МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 3 ШИФР 14-007

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2 - 5x + 1$ пересекает прямые $y = -1$, $y = 4$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?

2. Найдите количество 16-значных чисел, содержащих только цифры "3", "4" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "9" ровно четыре, и они идут подряд.

3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 24$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 2a| \leqslant \sqrt{x-1}$ является отрезок длины 3?

5. Несколько рабочих выполняют работу за 28 дней. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 21 день. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 15 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 7 : 3$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $7 : 36$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 3.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 30]$, $[31; 60]$, $[61; 90]$, $[91; 120]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 30. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-007

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

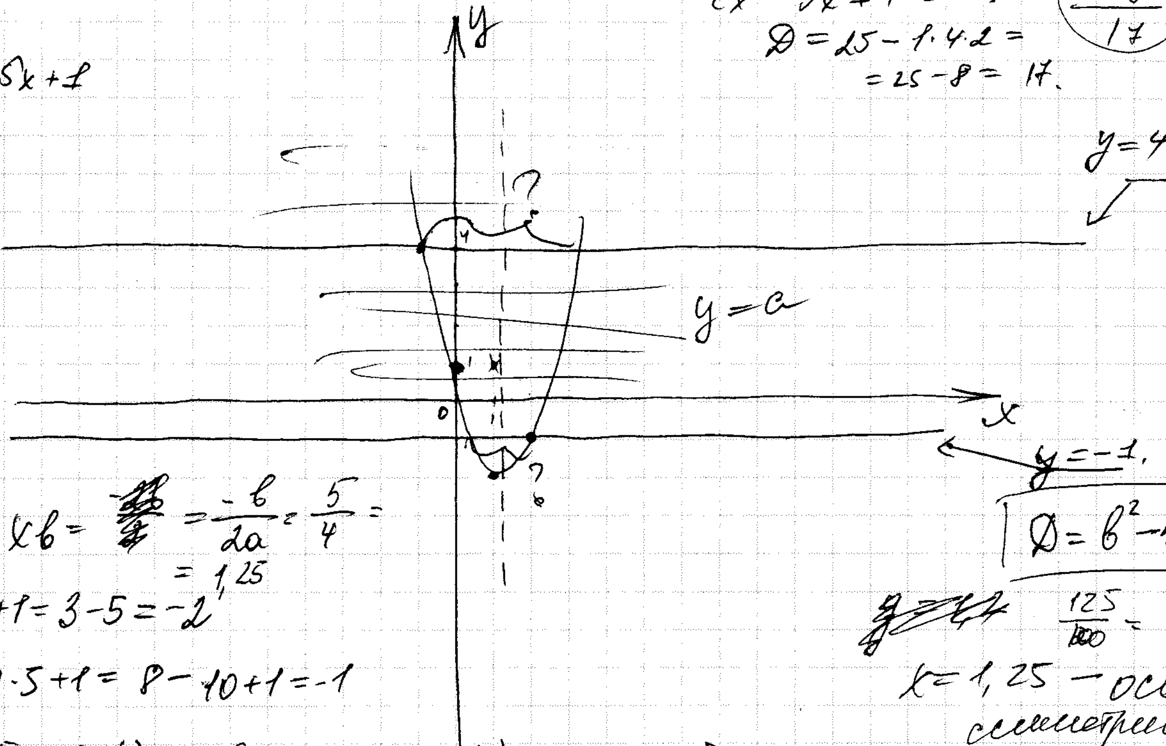
$$\begin{cases} y=2x^2-5x+1 \\ y=-1 \\ y=4 \\ y=a \end{cases}$$

$2x^2-5x+1=0.$

$D=25-1\cdot4\cdot2=$

$=25-8=17.$

$25-8=17$



$\boxed{D=b^2-4ac}$

$y(0)=1,\quad x_b=\frac{-b}{2a}=\frac{5}{4}=$

$=1{,}25$

$y(1)=2-5+1=3-5=-2$

$(2)=2\cdot4-2\cdot5+1=8-10+1=-1$

$\frac{125}{100}=\frac{5}{4}$

$x=1{,}25$ — ось симметрии функции $y(x)=2x^2-5x+1$.

$$\begin{cases} y=2x^2-5x+1 \ (1) \\ y=-1 \ (2) \end{cases}$$

Функция (1) пересекает функцию (2) в точках:

$2x^2-5x+1=-1 \iff 2x^2-5x+2=0.$

$D=25-4\cdot2\cdot2=25-16=9$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{5+3}{4}=\frac{8}{4}=2$

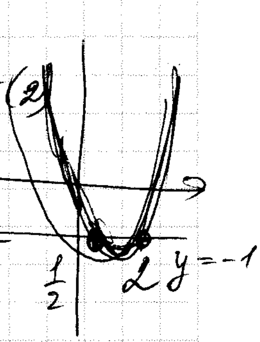
$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{5-3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=0{,}5$

$$\begin{cases} y=2x^2-5x+1 \ (1) \\ y=4 \ (3) \end{cases}$$

$y_0(x_0)=2\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2-\frac{5\cdot5}{4}+1=$

т.е. функция (1) отсекает от (2) отрезок $x_1-x_2=2-0{,}5=1{,}5=1\frac{1}{2}$ длиной $\Rightarrow$

пусть это ~~отрезок~~ b.



Функция (1) пересекает функцию (3) в точках x:

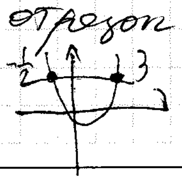
$2x^2-5x+1=4 \iff 2x^2-5x-3=0$

$D=25+2\cdot4\cdot3=$ ~~$25+12=37$~~ $=25+24=49$

$x_3=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{5+7}{4}=\frac{12}{4}=3$

$x_4=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{5-7}{4}=-\frac{1}{2}=-0{,}5$ т.е. $\mathcal{F}$ (1) отсекает от $\mathcal{F}$ (3) отрезок длиной

$x_3-x_4=3-(-0{,}5)=3{,}5=3\frac{1}{2}$



Пусть это отрезок c.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №1

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

? ?

функция (1) отсекает от Ф(4) отрезок длиной. Пусть отрезок a

$2x^2-5x+1=\cancel{a} \Leftrightarrow 2x^2-5x+1-a=0.$

$D=25-4\cdot2\cdot(1-a)=25-8+a=17+a$

$x_5=\frac{5-\sqrt{17+a}}{4}$

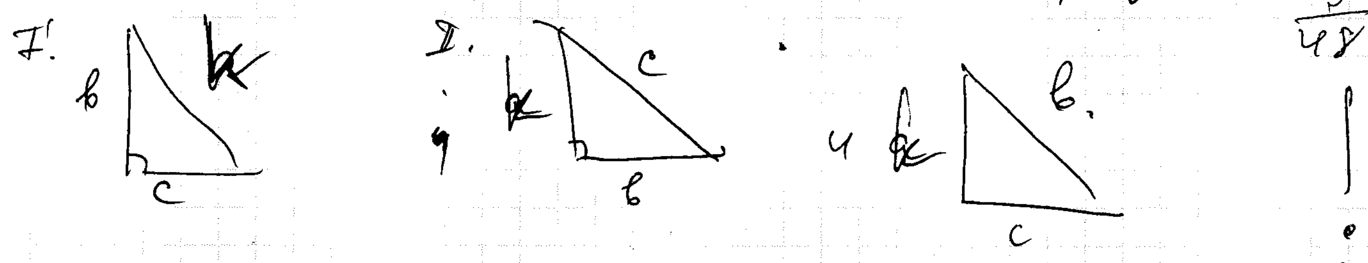
$x_6=\frac{5+\sqrt{17+a}}{4}$? ? ?

$b=1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$c=3\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

Рассмотрим 2 случая прямоуг. треуг.

$\begin{array}{r}16\\ \cdot3\\ \hline 48\end{array}$



Но т.к. отрезок $b<c$, то эй вариант невозможен.

I. По теореме Пифагора:

$a^2=b^2+c^2$

$a=\sqrt{b^2+c^2}=$

$=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{49}{4}}=\sqrt{\frac{58}{4}}=$

$=\frac{\sqrt{58}}{2}$;

II. $c^2=a^2+b^2$

$a^2=c^2-b^2$

$a=\sqrt{c^2-b^2}=$

$=a=\sqrt{\frac{49}{4}-\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{40}{4}}=\sqrt{10}.$

~~$2(17+a)=\frac{\sqrt{58}}{2}$~~

$2(17a+$

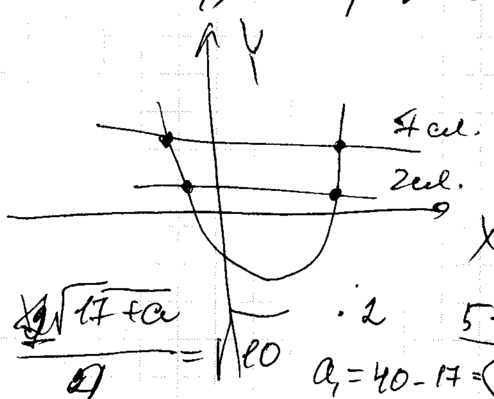
$2\sqrt{17+a}=\frac{\sqrt{58}}{2}$ т.к. обе + то

$\begin{array}{r}49\\ +9\\ \hline 58\end{array}$ $58 \mid 4$, 4, 18, 1

$58 \mid 2$, 29, 4, 18

~~Ответ: при $a=\sqrt{10}$ и $\frac{\sqrt{58}}{2}$~~

т.е. Ф(1) должна отсекать от Ф(2) отрезок длиной либо $\sqrt{10}$ см либо $\frac{\sqrt{58}}{2}$ см.



т.е. $x_{II_1}-x_{II_2}=\sqrt{10}$ $x_{I_1}-x_{I_2}=\frac{\sqrt{58}}{2}$

$\frac{5+\sqrt{17+a}}{4}-\frac{5-\sqrt{17+a}}{4}=\sqrt{10}$ обе части т.к. положит. то

$\frac{2\sqrt{17+a}}{2}=\sqrt{10}$ $\cdot2$ $\frac{5+\sqrt{17+a}-5+\sqrt{17+a}}{4}=\sqrt{40}$ $2\sqrt{17+a}=4\sqrt{10}$

$a_1=40-17=23$ 4

$17+a=\frac{160}{4}=40$ $4(17+a)=160.$

$\sqrt{17+a}=2\sqrt{10}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-007

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a \geq 0.$

$2\sqrt{17+a} = \frac{\sqrt{58}}{2}$; $4(17+a) = \frac{58}{4}$; $16(17+a) = 58$; $17+a = \frac{58}{16} = \frac{29}{8}$;

$272 + 16a = 58$

$16a = 58 - 272$

$16a = -214$

$a = -\frac{107}{8} \approx -14,47.$

$16 \cdot 17 = 112$; 162; -272, 58; $214 : 2 = 107$; $107 : 8 = 14,47$

$y_0(x_0) = 2 \cdot \frac{25}{16} - \frac{25}{4} + 1 = \frac{25}{8} - \frac{50}{8} + 1 = -\frac{25}{8} + 1 = \frac{8-25}{8} = -\frac{17}{8} = -3\frac{1}{8} + 1 = -3,125 + 1 = -2,125$

т.к. $a \geq -2,125$ то.

У нас 3 случая

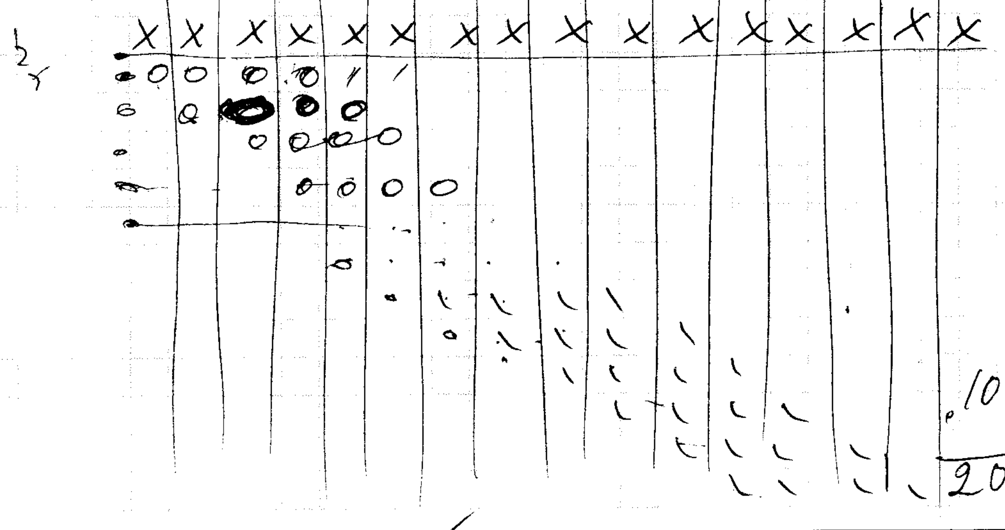
при $a = 23$

$\frac{5+\sqrt{17+23}}{4} - \frac{5-\sqrt{17+23}}{4} = \frac{2\sqrt{17+23}}{4} = \frac{\sqrt{17+23}}{2} = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{4}} = \sqrt{10}$!

$\frac{2\sqrt{17+a}}{4} = \frac{\sqrt{58}}{2}$

№2. $4\sqrt{17+a} = 4\sqrt{58}$; $\sqrt{17+a} = \sqrt{58}$; $17+a = 58$; $a = 58-17 = 41$

Нам дано 16-ти значное число состоящее из 3, 4, 9 к каждой раз 9 ровно четыре, они идут подряд обязательно есть 3 и 4



~~девятки~~ расположение девяток можно выбрать 12-ю способами.

$1036 \cdot 2 = 2072$

№2

тогда в любом случае ~~мы можем~~ у нас остается

$16-4=12$ мест для цифр, где бы не стояли 9.

1сл 11сл

× × × × × × × × × ×

| | | | | | | | | |

2сп 2с 2 2 2 2 2 2 2 2

~~то~~ но 3 мы можем выбрать 12ю способами

Есть случай когда мы можем выбрать 1ю 4-1сл.
1ю 3 - 11сл
остальные 2^{10}

1ю 4кл - 11ю

в общем 1ю оставшихся можно выбрать
$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2.$
т.е. ~~2.10~~ т.е. 2^{10}

Остальные 10 цифр мы можем заполнять любыми дан цифрами т.е. 2мя способами.

т.е. Всего цифр! ~~12~~ $2^{10}+2^{10}+.$
~~2.10.~~

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 11 \\ \hline 12 \\ 12\ \ \\ \hline 132 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 132 \\ \times\ 2 \\ \hline 264 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1024 \\ \times\ 264 \\ \hline 4096 \\ 6144\ \ \\ 2048\ \ \ \ \\ \hline 270336 \end{array}$$

$2^{10}\cdot12\cdot11+2^{10}\cdot12\cdot11 \cancel{+12} =$
$=2^{10}(12\cdot11+12\cdot11) \cancel{+12} =$
$=1024\cdot264 \cancel{+12} =$

$$\begin{array}{r} 1024 \\ \times\ 6 \\ \hline 6144 \end{array}$$

270.336.

Ответ: 270.336.

№4

$|ax-2a| \le \sqrt{x-1}$

$(ax-2a)^2 \le x-1,$

$a^2x^2-4a^2x+4a^2 \le x-1,$

$a^2(x-4x+1) \le x-1,$

$a^2 \le \frac{x-1}{x-4x+1}$

т.к. $|ax-2a| \ge 0$ и $\sqrt{x-1} \ge 0$
то

рассмотрим $f(a)=ax-2a$
и $g(x)=\sqrt{x-1}$

$ax-2a=0.\quad a(x-2)=0.$

либо $a=0$, либо $x=2$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

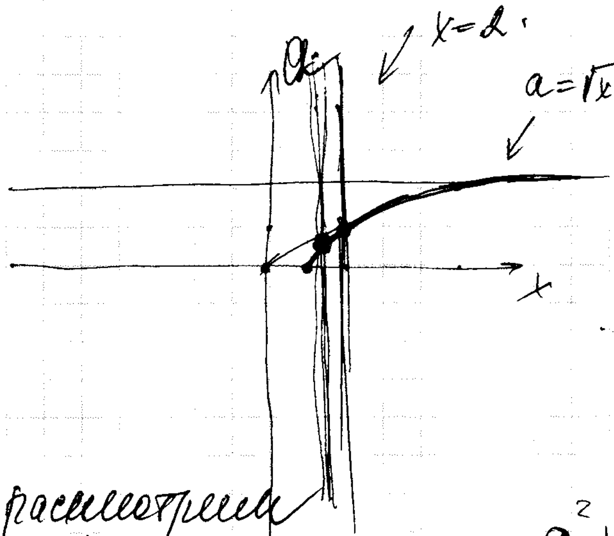
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-СС7

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Ур. отрезка ?

$$\frac{x-x_b}{x_b-x_c} = \frac{y-y_b}{y_c-y_c}$$

$$\sqrt{(x-x_0)(y-y_0)} = 3.$$

рассмотрим

$g(x) = ax - 2a$

$f(x) = \sqrt{x-1}$

$a^2x^2 - 4a^2x + 4a^2 \le x - 1,$

$a^2x^2 - 4a^2x + 4a^2 - x + 1 \le 0.$

$\cancel{a^2x^2 - (4+x)}$

$-4a^2x - x = x(-4a^2-1)$

$= -x(4a^2+1)$

$a(\cancel{x-2})$

достаточно быть ур-прямой

$a^2x^2 - x(4a^2+1) + (4a^2+1) \le 0.$

если мы подставим 0 $\quad t = 4a^2+1.$

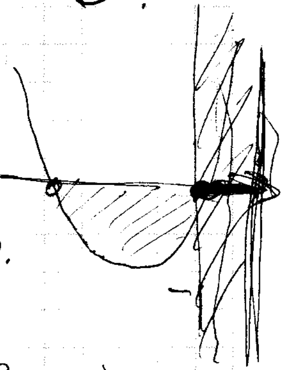
$a = x - 2$

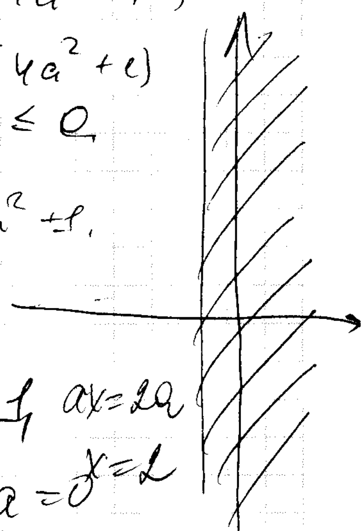
$0 \le \sqrt{x-1}$

$x \ne 1$

$x - 2 \le \sqrt{x-1} \quad (ax-2a)^2 \le x - 1 \quad ax = 2a$

$a^2x^2 - 4a^2x + 4a^2 \quad ax - 2a = 0 \quad x = 2$





№ 5.

Пусть x — кол-во рабочих ; y — время общее ~~работы~~ ~~которого~~ дней, z

кол-во раб	t	V, производ. $\frac{x}{12}$	дней, z
x	yx	1	28
$x+2$	$(y+1)(x+2)$	1	21
$x+4$	$(y+2)(x+4)$	1	15

☑ черновик ☐ чистовик Страница № 5

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

Производ = $t \cdot z$.

$28 : \cancel{7}$

$21 : \cancel{7}$

$$7 \cdot \begin{cases} yx \cdot 28 = U \ (1) \\ (y+1)(x+2) \cdot 21 = U \ (2) \\ (y+2)(x+4) \cdot 15 = U \ (3) \end{cases}$$

II

$(1) = (2)$:

$28yx = (yx + 2y + x + 2) \cdot 21$

$4yx = 3yx + 2y + x + 2$

$yx = 2y + x + 2 \quad | \cdot 2$

$2yx = 4y + 2x + 4$

$(2) = (3)$:

$\overset{5}{\cancel{15}}(yx + 4y + 2x + 8) = \overset{7}{\cancel{21}}(yx + 2y + x + 2)$

$5yx + 20y + 10x + 40 = 7yx + 14y + 7x + 14$

$2yx - 7y - 3x - 26 = 0$.

$$\begin{array}{r} {}^{3\,10}\\ -40 \\ 14 \\ \hline 26 \end{array}$$

$2yx = 7y + 3x + 26$

$7y + 3x + 26 = 4y + 2x + 4$

$3y + x + 22 = 0$.

$\overset{7}{\cancel{28}}yx = \overset{5}{\cancel{15}}(yx + 4y + 2x + 8)$

$7yx = 5yx + 20y + 10x + 40$

$\Leftrightarrow 7yx = 7yx + 14y + 7x + 14$

$14y + 7x + 14 = 0$.

$2y + x + 2 = 0$

$$\begin{cases} 3y + x + 22 = 0 & | \cdot 2 \\ 2y + x + 2 = 0 & | \cdot 3 \end{cases}$$

$3\cancel{y} - 2\cancel{y} + \cancel{x} - \cancel{x} + 22 - 2 = 0$.

$y + 20 = 0$

$y = -20$

т.к. $y = 20$.

$$\begin{cases} 6y + 2x + 44 = 0 \\ 6y + 3x + 6 = 0 \end{cases}$$

$2x - 3x + 44 - 6 = 0$.

$\cancel{3x}$

$-x +$

$$\begin{array}{r} {}^{3\,14}\\ -44 \\ 6 \\ \hline 38 \end{array}$$

38 рабочих

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

11-СС7

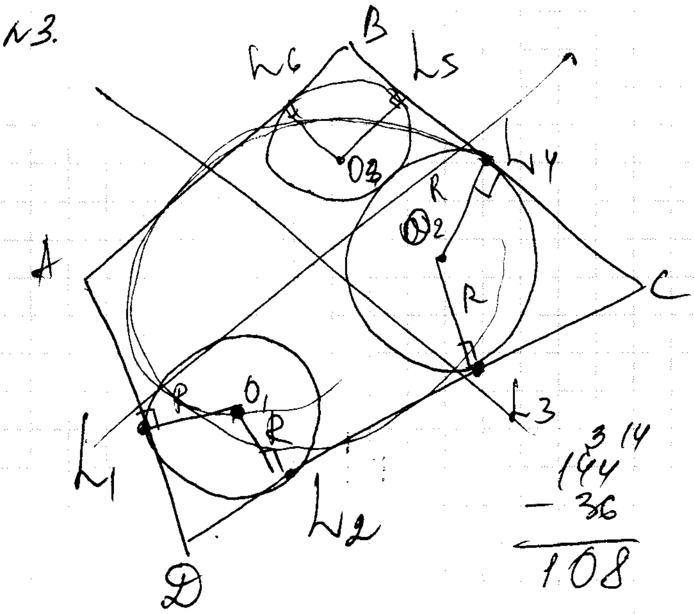
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

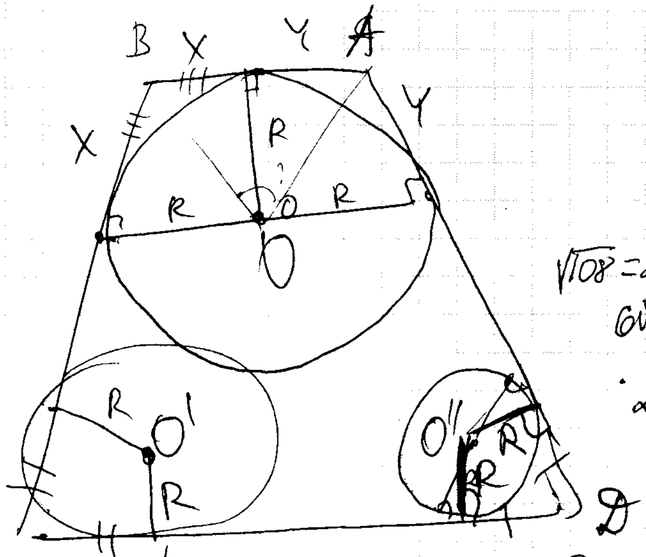
$R\omega_1 = R\omega_2 = R\omega_3 = R$



$\sqrt{108} = 2\cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

$2\cdot2\cdot9\cdot3$

$144 - 36 = 108$



$R = ?$

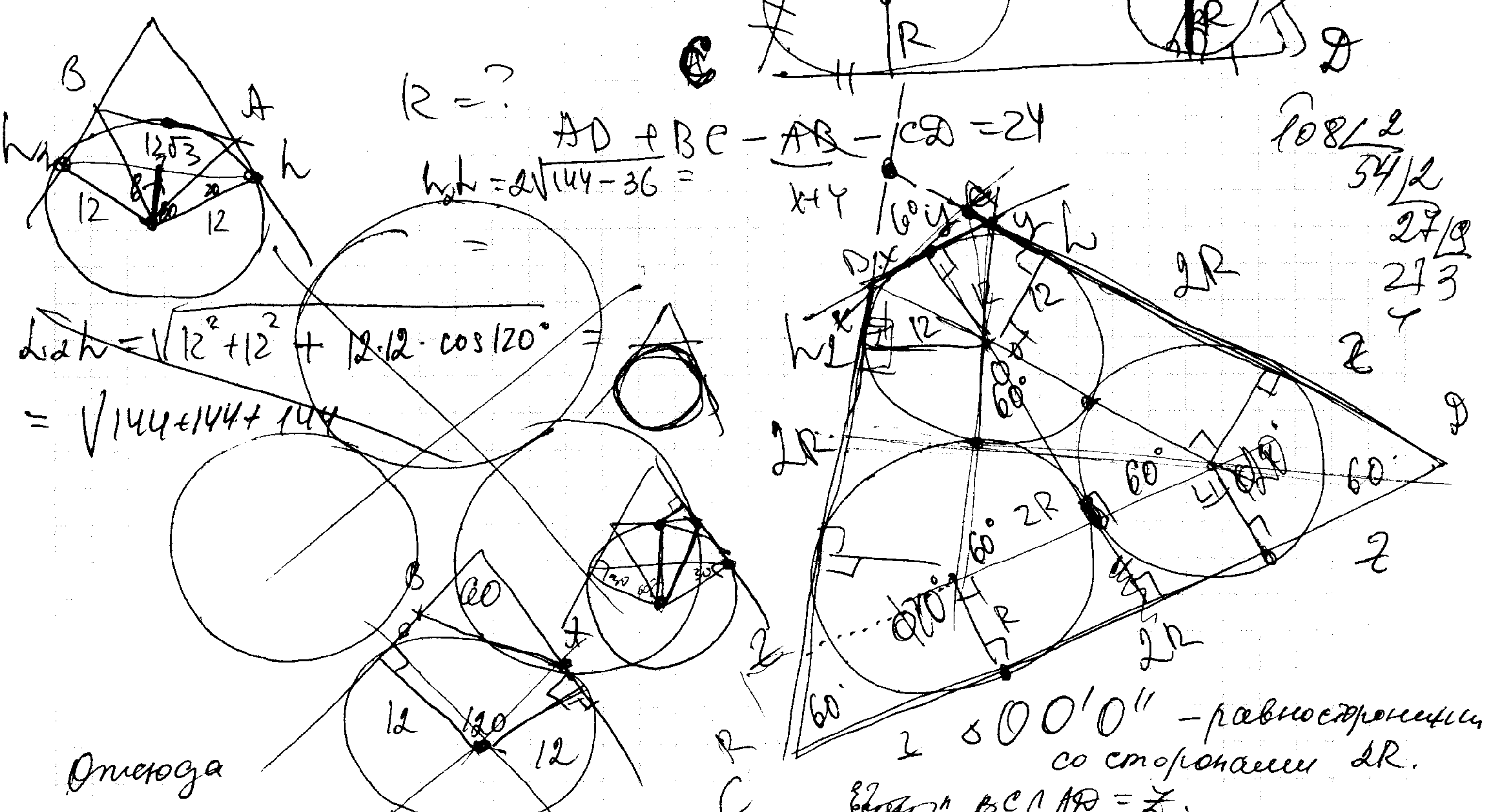
$\cancel{AD} + BC - \cancel{AB} - CD = 24$

$x + y$

$L_2L = 2\sqrt{144-36} =$

$L_2L = \sqrt{12^2 + 12^2 + 12\cdot12\cdot\cos 120^\circ} =$

$= \sqrt{144 + 144 + 144}$



108 | 2
54 | 2
27 | 3

$\triangle OO'O''$ – равносторонний со сторонами $2R$.

Отсюда

$\cancel{\angle L_1OD}$ ~~А~~ $\angle LOL_2 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Если $BC \cap AD = Z$.

Т.к. окружности одинакового радиуса, то $\triangle DCZ$ – равносторонний, т.е. $\triangle OO'O'' \sim \triangle DCZ$.

$AD = \cancel{y} + 2R + \cancel{z}$ $\quad AD = \cancel{y} + \cancel{x}$

$BC = \cancel{y} + 2R + \cancel{z}$ $\quad CD = 2R + \cancel{x} + \cancel{y}$

$\cancel{y} + 2R + \cancel{z} + \cancel{y} + 2R + \cancel{z} - \cancel{y} - \cancel{x} - 2R - \cancel{z} - \cancel{z}$

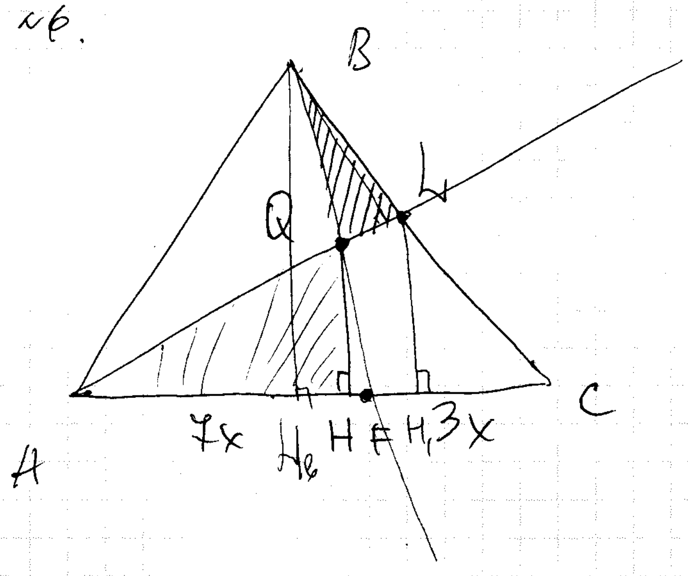
$2R + 2R - 2R = 24$

$2R = 24$; $R = 12$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №7

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№6.



$$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{7}{36}. \quad k = \frac{\sqrt{7}}{6}$$

$QH = 3.$

$LH_1 = ?$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{BH \cdot AC}{2} = \frac{10y \cdot BH}{2} =$$

$= BH \cdot 5x$

$\triangle AQH \sim \triangle ALC.$

$\Rightarrow$ $L\cancel{H} = k\, QH$, где

k – коэффициент подобия.

$$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{7}{36} \qquad 36y = BH \cdot 5x$$

$$y = \frac{BH \cdot 5x}{36}$$

$$S_{\triangle BQL} = \frac{35\, BH \cdot x}{36}.$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

[1; 30] [31; 60) [61; 90] [91; 120]

Пусть b - искомое число, ~~т.к. b.~~

~~По условию b : 30~~ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} b \vdots 10 \\ b \vdots 3 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} b \vdots 2 \\ b \vdots 3 \\ b \vdots 5 \end{cases}$

~~Значит сумма чисел искомого.~~

Первые 4 цифры

120 89 58 27

$31 \equiv 1 \pmod{30}$
$62 \equiv 2 \pmod{30}$
$103 \equiv 13 \pmod{30}$

I. $58 - 27 = 31 \vdots 30$ $89 - 27 = 62 \vdots 30$ $120 - 27 = 103 \vdots 30$

$89 | 30$, 2

II. $89 - 58 = 31 \vdots 30$ $120 - 58 = 62 \vdots 30$

~~$a_1 \vdots 2$, $a_1 \vdots 3$~~ $a_1 \vdots 5$

очевидно, $(a_1 - a_3) \vdots 30$ то и

$a_1 \vdots 30$ и $a_3 \vdots 30$.

$128 - 58 = 70$

то есть все выбранные $127 - 27 = 100$ но т.к. $(80-20) \vdots 30$ и $(50-20) \vdots 30$, то не делится на 3.

Наименьшее число

120, 119, 118, 117, 116, 115

89, 88, 87, 86, 85, 84

58, 57, 56, 55, 54, 55

53, 52, 51, 50, 49, 48

$119 - 89 = 30$ $128 - 88 = 40$ $88 - 58 = 30$

т.к. $(80 - 50) \vdots 30$ то

$\sum_{i=1}^{24} a_i =$

53, 23, $48 - 30 = 18$

числа ~~58~~ 5 нам не подходят числа

[58; 54]

29, 28, 27, 26, 25, 24

17, 16, 15, 14, 13, 12

$\sum_{1}^{\cancel{?}} \cancel{120}+1$

т.к. $(a_1 - a_2) \vdots 30$

$$\begin{array}{r} 8\cancel{7}2 \\ + \; 231 \\ \hline 3 \end{array}$$

то и $(a_1 + a_2) \vdots 30$.

$$\begin{array}{r} 42 \\ -18 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 631 \\ - \; 8 \\ \hline 623 \end{array}$$

$(a_1+a_2) \vdots 2$ $11-8=3$

Тогда $(a_1+a_2) \vdots 5$

$631-8=$
$=623 \vdots 30$

16 и 13

$\sum_{i=1}^{24} a_i \vdots 30$. $(a_1+a_2) \vdots 3$ $\cancel{16}$ $\cancel{13}$

$42-18=$
$=$

$8+11=19$

Максимальная сумма чисел. ~~30~~ $5+2=\cancel{7}$

$631+8=639$

$30+60+90+120 = 300$

90 180 300

$300+(300-4)+(300-4\cdot 2)+(300-4\cdot 3)=$

$$\begin{array}{r} 1200 \\ - \; 24 \\ \hline 1186 \end{array}$$

$=300\cdot 4 - 4\cdot(1+2+3) =$

$= \cancel{1200-24=1176}$. $1176 \vdots 3$

$300+296+292+288$ $1175 \vdots 5$

$1174 \vdots 2$

$$\begin{array}{r} 300 \\ 296 \\ + \; 292 \\ 288 \\ \hline 1176 \end{array}$$

$9+9+8+1=10+17=27$

$6+2+3=8+3=11$

$1173 \vdots 3$

$1172 \vdots 2$

1171 – искомое число

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 Парабола $y=2x^2-5x+1$ пересекает прямую $y=-1$, значит:

$2x^2-5x+1=-1 \iff 2x^2-5x+2=0$; $D=25-4\cdot2\cdot2=25-16=9=3^2$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{5+3}{4}=\frac{8}{4}=2$; $x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{5-3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, где

x_1 и x_2 – точки пересечения $y=2x^2-5x+1$ и $y=-1$.

Парабола $y=2x^2-5x+1$ пересекает прямую $y=4$, значит:

$2x^2-5x+1=4 \iff 2x^2-5x-3=0$; $D=25+24=49=7^2$

$x_3=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{5+7}{4}=3$

$x_4=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{5-7}{4}=-\frac{1}{2}$.

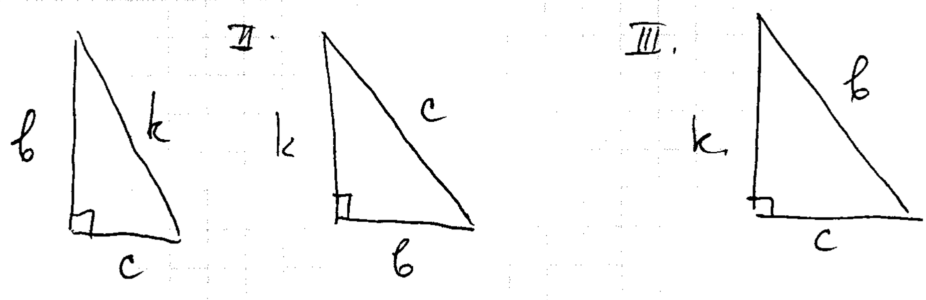
Парабола $y=2x^2-5x+1$ отсекает отрезок прямой $y=4$ длиной $|x_1-x_2|=3-\left(-\frac{1}{2}\right)=3\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$, а от прямой $y=-1$ отсекает отрезок длиной $|x_1-x_2|=2-\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

Очевидно, чтобы отсечь от прямой $y=a$ параболой $y=2x^2-5x+1$, a должно быть больше или равно $y_в$: $x_{в\ параболы}=\frac{-b}{2a}=\frac{5}{4}$; $y_в=y(x_в)=2\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2-\frac{5\cdot5}{4}+1=$

$=\frac{25}{8}-\frac{50}{8}+1=-\frac{25}{8}+1=-\frac{17}{8}$

Пусть отрезок отсечённый от $y=4$ – c; от $y=-1$ – b; от $y=a$ – k, тогда существует 3 различных варианта прямоугольного треугольника:

I. II. III.



Однако III вариант не возможен, т.к. $b < c$.

Значит, т.к. $y = 2x^2 - 5x + 1$ пересекает $y = a$, то

$2x^2 - 5x + 1 = a \iff 2x^2 - 5x + 1 - a = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 2(1-a) = 25 - 8 + a = 17 + a$

$x_5 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{5+\sqrt{17+a}}{4}$

$x_6 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{5-\sqrt{17+a}}{4}$.

Отсюда, длина отсекаемого отрезка равна:

$|x_5 - x_6| = \frac{5+\sqrt{17+a}}{4} - \frac{5-\sqrt{17+a}}{4} = \frac{2\sqrt{17+a}}{4} = \frac{\sqrt{17+a}}{2}$.

По теореме Пифагора в I случае:

$k = \sqrt{b^2+c^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{58}{4}}$;

во II случае:

$k = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{9}{4}} = \sqrt{10}$

Значит:

Для II-го случая: $\frac{\sqrt{17+a}}{2} = \sqrt{10}$, т.к. обе части положительны, то $17 + a = 40 \iff a = 23$, что удовлетворяет условию $a \geq -\frac{17}{8}$.

Для I-го случая: $\frac{\sqrt{17+a}}{2} = \sqrt{\frac{58}{4}} \iff \begin{cases} \frac{17+a}{4} = \frac{58}{4} \\ \sqrt{17+a} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \neq 17 \\ 17 + a = 58 \end{cases} \iff$

$\iff a = 41$, что удовлетворяет условию $a \geq -\frac{17}{8}$.

Ответ: 23; 41.

№2.

Нам дано 16значное число. Пусть это число — a. Известно, что в этом числе подряд идут четыре 9, так же оно обязательно имеет 3; 4. Состоит число из цифр: 3; 4; 9.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Мы можем выбрать положение 4х девяток $16-4=12$ способами.

Отсюда, у нас остается всего 12 цифр числа. Есть 2 случая:

I. x x x x x x x x x x x x

Первую цифру 3 можно выбрать 12 способами, а первую цифру 4 можно выбрать уже 11 способами.

II. x x x x x x x x x x

Первую цифру 4 можно выбрать 12 способами, а первую цифру 3 можно выбрать уже 11 способами.

В обоих случаях остальные 10 цифр можно заполнить 2мя способами, причем способы могут повторяться, значит остальные 10 цифр заполняются 2^{10} кол-вом способов.

Отсюда, искомое количество таких чисел:

$\cancel{12+2^{10}+12\cdot 11}$ $(2^{10}\cdot 1\cdot 1+12)\cdot 2=(1024+12)\cdot 2=1036\cdot 2=2072$

$=$

Ответ: 2072.

№ 7.

Пусть ~~Никонов~~ выбрал $a_1, a_2, a_3 \ldots a_{24}$ различные целых чисел. т.к. $(a_1-a_3)\,\vdots\,30$, $(a_2-a_{24})\,\vdots\,30$, т.е. разность двух любых выбранных чисел не делится на 30, то $\sum_{k=1}^{24} a_k \overline{\vdots}\, 30 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{24} a_k \overline{\vdots}\, 5 \\ \sum_{k=1}^{24} a_k \vdots 3 \\ \sum_{k=1}^{24} a_k \overline{\vdots}\, 2 \end{cases}$$

Максимальная сумма выбранных чисел:

$300 + 300-4 + 300-4\cdot2 + 300-4\cdot3 = 1176.$

$1176 \vdots 2$, значит не подходит

$1175 \vdots 5$, не подходит

$1174 \vdots 2$, не подходит

$1173 \vdots 3$, не подходит

$1172 \vdots 2$, не подходит

$1171 \overline{\vdots}\, 2$; $1171 \overline{\vdots}\, 3$; $1171 \overline{\vdots}\, 5$ — искомое число.

Ответ: 1171.

№5. U - производительность

Пусть количество рабочих — x, количество работаемых часов в день — y, тогда:

	кол-во рабочих	кол-во общих часов в день	кол-во дней	производительность
I	x	yx	28	$28xy = U$
II	$x+2$	$(y+1)(x+2)$	21	$21(y+1)(x+2) = U$
III	$x+4$	$(y+2)(x+4)$	15	$15(y+2)(x+4) = U$

Составим и решим уравнение, учитывая, что $x \geq 0$; $y \geq 0$; $U \geq 0$.

$$\begin{cases} 28yx = U \quad (1) \\ 21(y+1)(x+2) = U \quad (2) \\ (y+2)(y+4)\cdot 15 = U \quad (3) \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(1)=(2): \quad 28yx = 21(yx+2y+x+2) \Leftrightarrow 4xy = 3yx+2y+x+2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad yx = 2y+x+2.$

$(2)=(3): \quad 15(yx+4y+2x+8) = 21(yx+2y+x+2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5yx+20y+10x+40 = 7yx+14y+7x+14 \Leftrightarrow 2yx-7y-3x-26=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2xy = 7y+3x+26$

из $(1)=(2)\cdot 2$ увидим, что $2xy = 4y+2x+4$, тогда
$4y+2x+4 = 7y+3x+26 \Leftrightarrow 3y+x+22=0.$

$(1)=(3): \quad 28yx = 15(yx+4y+2x+8) \Leftrightarrow$ ~~$7xy = 7yx+14y+7x+14$~~.
$\Leftrightarrow 7xy = 5yx+20y+10x+40.$

из $(2)=(3)$ увидим, что $7xy = 7yx+14y+7x+14 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 14y+7x+14=0 \Leftrightarrow 2y+x+2=0.$

Исходная система уравнений равносильна:

$$\begin{cases} 3y+x+22=0 \\ 2y+x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y+2x+44=0 \\ 6y+3x+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y+3x+6=0 \\ 2x-3x+44-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6y+3x+6=0 \\ -x+38=0 \end{cases}$$

. Отсюда $x=38$, а это искомое количество рабочих.

Ответ: 38.

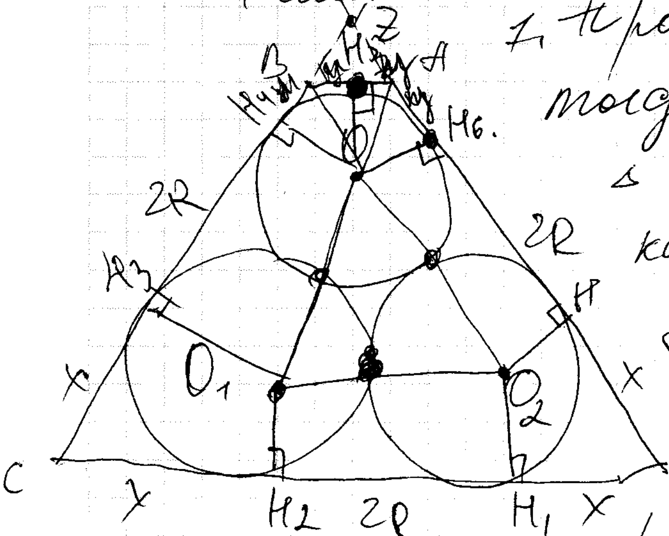
№ 3.

а). Дано: четырехугольник ABCD, вне его расположено 3 окружности одинакового радиуса: ω_1; ω_2; ω_3; ω_1 касается AD и DC, ω_2 касается

DC и CB; ω_3 — CB, BA, AD; AD + BC − AB − CD = 24.

а) Найти: R.

Решение:



1. Продлим стороны CB и AD, тогда $CB \cap AD = Z$.

$\triangle OO_1O_2$ — равносторонний, т.к. каждая сторона равна 2R. Т.к. окружности с одинаковыми радиусами, то $\triangle OO_1O_2 \sim \triangle CZD$, т.е. $\triangle CZD$ — равносторонний.

2. $H_4H_3 = 2R = H_2H_1 = HH_6$, т.к. $H_4OO_1H_3$, H_6OO_2H и $H_2H_1O_2O_1$ — прямоугольники.

3. Пусть $CH_3 = x = CH_2$ (т.к. отрезки касательных равны); тогда $DH_1 = DH = x$ ($\triangle CDZ$ — равносторонний), $H_4B = H_5B = y$; $H_5A = HH_6 = m$.

~~Отсюда $AD = m + 2R + x$; $BC = 2R + m + x$; $AB = y + m$; $CD = 2R + x + x$. Тогда: $AD + BC - AB - CD = m + 2R + x + 2R + m + x - y - m - 2R - x - x$~~

Отсюда $AD = y + x + 2R$; $BC = m + 2R + x$; $CD = 2x + 2R$; $BA = m + y$, тогда:

$AD + BC - AB - CD = y + x + 2R + m + 2R + x - 2x + 2R -$
$- m - y = 2R = 24 \iff R = 12$

Ответ: 12.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

14-007

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)