

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 3

ШИФР

9-8

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2 - 5x + 1$ пересекает прямые $y = -1$, $y = 4$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Найдите количество 16-значных чисел, содержащих только цифры “3”, “4” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “9” ровно четыре, и они идут подряд.
3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 24$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 2a| \leq \sqrt{x - 1}$ является отрезок длины 3?
5. Несколько рабочих выполняют работу за 28 дней. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 21 день. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 15 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 7 : 3$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $7 : 36$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 3.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 30]$, $[31; 60]$, $[61; 90]$, $[91; 120]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 30. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y = 2x^2 - 5x + 1$, пересек $y = -1, y = 4, y = 0$
прямые

1) $y = -1$

$$-1 = 2x^2 - 5x + 1$$

$$0 = 2x^2 - 5x + 2$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 =$$

$$= 25 - 16 = 9 = 3^2$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{1}{2} = 0,5 \end{cases}$$

2) $y = 4$

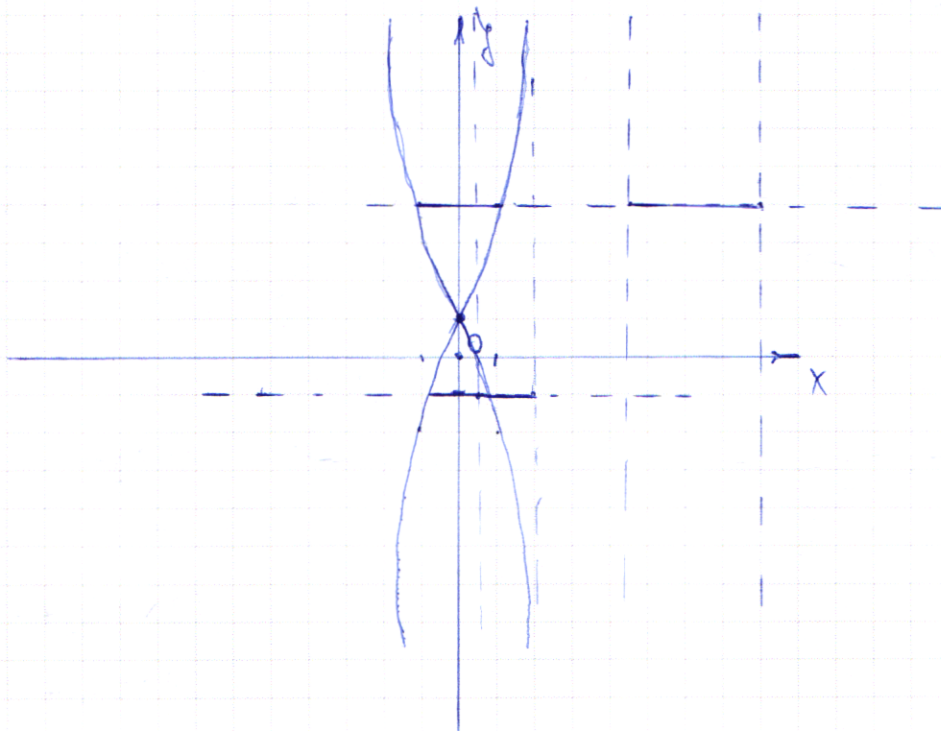
$$4 = 2x^2 - 5x + 1$$

$$0 = 2x^2 - 5x - 3$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 24 = 49 = 7^2$$

$$= 25 + 24 = 49 = 7^2$$

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -0,5 \end{cases}$$

При $a = 1$

54

$$|ax - 2a| \leq \sqrt{x-1}$$

$$\begin{cases} ax - 2a \geq 0 \\ ax - 2a \leq \sqrt{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax \geq 2a \\ ax - 2a \leq \sqrt{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{2a}{a} \\ ax - 2a \leq \sqrt{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ ax - 2a \leq \sqrt{x-1} \end{cases}, \text{ при } x=3 \text{ (по условию)}$$

$$3a - 2a \leq \sqrt{3-1}$$

$$a \leq \sqrt{2}$$

Ответ: $\begin{cases} x \geq 2 \\ a \leq \sqrt{2} \end{cases}$

55

Пусть x человек и y часов, тогда составим систему:

$$\begin{cases} xy = 28 \\ (x+2)(y+1) = 21 \\ (x+6)(y+2) = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 28 \\ xy + x + 2y + 2 = 21 \\ xy + 2x + 6y + 12 = 15 \end{cases} \begin{cases} xy = 28 \\ xy + x + 2y - 19 = 0 \\ xy + 2x + 6y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 28 \\ 28 + x + 2y - 19 = 0 \\ 28 + 2x + 6y - 3 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим 2 уравнения:

$$\begin{array}{r} 28 \cdot \begin{cases} x + 2y + 9 = 0 & | \cdot 3 \\ 2x + 6y + 25 = 0 \end{cases} \\ - \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x + 6y + 27 = 0 \\ 2x + 6y + 25 = 0 \end{cases}$$

$$x - 2y = 0 \quad x = 2$$

Ответ: 2

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

57

Используем метод подбора:

1) $\begin{matrix} 120 & 119 & 118 \\ 117 & 116 & 115 \end{matrix}$ — первая группа

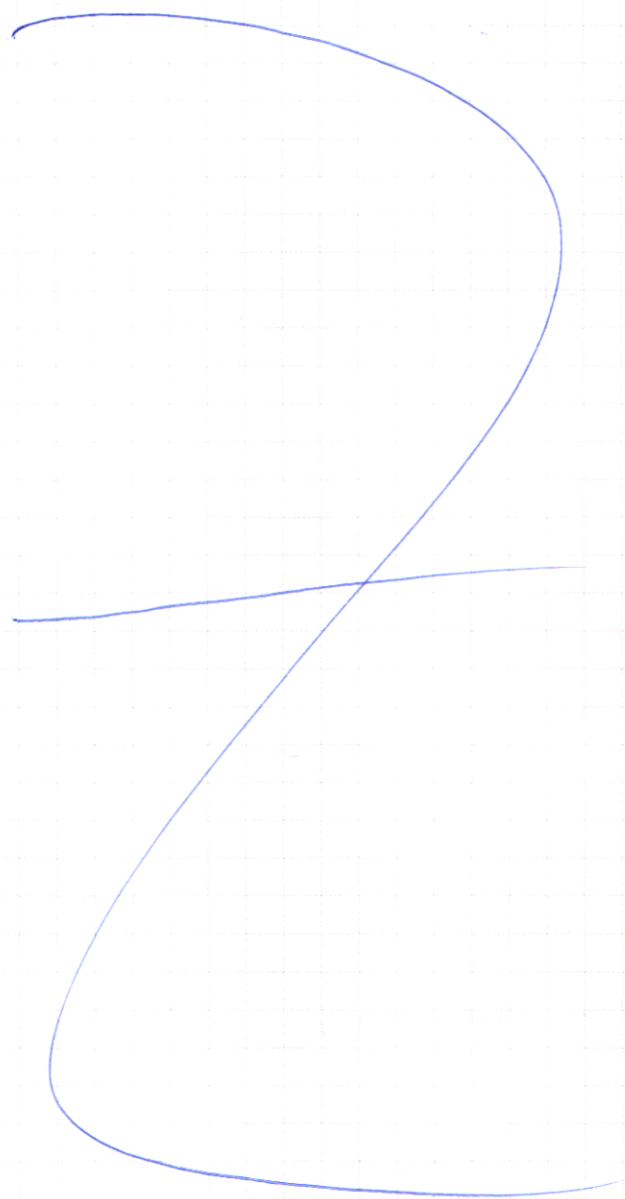
2) $\begin{matrix} 84 & 83 & 82 \\ 81 & 80 & 79 \end{matrix}$ — вторая группа

3) $\begin{matrix} 48 & 47 & 46 \\ 45 & 44 & 43 \end{matrix}$ — третья группа

4) $\begin{matrix} 10 & 9 & 8 \\ 7 & 6 & 5 \end{matrix}$ — четвертая группа

$$120 + 119 + 118 + 117 + 116 + 115 + 84 + 83 + 82 + 81 + 80 + 79 + 48 + 47 + 46 + 45 + 44 + 43 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 1512$$

Ответ: 1512



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$y = \frac{28}{x}$$

$$28 + x + 2 \cdot \frac{28}{x} - 19 = 0$$

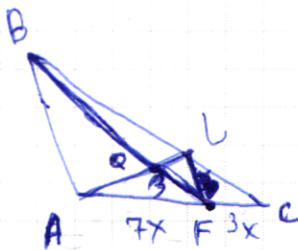
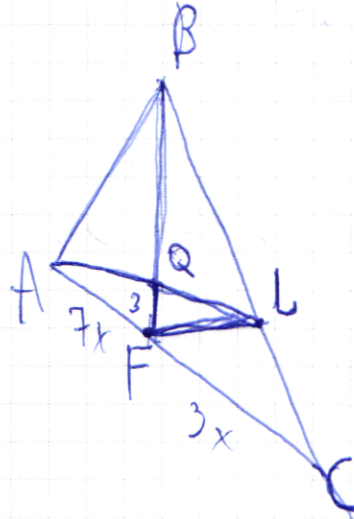
$$x + \frac{56}{x} + 9 = 0$$

$$x^2 + 56 + 9x = 0$$

$$x^2 + 9x + 56 = 0$$

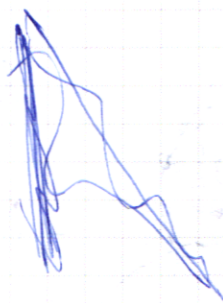
$$D = 81 - 224$$

$$D < 0 \quad \emptyset$$



$$S_{\triangle BQL} : S_{\triangle BAC} = 7 : 36$$

$$BQL \sim AQL$$



$$S = \sqrt{p(p-AQ)(p-3)(p-7x)}$$

$$S = \sqrt{p^2 - p \cdot AQ}$$

~~*****999888~~

~~999999~~

~~9999 *****~~

~~*****~~

~~*****~~

~~*****~~

2
~~2~~

3 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4
3 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4
3 3 3 4 4 4 4 4 4 4 4
3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 4
3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4
3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4

13-способов перестановки 9

$$AD+BC-AB-24+AD+BC-DC-24$$

$$12 = \frac{\quad}{2}$$

$$12 = \frac{2AD+2BC-AB-DC-48}{2}$$

$$24 = 2AD+2BC-AB-DC-48$$

$$12 = 2AD+2BC-AB-DC-$$

$$-DC = -AD-BC+AB+24$$

$$DC = AD+BC-AB-24$$

$$-BA = 24+CD-AD-BC$$

$$AB = AD+BC-DC-24$$

$$AD+BC-AB-CD=24$$

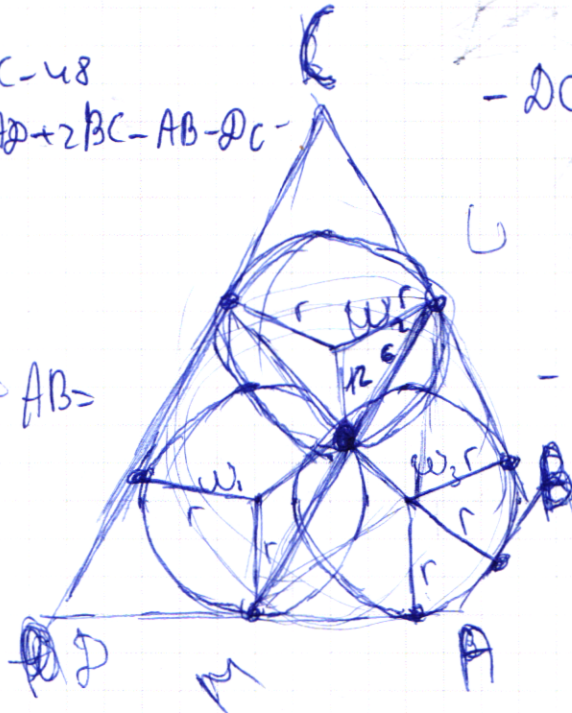
$$AD+BC+AB=48$$

~~AD+BC=48~~
~~AB+CD=24~~

ABCD - четырехугольник

~~можно впис~~

можно впис окружн



M N - средняя линия

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|ax - 2a| \leq \sqrt{x-1}$$

54

$$\begin{cases} ax - 2a \geq 0 \\ ax - 2a \leq \sqrt{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax \geq 2a \\ ax - 2a \leq \sqrt{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \frac{2a}{a} \\ ax - 2a \leq \sqrt{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ ax - 2a \leq \sqrt{x-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ ax - 2a \leq \sqrt{x-1} \end{cases}$$

Если ответ 3,

$x=3$, тогда

$$3a - 2a \leq \sqrt{3-1}$$

$$a \leq \sqrt{2}$$

~~$$2a - 2a \leq \sqrt{3-1}$$~~

~~$$a \leq \sqrt{2}$$~~

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ a \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

~~ответ 3~~

~~ответ 3~~

~~ответ 3~~

$y = 2x^2 - 5x + 1$, пересек прямые $y = -1$, $y = 4$, $y = 0$

1) $-1 = 2x^2 - 5x + 1$

2) $4 = 2x^2 - 5x + 1$

$0 = 2x^2 - 5x + 2$

$0 = 2x^2 - 5x - 3$

$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 =$

$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 25 + 8 \cdot 3 =$

$= 25 - 16 = 9 = 3^2$

$= 25 + 24 = 49 = 7^2$

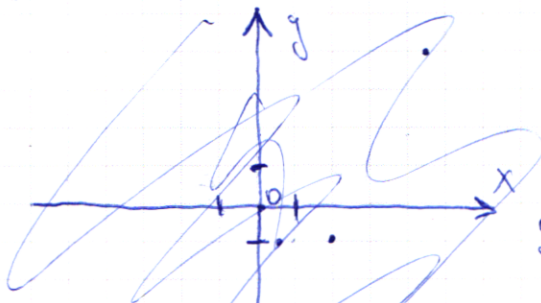
$x_1 = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} = 2$

$x_1 = \frac{25+7}{4} = \frac{32}{4} = 8$

$x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

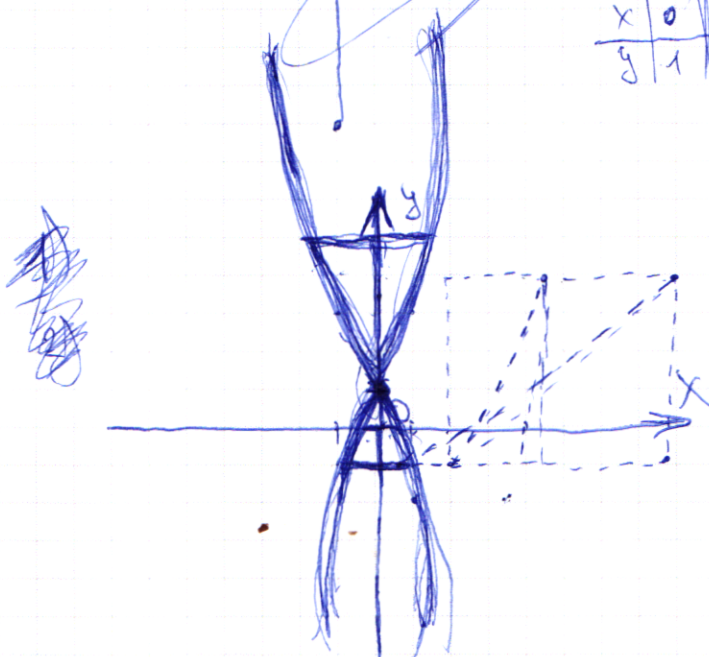
$x_2 = \frac{25-7}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$

$(x-x_1)(x-x_2)$



$y = 2x^2 - 5x + 1$

x	0	1	2	-1	-2
y	1	-2	-1		



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$120 + 119 = 239$$

$$\begin{array}{r} 118 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 357 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 117 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 474 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 116 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 590 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 115 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 705 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 84 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 789 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 83 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 872 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 82 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 954 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1035 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 80 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1115 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 79 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1184 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1242 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 47 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1289 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 46 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1335 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1335 \\ \hline \end{array}$$

$$1335$$

$$45$$

$$\begin{array}{r} 1380 \\ \hline \end{array}$$

$$44$$

$$\begin{array}{r} 1424 \\ \hline \end{array}$$

$$43$$

$$\begin{array}{r} 1467 \\ \hline \end{array}$$

$$16$$

$$\begin{array}{r} 1477 \\ \hline \end{array}$$

$$9$$

$$\begin{array}{r} 1486 \\ \hline \end{array}$$

$$8$$

$$\begin{array}{r} 1484 \\ \hline \end{array}$$

$$7$$

$$\begin{array}{r} 1501 \\ \hline \end{array}$$

$$6$$

$$\begin{array}{r} 1507 \\ \hline \end{array}$$

$$5$$

$$\begin{array}{r} 1512 \\ \hline \end{array}$$

$$1512$$

$$1512$$

Orlov

1V

7V

4V

$$xy = 28$$
~~$$(x+2)(y+1) = 21$$~~
~~$$(x+6)(y+2) = 15$$~~

$$\begin{array}{r} 72800 \\ 5376 \\ \hline 67434 \end{array}$$

$$\begin{cases} xy = 28 \\ (x+2)(y+1) = 21 \\ (x+6)(y+2) = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 28 \\ xy + x + 2y + 2 = 21 \\ xy + 2x + 6y + 12 = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 28 \\ xy + x + 2y - 19 = 0 \\ xy + 2x + 6y - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 28 \\ xy + x + 2y = 19 \\ xy + 2x + 6y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 672 \\ 2 \\ \hline 1344 \end{array}$$

$$(6-4y)y = 28$$

$$-4y^2 + 6y = 28$$

$$4y^2 - 6y + 28 = 0$$

$$2y^2 - 3y + 14 = 0$$

~~$$x = 15$$~~

~~$$28 + x + 2y - 19 = 0$$~~

~~$$28 + 2x + 6y - 3 = 0$$~~

~~$$x + 2y + 9 = 0$$~~

~~$$2x + 6y + 25 = 0$$~~

~~$$\sqrt{2}$$~~

~~$$3x + 6y + 8 = 0$$~~

~~$$2x + 6y + 25 = 0$$~~

$$-x - 4y = 6$$

$$x + 4y = 6$$

~~$$x = 6 - 4y$$~~

$$x = 6 - 4y$$

$$15 \quad x - 16 = 0$$

$$24 \quad x = 16$$

$$\frac{60}{30}$$

$$\frac{30}{360}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ 24 \\ \hline 112 \\ 56 \\ \hline 672 \end{array}$$

~~$$x(672 - y) = 672$$~~

~~$$x$$~~

~~$$xy = 28$$~~

~~$$(x+2)(y+\frac{1}{24}) = 21$$~~

$$\begin{array}{r} 27 \\ 27 \\ \hline 789 \\ 54 \\ \hline 729 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 24 \\ \hline 84 \\ 42 \\ \hline 504 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1344 \\ 2 \\ \hline 5376 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) 1 $\begin{pmatrix} 120 & 119 & 118 \\ 117 & 116 & 115 \end{pmatrix}$

2 $\begin{pmatrix} 84 & 83 & 82 \\ 81 & 80 & 79 \end{pmatrix}$

3 $\begin{pmatrix} 48 & 47 & 46 \\ 45 & 44 & 43 \end{pmatrix}$

4 $\begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

57

1 $\begin{pmatrix} 120 & 119 & 118 \\ 117 & 116 & 115 \\ 84 & 83 & 82 \\ 81 & 80 & 79 \\ 60 & 59 & 58 \\ 57 & 56 & 55 \\ 24 & 23 & 22 \\ 21 & 20 & 19 \end{pmatrix}$

2

3

4

$$y = \frac{672}{x}$$

$$x = \frac{672}{y}$$

$$\begin{cases} x \cdot y = 672 \\ (x+2)(y+1) = 504 \\ (x+6)(y+2) = 360 \end{cases}$$

$$xy + x + 2y + 2 = 504$$

$$672 + x + 2 \cdot \frac{672}{x} + 2 = 504$$

$$672 + x + \frac{1344}{x} + 2 = 504$$

$$672x + x^2 + 1344 + 2x = 504x$$

$$x^2 + 270x + 1344 = 0$$

$$D = 72900 - 5376$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ 8 \\ \hline 64 \\ +6 \\ \hline 224 \end{array}$$

$\sqrt{}$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 14 \\ 84 \\ 21 \\ \hline 294 \end{array}$$

$$y = \frac{x}{28}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ 14 \\ \hline 112 \\ 28 \\ \hline 392 \end{array}$$

x - рабочие

y - часы

$$\begin{cases} xy = 28 \\ (x+2)(y+1) = 21 \\ (x+6)(y+2) = 15 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ 23 \\ \hline 69 \\ \times 28 \\ \hline 224 \end{array}$$

$$x = \frac{28}{y}$$

$$y = \frac{28}{x}$$

$$(x+2)(y+1) = 21$$

$$xy + x + 2y + 2 = 21$$

$$28 + x + 2 \cdot \frac{x}{28} + 2 = 21$$

$$28 + x + \frac{x}{14} + 2 = 21$$

$$392 + 14x + x + 28 = 294$$

$$15x = 294 - 420$$

$$xy + x + 2y + 2 = 21$$

$$28 + \frac{28}{y}$$

~~xy~~

$$28 + \frac{28}{y} + 2y + 2 = 21$$

$$28y + 28 + 2y^2 + 2y = 21y$$

$$2y^2 + 9y + 28 = 0$$

$$D = 81 -$$

$$2x + 6y + 25 = 0$$

$$2x + \frac{28}{x} + 25 = 0$$

$$2x^2 + 28 + 25x = 0$$

$$2x^2 + 25x + 28 = 0$$

$$D = 625 - 224 = 28x^2 + 56 + 2x = 21x$$

$$= 409$$

$$x^2 + 9x + 56 = 0$$

$$xy + 2x + 6y + 12 = 15$$

$$xy + 2x + 6y - 3 = 0$$