

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 3

ШИФР

13-005

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2 - 5x + 1$ пересекает прямые $y = -1$, $y = 4$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Найдите количество 16-значных чисел, содержащих только цифры “3”, “4” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “9” ровно четыре, и они идут подряд.
3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 24$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 2a| \leq \sqrt{x - 1}$ является отрезок длины 3?
5. Несколько рабочих выполняют работу за 28 дней. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 21 день. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 15 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 7 : 3$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $7 : 36$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 3.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 30]$, $[31; 60]$, $[61; 90]$, $[91; 120]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 30. Какое наибольшее значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 Дана парабола $y = 2x^2 - 5x + 1$ (1) и 3 прямые: $y = -1$ (2), $y = 4$ (3), $y = a$ (4)

Отрезки пересечения дугами параболы образуют Δ , при каких значениях a , он будет являться прямоугольником.

Ответ: $a = \frac{41}{8}$; $a = \frac{23}{8}$

Решение:

Найдем отрезок пересечения (1) и (2).

$$2x^2 - 5x + 1 = -1$$

$$D = 9$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \quad l_1 = \frac{3}{2}$$

Далее (1) и (3): $2x^2 - 5x + 1 = 4$

$$D = 49$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$l_2 = \frac{7}{2}$$

и для (4) и (1) имеем:

$$2x^2 - 5x + 1 = a$$

$$D = 17 + 8a$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{17 + 8a}}{4}$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{17 + 8a}}{4}$$

$$l_3 = \frac{\sqrt{17 + 8a}}{2}$$

Первое рассмотрим 3 случая:

1: (2) - шном l_1 шномизуей l_2 шномизуей не может

2: l_2 - шномизуей, тогда:

$$\frac{49}{4} = \frac{9}{4} + \frac{17+8a}{4}$$

$$\Rightarrow a = \frac{23}{8}$$

3: l_2 - шномизуей, тогда:

$$\frac{17+8a}{4} = \frac{9}{4} + \frac{49}{4} \Rightarrow a = \frac{41}{8}$$

12

16-значное число из '9', '3', '4' и 9-разноч. цифр
подряд. Ответ: 53222. Решение:

Для начала рассмотрим возможные расположения 9.

9 9 9 9
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

Последняя '9' из 4 занимает все позиции с 4 по 16,
значит всего 13 расположений для 4-х '9'.

На оставшихся позициях будут располагаться

'3' и '4', значит всего для 1 расположения 9-ок есть 2^{12} -

комбинаций из 3 и 4, но учитывая условие что цифры
встречаются хотя бы одна 3 или 4, значит можно

вычесть 2 комбинации только из 3 или только из 4.

Значит искомое $13 \cdot (2^{12} - 2) = 13 \cdot 4094 = 53222$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

N	K	A	E
g	x	2	28
g+1	x+2	2	21
g+2	x+6	2	15

$$\left\{ \begin{array}{l} g = \frac{2}{28x} \\ g+1 = \frac{2}{21(x+2)} \\ g+2 = \frac{2}{15(x+6)} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 = \frac{2}{15(x+6)} - \frac{2}{21(x+2)} \\ 1 = \frac{2}{21(x+2)} - \frac{2}{28x} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 = \frac{(x+2)(x+6) \cdot 3 \cdot 7}{2(x-8)} \\ 2 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot x(x+2)}{(x-8)} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{(x+6) \cdot 5}{2(x-8)} = \frac{4x}{(x-8)} \Rightarrow$$

~~$$8x^2 - 64x = 5x^2 + 60x + 180$$~~

~~$$3x^2 - 124x - 180 = 0$$~~

~~$$D = 4384$$~~

~~$$x_1 =$$~~

~~$$x_2 =$$~~

~~$$5x^2 + 20x - 60 = 8x^2 - 64$$~~

~~$$x^2 + 20x - 20 = 0$$~~

~~$$5 \cdot (x^2 - 36) = 8x^2 - 8x$$~~

~~$$3x^2 - 8x + 180 = 0$$~~

$$3x^2 - 64x + 180 = 0$$

$$D = 474 = 22^2$$

$$x_1 = \frac{32 - 22}{3} = \frac{10}{3} \quad \text{D}$$

$$x_2 = \frac{32 + 22}{3} = 18$$

Ответ: 18 человек.

N	K	A	t
y	x	2	28
y+1	x+2	7	21
y+2	x+6	2	15

$$y = \frac{2}{28x}$$

$$y+1 = \frac{2}{21(x+2)}$$

$$y+2 = \frac{2}{15(x+6)}$$

$$1 = \frac{2}{21(x+2)} - \frac{2}{28x}$$

$$1 = \frac{2}{15(x+6)} - \frac{2}{21(x+2)}$$

$$1 = \frac{2}{21(x+2)} - \frac{2}{28x} \quad 42x - 32x = 22$$

$$1 = \frac{2 \cdot 7(x+2) - 5 \cdot (x+6) \cdot 2}{(x+2)(x+6) \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$$

$$42x - 32x + 9 \cdot 62 = 2(x+6)$$

$$10x + 558 = 2x + 12$$

$$8x = -546 \quad x = -68.25$$

$$x^2 - 28x + 20 = 0$$

$$x_1 = 14 + \sqrt{196 - 20} = 14 + \sqrt{176}$$

$$x_2 = 14 - \sqrt{176}$$

$$2 = \frac{(x+2)(x+6) \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2(x-8)}$$

$$22(x-8) = (x+2)(x+6) \cdot 105$$

$$22x - 176 = 105(x^2 + 8x + 12)$$

$$105x^2 + 840x + 1260 - 22x + 176 = 0$$

$$105x^2 + 818x + 1436 = 0$$

$$5(x-2)(x+6) = 8(x(x-8))$$

$$5(x^2 + 4x - 12) = 8(x^2 - 8x)$$

$$5x^2 + 20x - 60 = 8x^2 - 64x$$

$$3x^2 - 84x + 60 = 0$$

$$x^2 - 28x + 20 = 0$$

$$108x - 168 \cdot 8 = (x+6)^2 \cdot 105$$

$$108(x-2) = (x+6)^2 \cdot 105$$

$$y-2 = t$$

$$108t = (t+8)^2 \cdot 105$$

$$108t = (t^2 + 16t + 64) \cdot 105$$

$$105t^2 + 16 \cdot 105t - 108t = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N7

~~Есть~~ и

Ответ: 1524; Решение:

[1;30], [31;00], [61;90], [91;20]

Чтобы сумма увеличилась, нужно увеличить каждое слагаемое; т.е. брать максимально возможное значение из каждого промежутка удовлетворяющее условию.

из 4: 120, 119, 118, 117, 116, 115 (максимально возможное значение /30)

из 3: 84, 83, 82, 81, 80, 79 (Также сохраняется условие)

из 2: 48, 47, 46, 45, 44, 43 (Аналогично)

из 1: 12, 11, 10, 9, 8, 7: ~~они~~ по сути мы берем

максимальное значение из интервала, в каждом (начиная со второго), отступая на $6 \cdot (i-1)$ единиц от верхней границы, где i - номер промежутка считая с начала.

Итого: $S = 705 + 489 + 273 + 57 = 1524$

Черновики:

$$(1) \frac{2+28x}{4x} = \frac{2}{3(x+2)}$$

$$(3) \frac{2}{28x} + 2 = \frac{2}{15(x+6)}$$

$$(2) \frac{2}{28(x+2)} + 1 = \frac{2}{15(x+6)}$$

$$\frac{2+36x}{28x} = \frac{2}{15(x+6)}$$

$$\frac{2+28(x+2)}{28(x+2)} = \frac{2}{15(x+6)}$$

$$(3x+6)(2+28x) = 42x$$

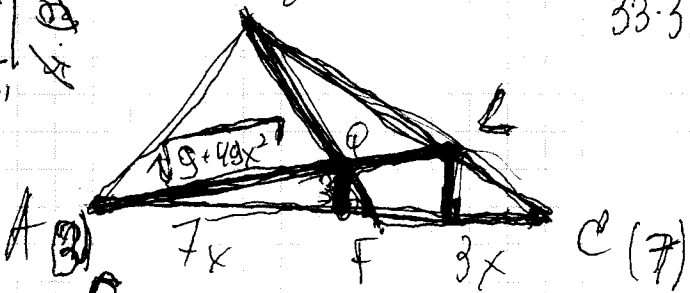
$$(2+28x)(6x+30) = 72(x+2)$$

$32x+62+$

961 - 66 \cdot 9 \cdot 9

33 \cdot 32

$$11x + 42y + 7xy + 94 = 5x + 10y + 5xy + 10$$

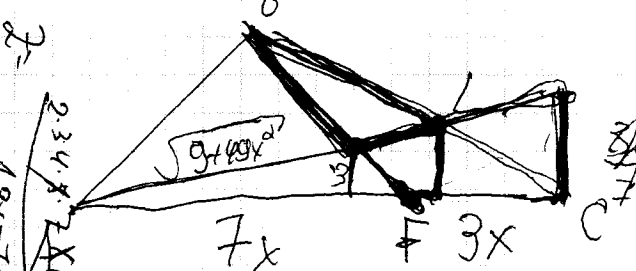


$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7x}{13x - 75} = \frac{2x}{16}$$

$$\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{4 \cdot 7x} = \frac{28x^2 - 132 \cdot 11 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 16}$$

$$\frac{13x^2 - 75x}{2(13x - 75)} = \frac{28x^2 - 132 \cdot 11 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 16}$$

$$\frac{\int_{AC} \rho_{AC}}{\int_{BC} \rho_{BC}} = \frac{7}{36}$$



$$\frac{3}{7} \cdot 10 = \frac{7}{20} = \frac{3}{x}$$

$$\frac{31 + \sqrt{2017}}{36} = \frac{81}{8}$$

$$y \cdot x = 28$$

$$(1+6)(y+2) \cdot 15 = 28xy$$

$$D = 31^2 + 33 \cdot 32$$

$$31 \cdot 32 = 990$$

961
1056
961
2017

33 \cdot 32 = 1056
990
961

$$\begin{cases} xy = \frac{A}{28} \\ (x+2)(y+1) = \frac{A}{21} \\ (x+6)(y+2) = \frac{A}{15} \end{cases}$$

$$\frac{(x+6)(y+2)}{5} \cdot 7 = (x+2)(y+1)$$

$$(x+6)(y+2) \cdot 7 = (x+2)(y+1) \cdot 10$$

$$xy + 6y + 7x + 12 = 10x + 10y + 2x + 2$$

$$9x + 32y + 2xy + 84 = 0$$

$$8x + 18y - 2xy - 16 = 0$$

$$x + 16y + 68 = 0$$

$$x = -68 - 16y$$

$$4x + 8y + xy + 16 = 0$$

$$4(-68 - 16y) + 8y + (-68 - 16y) \cdot y - 272 - 64y + 8y - 68y - 16y^2 + 16 = 0$$

$$-272 - 64y + 8y - 68y - 16y^2 + 16 = 0$$

$$4xy + 8y + x + 8 = 3$$

$$\frac{(x+2)(y+1)}{3} \cdot 4 = xy$$

$$(x+2)(y+1) \cdot 4 = 3xy$$

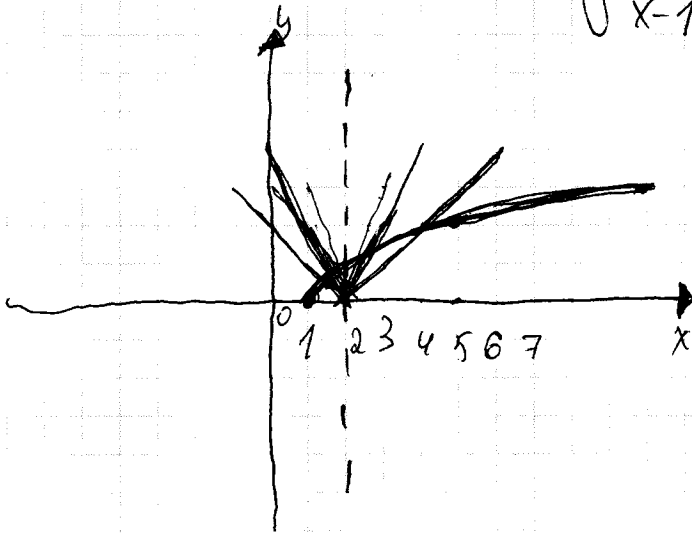
$$4x + 8y + 4xy + 8 = 3xy$$

$$4x + 8y + xy + 8 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1/4

$$|ax-2a| \leq \sqrt{x-1}$$



Ответ: $a = \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$

Решение:

$$\sqrt{x-1} \geq 0$$

1) заметим, что $|ax-2a|$ - "уголок", вершина которого лежит в $(2;0)$, и с увеличением a "уголок" растягивается и суживается, вдоль прямой $x=2$

Необходимо найти a , при которых разность координат пересечения уголка $y(1) = 3$.

Значит:

$$\sqrt{x-1} = |ax-2a|$$

$$a^2 x^2 - 4a^2 x - x + 4a^2 + 1 = 0$$

$$a^2 x^2 - (4a^2 + 1) \cdot x + 4a^2 + 1 = 0$$

$$D = 16a^4 + 8a^2 + 1 - 16a^2 - 4a^2 =$$

$$4a^2 + 1$$

$$x_1 = \frac{4a^2 + 1 + \sqrt{4a^2 + 1}}{2a^2}$$

$$x_2 = \frac{4a^2 + 1 - \sqrt{4a^2 + 1}}{2a^2}$$

$$x_1 - x_2 = 3 \Rightarrow 2\sqrt{4a^2 + 1} = 3$$

$$\Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{5}}{4}$$

15		$\frac{1194}{330}$		
		1524	$280 + 50$	
A	N	t	x	
2	y	28	x	
2	y+1	21	x+2	
2	y+2	15	x+6	

$$\begin{cases} 28xy = 2 \\ 21(x+2)(y+1) = 2 \\ 15(x+6)(y+2) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 32y + 2xy + 1 = 0 \\ 8x + 16y + 2xy + 16 = 0 \\ (1) \end{cases}$$

$\Rightarrow x = -\frac{16y}{y+2}$ и подставляем в (1) получаем:

$$-16y^2 - 64y - 68y + 8y = 272 + 8 = 0$$

$$16y^2 + 124y - 264 = 0$$

$$4y^2 + 31y - 66 = 0$$

$$D = 31^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-66) = 325$$

$$16y^2 + 114y - 224 = 0$$

$$30 - 2^2 = 300$$

$$[1, 30], [31, 60], [61, 90], [91, 120]$$

$$30 - 2^2$$

$$60 - 2^2$$

$$300$$

$$D = 57 \cdot 57 - 4 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 112 = 56 \cdot 82$$

$$y_1 = \frac{-57 + \sqrt{56 \cdot 82}}{16}$$

$$y_2 = \frac{-57 - \sqrt{56 \cdot 82}}{16}$$

~~120 119 118 117 116 115 114 113 112 111 110 109 108 107 106 105 104 103 102 101 100 99 98 97 96 95 94 93~~

~~110 117 116 115~~

~~84 83 82 81 80 79~~

~~60 59 58 57 56 55~~

~~54 53 52 51 50 49~~

~~48~~

~~30 29 28 27 26 25~~

~~24 23~~

~~18~~

~~12 11 10 9 8 7~~

$$6 \frac{120 + 115}{2} = 3(48 + 43) = 41 + 50 = 91$$

$$3 \cdot 1 = 235 \cdot 3 = 91$$

$$3 \cdot (84 + 79) + 180 = 163 + 300 = 489$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2585
 114
 $\overline{114}$
 2699

114.56
 57.57

32.56
 64.56
 6400
 3200

$2x_1 + x_2 + x_3 = 12$

57.57
 32.56

$57.57 - 32.56$
 24

$AD + BC = AB + CD + 24$

$AD + BC = (AB + CD) + 24$

$4x + 8y + 8 = 0$
 $4(-58 - 16cy) + 8y + (-58 - 16cy) + 8 = 0$
 $-232 - 68cy + 8y - 58y - 16cy^2 + 8 = 0$
 $-16cy^2 + 57cy + 16cy^2 - 68cy + 8y - 68cy - 16cy^2 + 8$

2585
 $58 - 16cy$
 $4(-58 - 16cy) + 8y + (-58 - 16cy) + 8 = 0$
 $-232 - 68cy + 8y - 58y - 16cy^2 + 8 = 0$
 1

56.82
 908
 1404
 $2\sqrt{14.41 \cdot 2}$
 7.41
 $4\sqrt{7.41}$

$X - 2$
 $X_1 - Y_2 = 3$

$57.57 - 32.56$
 24
 57.57
 32.56

$57.57 - 32.56$
 24

$AD + BC = AB + CD + 24$

$4x + 8y + 8 = 0$
 $4(-58 - 16cy) + 8y + (-58 - 16cy) + 8 = 0$
 $-232 - 68cy + 8y - 58y - 16cy^2 + 8 = 0$

	A	Q	Z	Y	t	np.
					21 грей	x
				y+1	21 грей	x+2
				y+2	15	x+6

$$\sqrt{x-1} = |ax-2a|$$

$$x-1 = (ax-2a)^2$$

$$x-1 = a^2x^2 - 4a^2x + 4a^2$$

$$a^2(x^2 - 4x + 4)$$

$$a^2(x-2)^2 = x-1$$

$$a^2x^2 - 4a^2x + 4a^2 = x-1$$

$$x \cdot y \cdot 28 = z$$

$$(y+1)(x+2) \cdot 21 = z$$

$$(y+2)(x+6) \cdot 15 = z$$

$$28xy = z$$

$$21(y+1)(x+2) = z$$

$$15(y+2)(x+6) = z$$

$$28xy = 21y + 21x + 21xy + 42$$

$$21y + 21x - 7xy + 42 = 0$$

$$15xy$$

$$42y + 21x - 7xy + 42 = 0$$

$$\frac{z}{28x} = \frac{z}{21(x+2)}$$

$$\frac{z}{28x} + 1 = \frac{z}{21(x+2)}$$

$$28xy = 215 \quad x+2 \quad z \quad 28x$$

$$42y + 21x + 21xy + 42 = z$$

$$90y + 30x + 15xy + 180 = z$$

$$xy \cdot 28 = 280$$

$$xy = 10$$

$$(y+1)(x+2) \cdot 21 = 280$$

$$90y + 30x + 6 = 280$$

$$= 4$$

$$42y + 21x - 7xy + 42 = 0$$

$$90y + 30x - 15xy + 180 = 0$$

$$90y + 9x - 6xy + 138 = 0$$

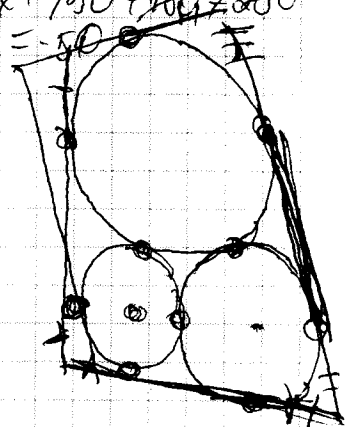
$$90y + 30x = 4$$

$$90y + 30x + 150 + 180 = 280$$

$$= 50$$

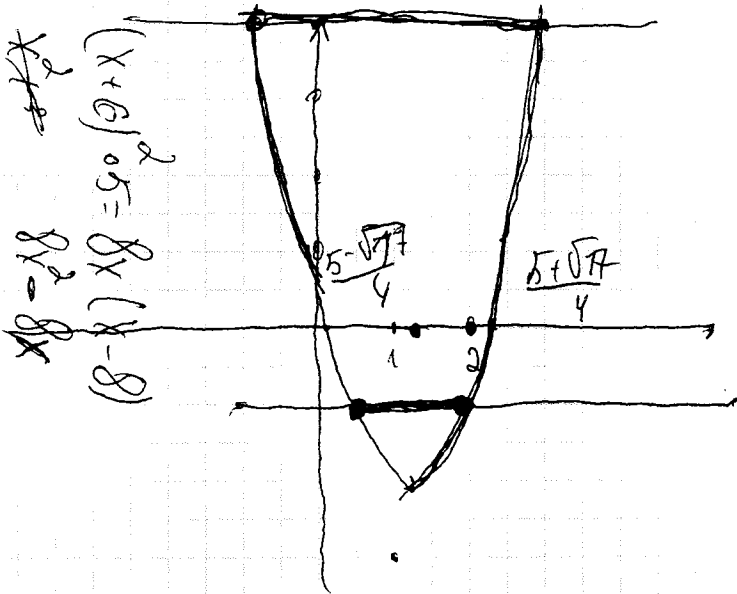
$$90y = 12x - 13xy + 48 = 0$$

$$48y + 9x - 6xy + 138 = 0$$



$(10a^2+1)^2 - (10a^2+10y \cdot a^2)$
 $10a^4+8a^2+1 = 16a^2+4a^2 = (10a^2+1)$
 $a^2x^2 - x(10a^2+1) + x(10a^2+1)$
 $a^2x^2 + (10a^2+1) \cdot (1-x) = 0$
 $10a^2 - 500$
 $50y$
 480
 $21 \cdot 24$
 210
 $22 \cdot 22$
 22
 400

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$2x^2 - 5x + 1 = 0$
 $D = 25 - 8 = 17$
 $\frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$
 $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{4}$
 $y_0 = \frac{-d}{4a} = \frac{-17}{8}$

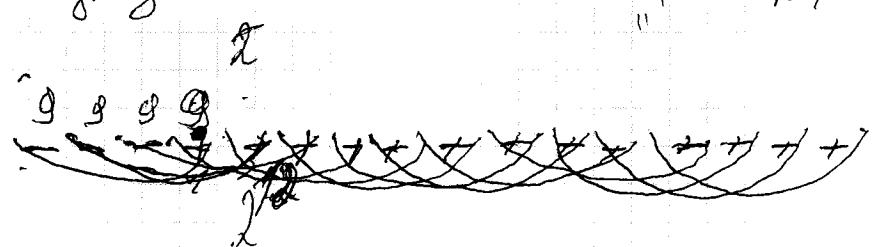
$2x^2 - 5x + 1 = -1$
 $2x^2 - 5x + 2 = 0$
 $25 - 16 = 9$
 $x_1 = \frac{5+3}{4} = 2$
 $x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$
 $l_1 = \frac{3}{2}$
 $l_2 = \frac{7}{2} \text{ см}$
 $\frac{4g}{4} = \frac{g}{4}$
 $\frac{4g}{4} = \frac{17+8g}{4}$
 $17+8g = 4g$
 $g = \frac{4g}{4} = \frac{17+8g}{4}$
 $58 = 17+8g$
 $41 = 8g$
 $g = \frac{41}{8}$

$2x^2 - 5x + 1 = 0$
 $2x^2 - 5x + 1 - 9 = 0$
 $D = 25 - 4(1-9) = 25 - 4(-8) = 25 + 32 = 57$
 $x_1 = \frac{5 + \sqrt{57}}{4}$
 $x_2 = \frac{5 - \sqrt{57}}{4}$
 $l_1 = 1,5$
 $l_2 = 3,5$
 $l_3 = \frac{5 + \sqrt{17+8g}}{4}$
 $l_3 = \frac{5 + \sqrt{17+8g} - (5 - \sqrt{17+8g})}{2} = \frac{\sqrt{17+8g}}{2}$

16 зам. чисел
3, 4, 9
1096
250 + 24
274
1096
274
1096
250 + 24
274

$$-6y + 12x - 96 = 4y$$

$$12x - 4y - 6y - 96 = 0$$



$$12 - \frac{y}{x} - \frac{6y}{x} - \frac{96}{x}$$

$$12x - 4y - 6y = 96$$

$$48y + 9x - 6xy = -138$$

$$21x - 7xy + 42y = -42$$

$$96x - 8xy - 48y = 968$$

$$48y + 9x - 6xy = -138$$

$$105x - 14xy = 768$$

1 зам

$$\frac{15}{28}$$

$$2^5 = 32$$

6 = 64
7 = 128
8 = 256
9 = 512
10 = 1024
11 = 2048
12 = 4096

$$28xy = z$$

$$42y + 21x + 21xy + 42 = z$$

$$90y + 30x + 15xy + 180 = z$$

$$7 \cdot 4 \cdot x \cdot y = z$$

$$7 \cdot 3 \cdot 2y + 3 \cdot 7x + 3 \cdot 7 + 7 \cdot 6 = z$$

$$42y + 21x + \frac{3}{4}z + 42 = z$$

$$42y + 21x + 42 = \frac{z}{4}$$

$$168y + 84x + 168 = z$$

860 960
730 768
40940 + (3 \cdot 4094)
12000
+ 9403
270
+ 12

$$105x - \frac{z}{2} = 768$$

$$z = 210x - 768 \cdot 2$$

$$90y + 30x + \frac{15}{28}z + 180 = z$$

$$90y + 30x + 180 = \frac{13}{28}z$$

$$42y + 21x + 42 = \frac{z}{4}$$

$$3x^2 - 8x + 180 = \frac{z}{4}$$

$$3x^2 - 8x - 180 = \frac{z}{4}$$

$$3x^2 - 8x + 180 - 6y + 12x - 96 = \frac{z}{28}$$

(7/28)