frac{z}{y}$  10g =  $\frac{z}{y}$  10y = z

$$A = N \cdot 21 \cdot \frac{z}{y}$$

10g - 15g + 15g = 15g 1g =  $\frac{m}{y+1}$

10g - 15g + 20g = 15g 1g =  $\frac{n}{y+2}$

$$y+1 = m = 2 + \frac{z}{y}$$

$$n = 2 + 2 \frac{z}{y}$$

$$6N - \frac{15N}{y} - 30 - \frac{30}{y} = 0$$

$$A = 21Nz = 15(N+2)m = 10(N+6)n$$

$$21Nz = 15(N+2)(z + \frac{z}{y}) = 10(N+6)(z + 2\frac{z}{y}) \quad \left. \begin{aligned} 21N &= 10N + \frac{20N}{y} + 60 + \frac{120}{y} \\ 11N &= \frac{20N}{y} + 60 + \frac{120}{y} = 0 \\ 11Ny - 20N - 60y - 120 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$21Nz = 15z(N+2)(1 + \frac{1}{y}) \quad 21N = 15N + \frac{15N}{y} + 30 + \frac{30}{y}$$

$$6N - \frac{15N}{y} - 30 - \frac{30}{y} = 11N - \frac{20N}{y} - 60 - \frac{120}{y} \quad 15N + \frac{15N}{y} + 30 + \frac{30}{y} = 10N + \frac{20N}{y} + 60 + \frac{120}{y}$$

$$5N - \frac{5N}{y} - 30 - \frac{30}{y} = 0 \quad 15N_y + 15N + 30y + 30 = 10N_y + 20N + 60y + 120$$

$$N - \frac{N}{y} - 6 - \frac{18}{y} = 0$$

$$5N_y - 5N - 30y - 30 = 0$$

$$N_y - N - 6y - 18 = 0$$

$$5N_y - 5N - 30y - 30 = N_y - 18y - 18$$

$$N_y - N - 6y - 18 = 11N_y - 2N - 6y - 12$$

$$91N_y - N + 6 = 0$$

$$6N_y - 15N - 30y - 30 = 36y - \frac{90}{1-91y} - 30y - 30 = 0$$

$$N(1-91y) = 6$$

$$(1-91y)(36y-90) - 30y - 30 = 0$$

$$36y - 90 - 3,6y + 9y - 30y - 30 = 0$$

$$6y - 3,6y + 9y - 120 = 0$$

$$11,4y = 120$$

$$11,4y = 1200$$

$$y = \frac{1200}{11,4} = \frac{600}{5,7} = \frac{200}{1,9}$$

$$15(N+2)(1+\frac{1}{y}) = 10(N+4)(1+\frac{1}{y})$$

$$15N + \frac{15N}{y} + 30 + \frac{30}{y} = 10N + \frac{20N}{y} + 60 + \frac{120}{y}$$

$$15N_y + 15N + 30y + 30 = 10N_y + 20N + 60y + 120$$

$$5N_y + 5N - 30y - 30 = 0$$

$$N_y + N - 6y - 6 = 0$$

$$A = 21N = 15(N+2)(1+\frac{1}{y}) = 10(N+4)(1+\frac{1}{y})$$

$$21N = 15(N+2)(1+\frac{1}{y}) = 10(N+4)(1+\frac{1}{y})$$

$$15N + 30 = 10N + 40$$

$$5N = 10 \quad N = 2$$

$$21N = 15(N+2)(1+\frac{1}{y})$$

$$21N = 10(N+6)(1+\frac{2}{y})$$

$$21N = 15N + \frac{15N}{y} + 30 + \frac{30}{y}$$

$$21N = 10N + \frac{20N}{y} + 60 + \frac{120}{y}$$

$$6N - \frac{15N}{y} - 30 - \frac{30}{y} = 0$$

$$11N - \frac{20N}{y} - 60 - \frac{120}{y} = 0$$

$$6N_y - 15N - 30y - 30 = 0$$

$$11N_y - 20N - 60y - 120 = 0$$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2-001

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

2-001

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)