

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 3

ШИФР

8-003

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2 - 5x + 1$ пересекает прямые $y = -1$, $y = 4$ и $y = a$, отсекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Найдите количество 16-значных чисел, содержащих только цифры "3", "4" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "9" ровно четыре, и они идут подряд.
3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 24$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 2a| \leq \sqrt{x - 1}$ является отрезок длины 3?
5. Несколько рабочих выполняют работу за 28 дней. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 21 день. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 15 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 7 : 3$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $7 : 36$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 3.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 30]$, $[31; 60]$, $[61; 90]$, $[91; 120]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 30. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$y = 2x^2 - 5x + 1$ — Парабола, пересекающая 3 горизонтальные прямые

$$y = -1$$

$$y = 4$$

$$y = a$$

Находим точки пересечения

$$\text{I} \begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{II} \begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Подстановка

$$\text{I} \quad -1 = 2x^2 - 5x + 1$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ 0,5 \end{cases}$$

По м. Пифагора:

I вариант: $m^2 + l^2 = p^2$

$$m = x_{11} - x_{12} = 3 - (-0,5) = 3,5$$

$$l = x_{11} - x_{12} = 2 - 0,5 = 1,5$$

$$m^2 + l^2 = p^2$$

$$3,5^2 + 1,5^2 = 15 \Rightarrow p = \sqrt{15}$$

$$x_{p1} - x_{p2} = \sqrt{15}$$

II вариант по м. Пифагора $m^2 - l^2 = p^2$

$$3,5^2 - 1,5^2 = 10$$

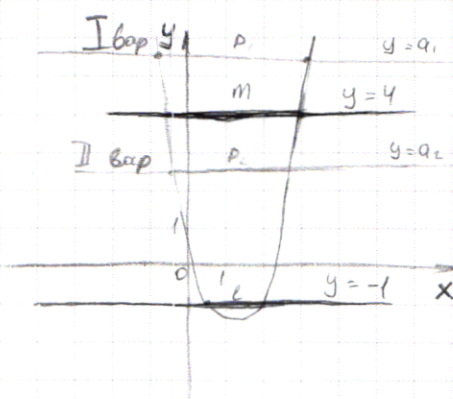
$$x_{p1} - x_{p2} = \sqrt{10}$$

$$\text{II} \quad 4 = 2x^2 - 5x + 1$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$D = 25 + 3 \cdot 2 \cdot 4 = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4} = \begin{cases} 3 \\ -0,5 \end{cases}$$



x_1 — I координата точки пересечения

$y = 2x^2 - 5x + 1$ и $y = a$.

x_2 — II координата точки пересечения

$y = 2x^2 - 5x + 1$ и $y = a$

II вариант:

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ y = a \end{cases}$$

$$a = 2x^2 - 5x + 1$$

$$2x^2 - 5x + 1 - a = 0$$

$$D = 25 - 2 \cdot 4 \cdot (1 - a) = 17 + 8a$$

$$x_{p1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17+8a}}{2 \cdot 2} \Rightarrow x_{p1} - x_{p2} = \frac{5 + \sqrt{17+8a}}{4} - \frac{5 - \sqrt{17+8a}}{4} = \frac{2\sqrt{17+8a}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{17+8a}}{2}$$

$$I \begin{cases} x_{p1} - x_{p2} = \sqrt{10} \\ x_{p1} - x_{p2} = \frac{\sqrt{17+8a}}{2} \end{cases}$$

$$II \begin{cases} x_{p1} - x_{p2} = \sqrt{15} \\ x_{p1} - x_{p2} = \frac{\sqrt{17+8a}}{2} \end{cases}$$

Подстановка:

$$2\sqrt{10} = \sqrt{17+8a} \Rightarrow 0$$

$$2\sqrt{15} = \sqrt{17+8a} \Rightarrow 0$$

Обе части уравнения возводим в квадрат.

$$4 \cdot 10 = 17 + 8a$$

$$4 \cdot 15 = 17 + 8a$$

$$23 = 8a$$

$$60 = 17 + 8a$$

$$a = 2 \frac{5}{8}$$

$$a = 5 \frac{3}{8}$$

Ответ: при $a = \{2 \frac{5}{8}; 5 \frac{3}{8}\}$.

✓2

I 4 - девятки идущие подряд можно считать одним элементом в 13-ти значном числе т.к. $16 - 4 + 1 = 13 \Rightarrow$

4 "9" элемент "9999"

У нас есть 13 вариантов расстановки этого элемента.

II На оставшиеся 12 мест мы можем поставить числа "3" и "4" 2^{12} вариантами, но может попасться среди них вариант расстановка "9999"

2-выбор из "3" и "4" т.к. у нас 12 мест, на которые мы можем поставить 9 цифр. из "3" и "9" варианты или "4" и "9" /

в котором нет цифр "2" или "3", таких вариантов $2 \cdot 13 = 26 \Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⇒ всего $13 \cdot 2^{12} - 13 \cdot 2$ вариантов.

$$13 \cdot (2^{12} - 2) = 13 \cdot (4096 - 2) = 13 \cdot 4094 = 53222 \text{ (варианта.)}$$

Ответ: всего 53.222 варианта.

Дано: $MO_1 = PO_2 = SO$

$$AD + BC + (-AB) - CD = 24$$

Найти $\angle \Gamma$, $\angle AOB$

Решение: $O_1, O_2 - p/c \Delta$

$$m.k. O_1 E = EO = OI =$$

$$IO_2 = O_2 J = JO_1 \Rightarrow$$

$$O_1 O = OO_2 = O_2 O_1 \Rightarrow \Delta$$

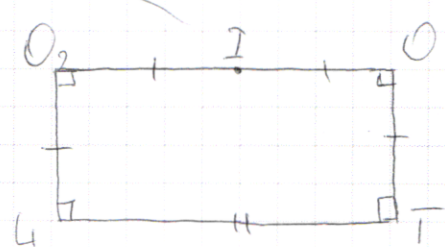
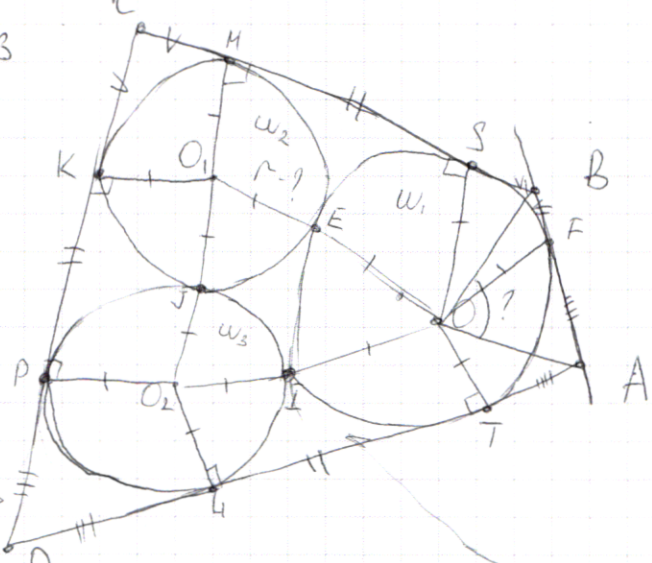
$\Delta p/c$

$$CM = CK = k \text{ (по св кас.)}$$

$$PD = DL = d$$

$$TA = AF = a$$

$$FB = BS = b$$



$$\left. \begin{array}{l} O_2 L \perp LT \\ OT \perp LT \end{array} \right\} \Rightarrow LT O_2 L \parallel OT, \quad O_2 L = OT \text{ (по в радиусе)}$$

$O_2 O T L$ - параллелограмм (по 2-м сторонам), \Rightarrow

$O_2 O T L$ - прямоугольник (по двум прямым) \Rightarrow

$$O_2 O = LT = OO_1 = O_1 O_2 = KP = MS \Rightarrow$$

$$AD = d + OO_1 + a$$

$$BC = k + OO_1 + b$$

$$CD = k + OO_1 + d$$

$$AB = b + a$$

$$AD + BC - AB - CD = 24$$

$$\Rightarrow d + OO_1 + a + k + OO_1 + b - k - OO_1 - d - b - a = 24$$

$$OO_1 = 24 \Rightarrow r = \frac{1}{2} OO_1 = 12 \text{ (eq)} (r_1 = r_2 = r_3)$$

$$\delta) \angle SOT = 360^\circ - \angle IOT - \angle SOE - \angle O_1OO_2 = 120^\circ,$$

$\angle SOE \cong \angle IOT = 90^\circ$ т.к. $O \perp OTL$ - перп.

$$\angle O_1OO_2 = 60^\circ \text{ т.к. } \triangle O_1OO_2 - \text{р/с.}$$

$$\angle BOS = 90^\circ - \angle OBS = 90^\circ - \angle OBF = \angle BOF$$

$$\angle FOA = \angle AOT \text{ аналогично } \Rightarrow$$

$$\angle SOT = 2 \angle BOS + 2 \angle FOA = 2 \angle BOA \Rightarrow$$

$$\angle AOB = \frac{1}{2} \angle SOT = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

$$\text{Ответ: } r = 12 \text{ eq}; \angle AOB = 60^\circ$$

✓ 7

Нам нужно выбрать по 6 чисел из каждой группы так, чтобы разность любых 2-х чисел \nmid на 30, ^{чисел} из любой группы между собой разности не кратны 30, а значит число $k+30$ должно быть единственным, при $k \in [1, 30]$, $n \in \mathbb{Z}$

k не должно повторяться \Rightarrow максимальная $\Sigma =$

6 наибольших чисел из IV группы + 6 следующих чисел из III, + 6 из II группы + 6 из I $k = [30, 29, 28, 27, 26 \dots 7] \Rightarrow$

$$\Sigma = \frac{7+30}{2} \cdot 24 + 6 \cdot 0 + 6 \cdot 30 + 6 \cdot 60 + 6 \cdot 90 = 37 \cdot 12 + 6 \cdot 180 =$$

$$= 444 + 1080 = 1524$$

Ответ: 1524

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{matrix} & V & + & A \\ \text{I} & x & 28y & \frac{1}{28} \\ \text{II} & x+2 & y+1 & \frac{1}{15} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \times 28 & & & \\ \hline & 420 & & \\ & 15 & & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \times 28 & & & \\ \hline & 28 & & \\ & 30 & & \end{matrix}$$

$$420 + 150 + 30 = 460 = 1344$$

$$28xy = 15(x+2)(y+1)$$

$$28xy - 15xy - 30y - 15x - 30 = 0$$

$$13xy - 30y - 15x - 30 = 0$$

$$y(13x - 30) = 15x + 30$$

$$y = \frac{15x + 30}{13x - 30}$$

$$\frac{15x^2 + 30x}{13x - 30} = \frac{1}{28}$$

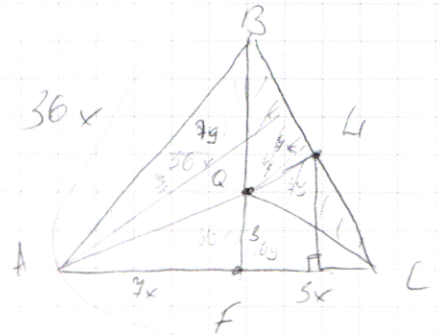
$$28 \cdot 15x^2 + 30x \cdot 28 = 13x - 30$$

$$420x^2 + 840x = 13x - 30$$

$$420x^2 + 827x + 30 = 0$$

$$x = \frac{827 \pm \sqrt{827^2 - 4 \cdot 420 \cdot 30}}{2 \cdot 420}$$

6.



$$420x^2 + 827x + 30 = 0$$

$$x = \frac{827 \pm \sqrt{827^2 - 4 \cdot 420 \cdot 30}}{2 \cdot 420}$$

$$x = \frac{827 \pm 1594}{840}$$

$$x = \frac{827 + 1594}{840} = \frac{2421}{840} = \frac{807}{280}$$

$$x = \frac{827 - 1594}{840} = \frac{-767}{840}$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = 2x^2 - 5x + 1 \quad \approx 1.$$

$$y = 2x^2 - 5x + 1.$$

$$y = 2(x^2 - 2,5x)$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{4} = 1,25$$

1,25.

$$y = \frac{25}{16} - \frac{25}{4} + 1.$$

$$y = -\frac{25}{8} + 1.$$

$$y = -2\frac{1}{8}$$

$$-1 = 2x^2 - 5x + 1.$$

$$0 = 2x^2 - 5x + 2.$$

$$D = 25 - 16 = 9.$$

$$\frac{-5 \pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ 0,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2 - l^2 = p^2 \\ m^2 + l^2 = p^2 \end{cases}$$

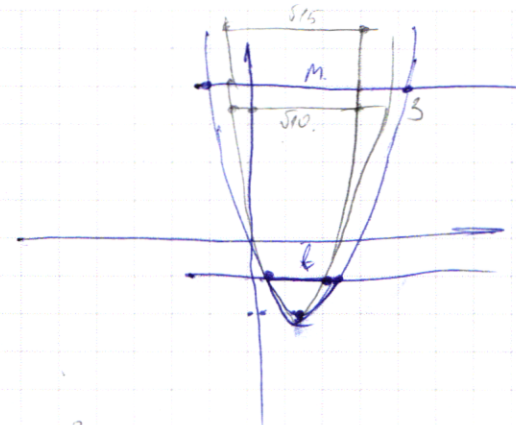
$$l = 2 - 0,5 = 1,5 \quad x_2 - x_1 = 2 - 0,5 = 1,5$$

$$m = x_{m_1} - x_{m_2} = 3 - (-0,5) = 3,5$$

$$p^2 = m^2 - l^2 = 3,5^2 - 1,5^2 = 10,00$$

$$p = \sqrt{10}$$

$$x_{p_1} - x_{p_2} = \sqrt{10}$$



$$2x^2 - 5x + 1 - 1 = 0.$$

$$D = 25 - 8 + 8 = 19.$$

$$x_1, x_2 = \frac{5 \pm \sqrt{19+8}}{4} = \frac{5 + \sqrt{19+8}}{4} - \frac{5 - \sqrt{19+8}}{4} =$$

$$4 = 2x^2 - 5x + 1.$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0.$$

$$D = 25 + 24 = 49.$$

$$\frac{5 \pm 7}{4} = \begin{cases} 3 \\ -0,5 \end{cases}$$

$$2\sqrt{15} = \sqrt{19+8}$$

$$\sqrt{60} = \sqrt{19+8}$$

$$2\sqrt{10} = \sqrt{19+8}$$

$$\sqrt{40} = \sqrt{19+8}$$

$$8a = 43$$

$$40a = 23$$

$$a = 5,375 \quad 5 \frac{3}{8}$$

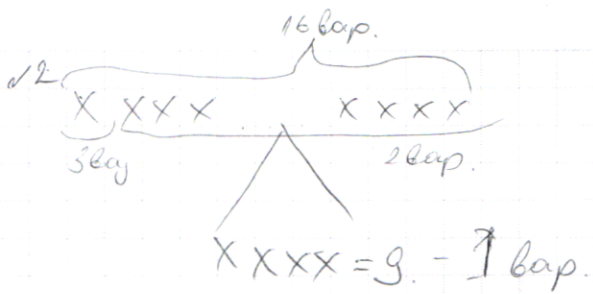
$$a = 2 \frac{5}{8}$$

$$a^2 = m^2 + l^2 = 1,500$$

$$p = \sqrt{15}$$

$$x_{a_1} - x_{a_2} = \sqrt{15}$$

Ответ: $a = \left\{ 2 \frac{5}{8}; 5 \frac{3}{8} \right\}$.



13 мес.

$$3 \cdot 2^{12} = 3 \cdot 1024 \cdot 4 = 4096 \cdot 3 = \textcircled{12288} \cdot 13 - 2 \text{ вар.}$$

13 мес.

13 вар. - 12 вар. 2 вар.

9-мес.

9-мес. 11-мес. + 1-мес. - 2 вар.
 9 4 3 4 3

9-мес. - 13 вар.

12 вар. - 3 и 4-мес.

$$13 \cdot 2^{12} - 13 \cdot 2 = 26$$

$$13 (2^{12} - 2) = 4094 \cdot 13$$

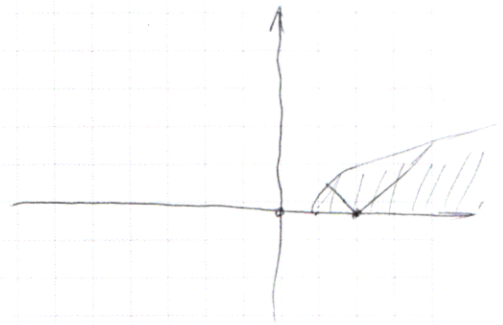
Ответ: 53222

$$\begin{array}{r} \sim 4094 \\ 13 \\ \hline 12282 \\ 4094 \\ \hline 53222 \end{array}$$

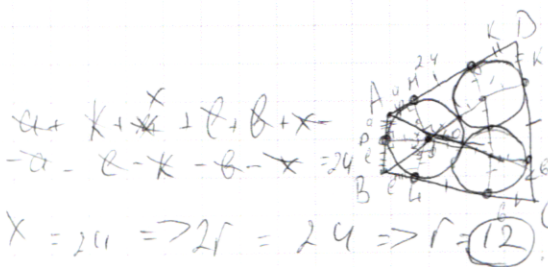
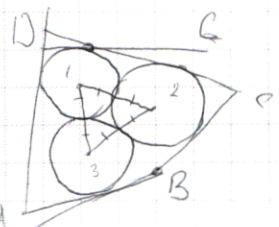
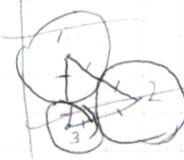
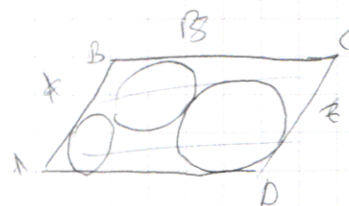
$$|ax - 2a| \leq \sqrt{x-1}$$

$$|a(x-2)| \leq$$

$$x \geq +1$$



3



$$x + x + x + x + x + x = 24$$

$$x = 24 \Rightarrow 2r = 24 \Rightarrow r = 12$$

Ответ: 12; 60°

$$360 - 180 - 60 = 120$$

$$\angle M O L = 360 - 180 - 60 = 120$$

$$\begin{aligned} \angle M A O = \angle P A O &\Rightarrow \angle M O A = \angle P O A = \\ &= 90 - \angle M A O \Rightarrow \angle A O B = \frac{1}{2} \angle M O L = \\ &60 \end{aligned}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

8-003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Grid area for writing the answer.

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)