МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 4 ШИФР 8-001

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 3x^2 - 4x + 2$ пересекает прямые $y = 17$, $y = 1$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?

2. Найдите количество 20-значных чисел, содержащих только цифры "1", "5" и "6" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно десять, и они идут подряд.

3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 38$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - a| \leqslant \sqrt{x-2}$ является отрезок длины 1?

5. Несколько рабочих выполняют работу за 21 день. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 15 дней. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 10 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 7$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $8 : 21$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 13.

7. Пиноккио выбрал по 7 целых чисел из каждого промежутка $[1; 50]$, $[51; 100]$, $[101; 150]$, $[151; 200]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 50. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати восьми выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

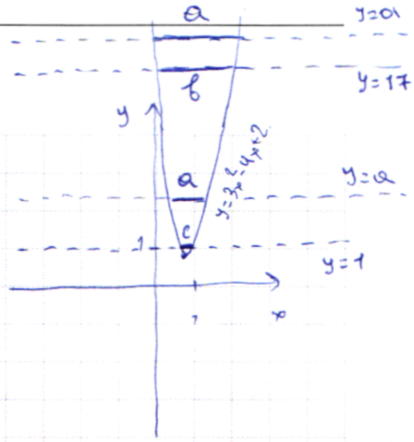
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

8-001

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



(1) $y=3x^2-4x+2.$

$\begin{cases} y=17 \\ y=1 \\ y=a \end{cases}$

Найдем вершину параболы:

$x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$

$y_0=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\cdot\frac{2}{3}+2=\frac{2}{3}.$

Если можно составить п/у Δ, значит

$a^2+c^2=b^2$ или $c^2+b^2=a^2$

c не может быть гипотенузой, т.к. $c<b$ по условию.

Рассмотрим отрезок c: при $y=1$, $x=1$ или $\frac{1}{3}$, значит длина отрезка $c=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

Рассмотрим отрезок b: при $y=17$, $x=3$ или $-1\frac{2}{3}$, значит длина отрезка $b=3+1\frac{2}{3}=4\frac{2}{3}$

$17=3x^2-4x+2.$

$D=4+45=49.$

$x=\left[\begin{array}{l} 3 \\ -1\frac{2}{3}. \end{array}\right.$

Найдем длину отрезка a:

$a^2+\frac{4}{9}=\frac{196}{9}$

$a^2=\frac{192}{9}$

$a=\left[\begin{array}{l} \frac{\sqrt{192}}{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{192}}{3} \text{ — не м.б., т.к. длина } a>0 \end{array}\right.$

или

$a^2=\frac{4}{9}+\frac{196}{9}$

$a=\left[\begin{array}{l} \frac{10\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{10\sqrt{2}}{3} \text{ — не м.б. аналогично} \end{array}\right.$

$y=3x^2-4x+2.$

$\frac{y}{3}=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}.$

$-(x_1+x_2)=-\frac{4}{3} \Rightarrow + \begin{cases} x_1+x_2=\frac{4}{3}. \\ x_1-x_2=a. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x_1=\frac{4+8\sqrt{3}}{3} \\ 2x_1=\frac{4+10\sqrt{2}}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\frac{4+8\sqrt{3}}{6} \\ x_1=\frac{4+10\sqrt{2}}{6}. \end{array}\right.$

Находим а:

$\frac{y}{3}=\left(\frac{4+8\sqrt{3}}{6}\right)^2+4\,\frac{(4+8\sqrt{3})}{3\cdot 6}+\frac{2}{3}$ или $\frac{y}{3}=\left(\frac{4+10\sqrt{2}}{6}\right)^2+\frac{4\,(4+10\sqrt{2})}{18}+\frac{2}{3}$

$y=22+\frac{32\sqrt{3}}{3}=a.$ $y=\frac{68+40\sqrt{2}}{3}=a.$

Ответ: $a=\left[\begin{array}{l}22+\frac{32\sqrt{3}}{3}\\ \frac{68+40\sqrt{2}}{3}\end{array}\right.$

(2) Т.к. всего в числе 20 цифр, а "5" всего 10, значит всего есть 10 вариантов расположения группы "5"-к.

Цифры 1 и 6 будут встречаться C_2^{10} раз, т.е 180 раз $\left(\frac{2!\,10!}{(10-2)!}\right)$

Итого чисел будет $180\cdot 10=1800$

Ответ: 1800 чисел.

(4) $|ax-a|\le\sqrt{x-2}.$ | ОДЗ $x\ge 2.$

$a(x-1)\le\sqrt{x-2}.$ или $a(1-x)\le\sqrt{x-2}.$

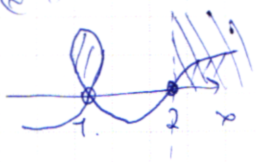
$\cancel{a^2\le\frac{x-2}{(x-1)^2}}$

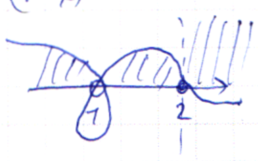
$a\le\frac{\sqrt{x-2}}{x-1}$ | ОДЗ $x\ne 1$ $a\le\frac{\sqrt{x-2}}{1-x}.$ | ОДЗ $x\ne 1.$

Пусть $a=0.$

$\frac{\sqrt{x-2}}{x-1}\ge 0$ или $\frac{\sqrt{x-2}}{1-x}\ge 0$

$\frac{x-2}{(x-1)^2}\ge 0$ $\frac{x-2}{(1-x)^2}\ge 0.$





$x\in[2;+\infty)$ $x=2.$

$x\in[2;+\infty).$ ~~совпадает с ОДЗ => a=0.~~

~~Отрезок, равный 1 нб. на любом месте~~ .

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

8-001
ШИФР
(заполняется секретарём)

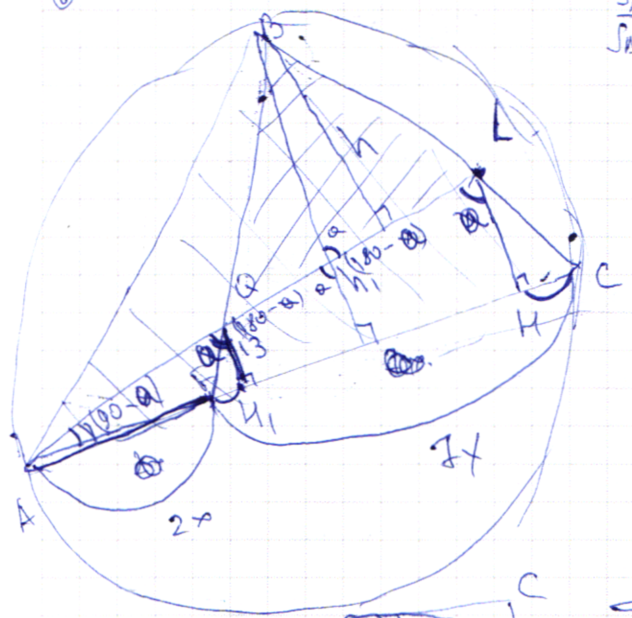
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(7) Чтобы сумма была наибольшей нам нужно брать наибольшие числа из предложенных. Из последнего промежутка тогда мы берем 7 чисел ~~[200;~~ [194; 200], т.к они максимальные из предложенных. Из промежутка [101; 150] нам тогда нужно взять первое число такое, чтобы оно в разности с 194 не давало 50, т.е было на 50 меньше 193. Таким числом является 143. Затем берем 7 чисел, меньшее 143-х на 1, т.е [137; 142]. Аналогично поступаем с промежутками [1; 50] и [51; 100]. В итоге вся сумма составит 3290

Ответ: наибольшее значение суммы = 3290

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6



$$\frac{S_{\triangle BQL}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{8}{21}$$

Расстояние = $\perp$

$\triangle AQH_1 \sim \triangle ALH$ ($\angle LAH$ общ.) $\Rightarrow \angle AQH_1 = \angle ACH$.

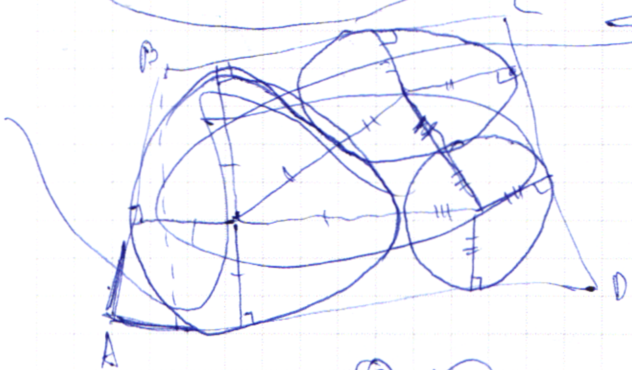
$$S_\triangle = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin\alpha = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\frac{\frac{1}{2}QL\cdot h}{\frac{1}{2}AC\cdot h_1} = \frac{8}{21}$$

$$\frac{QL\cdot h}{AC\cdot h_1} = \frac{8}{21}$$

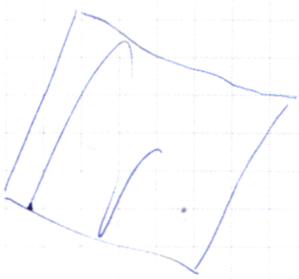
~~AD+BC=AB-CD=38~~

$$\frac{AQ}{AL} = \frac{13}{LH}$$



7 Из каждого промежутка C_7^{50} вариантов числа = $\frac{7!\cdot 50!}{43!}$

$$\frac{\frac{1}{2}h_1\cdot AC}{\frac{1}{2}h_1\cdot AC} = \frac{7}{9}$$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

① $\frac{y}{3} = \left(\frac{4+8\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \frac{4(4+8\sqrt{3})}{3\cdot 6} + \frac{2}{3}$

$\frac{y}{3} = \frac{16+192+64\sqrt{3}}{36} + \frac{16+32\sqrt{3}}{18} + \frac{2}{3}$

$\frac{y}{3} = \frac{208+64\sqrt{3}+32+64\sqrt{3}+24}{36}$

$\frac{y}{3} = \frac{264+128\sqrt{3}}{12}$

$y = 22 + \frac{32\sqrt{3}}{3}$

$\frac{y}{3} = \left(\frac{4+10\sqrt{2}}{6}\right)^2 + \frac{24(4+10\sqrt{2})}{2\cdot 18} + \frac{2}{3}$

$\frac{y}{3} = \frac{16+200+80\sqrt{2}+32+80\sqrt{2}+24}{36}$

$y = \frac{248+240\ 160\sqrt{2}}{12}$

$y = \frac{272+160\sqrt{2}}{12}$

$y = \frac{68+40\sqrt{2}}{3}$

Ответ: $a = 22 + \frac{32\sqrt{3}}{3}$ или $\frac{68+40\sqrt{2}}{3}$

④ $|ax - a| \le \sqrt{x-2}$

ОДЗ: $x \ge 2$

$ax - a \le \sqrt{x-2}$ или $a - ax \le \sqrt{x-2}$

$a \le \frac{\sqrt{x-2}}{x-1}$ или $a \le \frac{\sqrt{x-2}}{1-x}$

$\sqrt{x-2} \ge 0$

ОДЗ: $x \ne 1$

Длина отрезка $= 1 \Rightarrow x_1 - x_2 = 1$

$a = 0$

$\frac{\sqrt{x-2}}{x-1} \ge 0$

$\frac{x-2}{(x-1)^2} \ge 0$

$x \in [2; +\infty)$

$\frac{\sqrt{x-2}}{1-x} \ge 0$

$\frac{x-2}{(1-x)^2} \ge 0$

$x = 2$

$x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup [2; +\infty)$

$x \in [2; +\infty)$ совп-т с ОДЗ $\Rightarrow a = 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

8-001

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(5) кво.	v	t	A.
x	$\frac{1}{21}x$	21 д.	1
$(x+2)$	$\frac{1}{15}$ $\frac{1}{21}(x+2)$ 7 г/д.	15 д.	1
$(x+6)$	$\frac{1}{10}$ $\frac{1}{21}(x+6)$ 2 г/д.	10 д	1.

$$\begin{cases} \frac{1}{21}(x+2)+1=\frac{1}{15} \\ \frac{1}{21}(x+6)+2=\frac{1}{10} \end{cases}$$

$\frac{x}{21}+\frac{2}{21}+1-\frac{1}{15}=0.$

$\frac{(x+2+21)}{21}-\frac{1}{15}=0.$

$\frac{5x+115}{105}-\frac{7}{105}=0.$

$\frac{5x+108}{105}=0.$

$\frac{23}{115}$

(2)

$\underbrace{x\ 5\ 5\ 5\ ...\ 5\ 5\ x\ x\ x}_{10}$ 20. 10

всего 10 вариантов расположения группы 5-к.

цифры 1 и 6 ~~могут~~ будут встречаться $C_2^{10}=\frac{2!\cdot 10!\cdot 10\cdot 9}{8!}=180$ раз.

Итого ~~вариантов~~ ~~расположения~~ чисел будет $180\cdot 10=1800$.

(1)

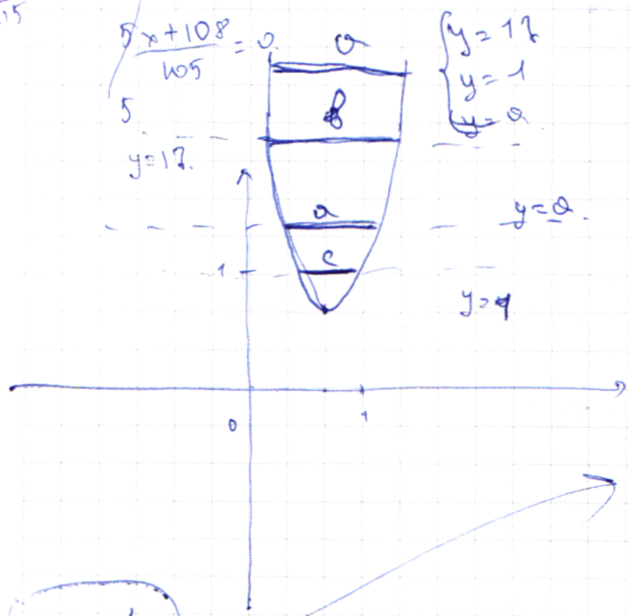
$y=3x^2-4x+2.$ $x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$y_0=3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-4\cdot\frac{2}{3}+2=$

$=\frac{3\cdot 4}{93}-\frac{4\cdot 2}{3}+2=$

$=\frac{4-8}{3}+2=-\frac{4}{3}+\frac{2}{1}=\frac{6-4}{3}=\frac{2}{3}.$

$$\begin{cases} y=17 \\ y=1 \\ y=a \end{cases}$$



Если можно составить п/у $\triangle$, значит

$a^2+c^2=b^2$ или $c^2+b^2=a^2$

c не м/б гипотенузой, т.к. она $<b$.

Рассмотри отрезок c: при $y=1$, $x=1$ или $\frac{1}{3}$,

значит длина $c=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

x	1	$\frac{1}{3}$
y	1	1

Р-м отр. b.: при $y=17$, $x=3$ или $-1\frac{2}{3}$.

Значит длина $b=3+1\frac{2}{3}=4\frac{2}{3}$.

$17=3x^2-4x+2.$

$3x^2-4x-15=0.$

$D=4+45=49.$

$x_{1,2}=\frac{2\pm 7}{3}=\left[\begin{array}{l} 3 \\ -1\frac{2}{3}=-\frac{5}{3} \end{array}\right.$

$9-5$

Находим длину a: $a^2+\frac{4}{9}=\frac{196}{9}$

$a^2=\frac{196-4}{9}=\frac{192}{9}$

$a=\left[\begin{array}{l}\frac{\sqrt{192}}{3}=\frac{\sqrt{192}}{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{\ }}{3} - \text{нем.}, \text{т.к. длина} >0.\end{array}\right.$

192	2
96	2
48	2
24	2
12	2
6	2
	3

$\frac{14}{3}$

$x^2+\left(\frac{4}{3}\right)x\left(-5\right)=0.$ x_1+x_2 $-(x_1+x_2)$

$3-4+2.$ 1

$\frac{3}{9}-\frac{4}{3}+2.$

$\frac{1}{3}-\frac{4}{3}+2.$ $-\frac{3}{3}+2=1.$

$\frac{14}{14}$ 2^6 $\times 64$ 3 192

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

или $c^2+b^2=a^2$

$\frac{4}{9}+\frac{196}{9}=a^2$.

$a^2=\frac{200}{9}$.

$a=\left[\begin{array}{l}\frac{\sqrt{200}}{3}=\frac{10\sqrt{2}}{3}\\ -\frac{\sqrt{200}}{3} \text{ -имо.}\end{array}\right.$

$14 \cdot 14 = 56$ ... 196.

$a=x_1-x_2$.

$y=3x^2-4x+2$.

$\frac{y}{3}=x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$

$x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}-\frac{y}{3}=0$.

$-(x_1+x_2)$ x_1x_2.

$+\begin{cases}x_1+x_2=\frac{4}{3}.\\ x_1-x_2=\frac{8\sqrt{3}}{3}\end{cases}$ или $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ $+\begin{cases}x_1+x_2=\frac{4}{3}\\ x_1-x_2=\frac{10\sqrt{2}}{3}\end{cases}$

$2x_1=\frac{4+8\sqrt{3}}{3}$ $2x_1=\frac{4+10\sqrt{2}}{3}$

$x_1=\frac{4+8\sqrt{3}}{6}$ $x_1=\frac{4+10\sqrt{2}}{6}$.

$x_2=\frac{8-4-8\sqrt{3}}{6}=\frac{4-8\sqrt{3}}{6}$. $x_2=\frac{4-10\sqrt{3}}{6}$.

$y=3x^2+4x+2$.

$y=\frac{3(4-8\sqrt{3})^2}{36}+4\left(\frac{4-8\sqrt{3}}{6}\right)+2$.

$y=\frac{3\cdot(16+192-64\sqrt{3})}{36}+\frac{16-32\sqrt{3}}{6}+2$.

$\frac{208-192\sqrt{3}+96-192\sqrt{3}}{36}+2$.

$y=\frac{216}{36}-\frac{192\cdot 2\sqrt{3}}{36}+2$.

$y=8-\frac{32\sqrt{3}}{3}$.

$y=\frac{3(4-10\sqrt{3})^2}{36}+4\left(\frac{4-10\sqrt{3}}{6}\right)+2$.

$y=\frac{3(16+300-80\sqrt{3})}{36}+\frac{16-40\sqrt{3}}{6}+2$.

$y=\frac{948-80\sqrt{3}+96-240\sqrt{3}}{36}+2$.

$y=$

$32\cdot 2=64$; $16\cdot 3=48$; $64\cdot 3=192$; $192+16=208$; $208+96=304$; $16\cdot 6=96$; $32\cdot 6=192$; $36\cdot 6=216$; $316\cdot 3=948$; $16\cdot 6=96$

черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

8-001

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y \le \frac{\sqrt{x-2}}{x-1}$

$y \ge \frac{\sqrt{x-2}}{4-x}$

$-\frac{4}{17}$

x	2	6	11	18
y	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{17}$

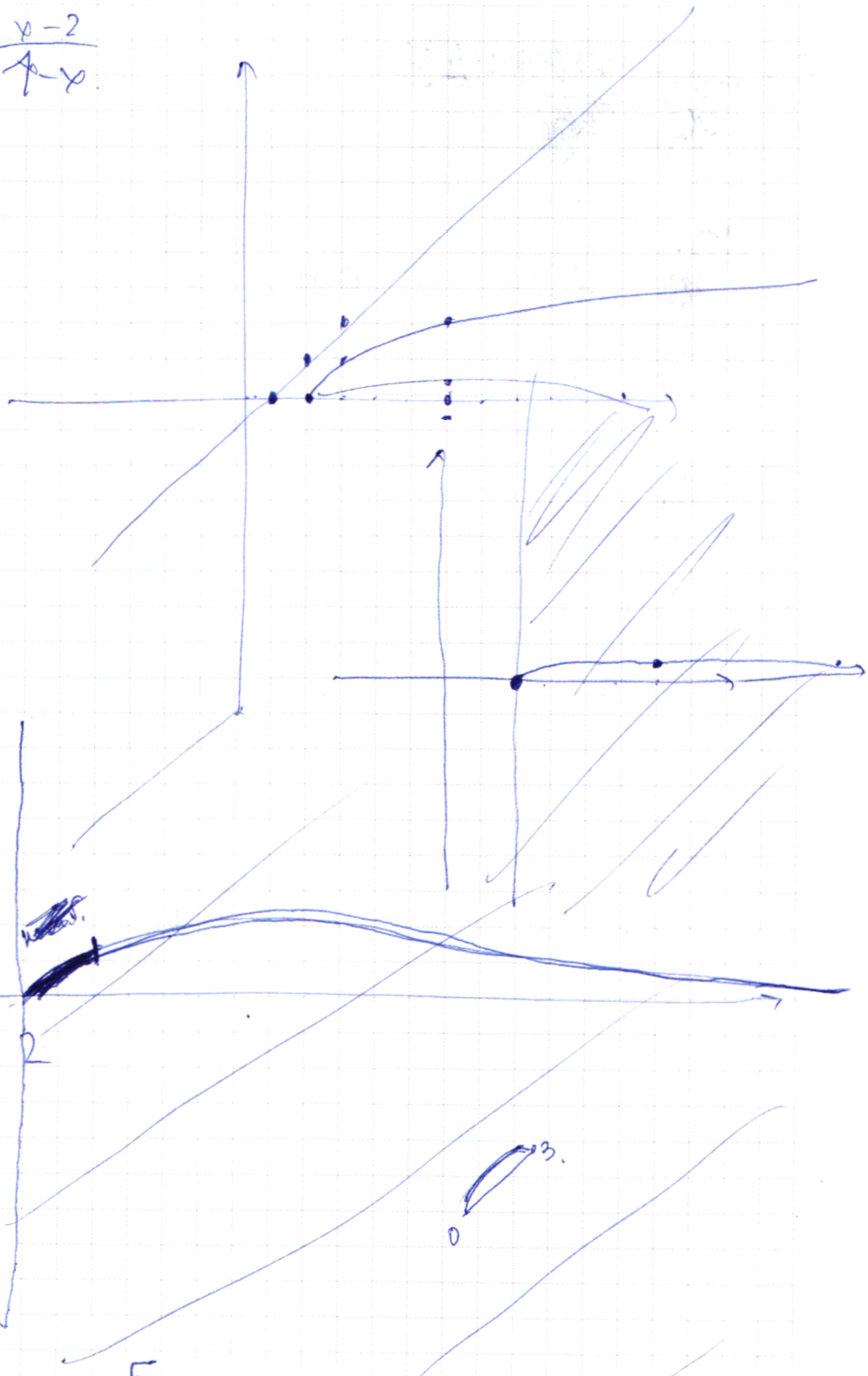
$\frac{\sqrt{6-2}}{6-1} = \frac{\sqrt{4}}{5} = \frac{2}{5}$

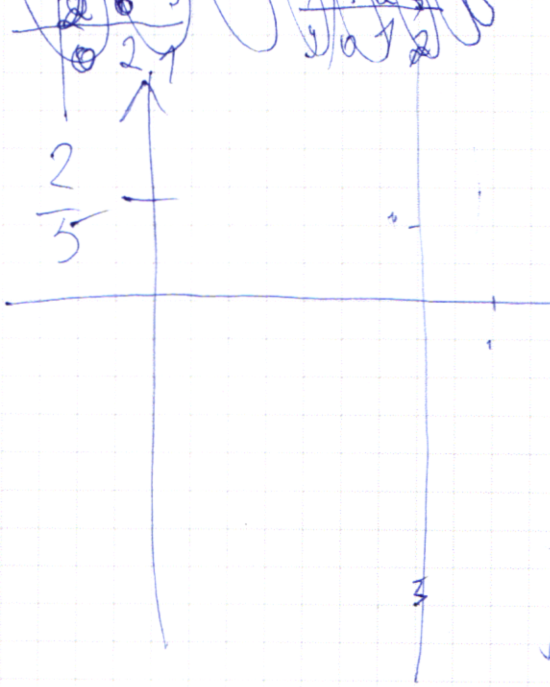
$y = \sqrt{x-2}$

x	2	6	3
y	0	2	1

$y = x-1$

x	1	2	3
y	0	1	2





$[3; \infty)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$|ax-a| \le \sqrt{x-2}$

$ax-a \le \sqrt{x-2}$

$a(x-1) \le \sqrt{x-2}$

$a \le \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-1}$

$a-ax \le \sqrt{x-2}$

$a(1-x) \le \sqrt{x-2}$

$a \le \dfrac{\sqrt{x-2}}{1-x}$

7

$52 \cdot 4 = 208$, $208 + 26 = 234$

50, 30, 29, 28, 27, 26, 25, 24, 23 — 234

$166 \cdot 4 = 664$, $664 + 82 = 727$

100, 88, 86, 85, 84, 83, 82, 81, 80 — 727

$280 \cdot 3 = 810$, $810 + 140 = 950$

$79 - 50 = 29$

$136 - 50 = 86$

150, 143, 142, 141, 140, 139, 138, 137 — 950

$149 + 50 = 199$

$193 - 50 = 143$

$394 \cdot 3 = 1182$, $1182 + 197 = 1379$

200, 199, 198, 197, 196, 195, 194 — 1379

212

$1379 + 950 + 727 + 234 = 3290$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)