

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 3

ШИФР

14-014

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2 - 5x + 1$ пересекает прямые $y = -1$, $y = 4$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Найдите количество 16-значных чисел, содержащих только цифры “3”, “4” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “9” ровно четыре, и они идут подряд.
3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 24$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 2a| \leq \sqrt{x - 1}$ является отрезок длины 3?
5. Несколько рабочих выполняют работу за 28 дней. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 21 день. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 15 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 7 : 3$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $7 : 36$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 3.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 30]$, $[31; 60]$, $[61; 90]$, $[91; 120]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 30. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $y = 2x^2 - 5x + 1$. Найдём вершину: $y'(x) = 4x - 5 = 0$.
 $x = 1,25$
 $y = 3,125 - 6,25 + 1 = -2,125$
 \checkmark
 $a > -2,125$

1) $2x^2 - 5x + 1 = -1$;

$2x^2 - 5x + 2 = 0$;

$x_1 = 0,5$

$x_2 = 2$

Длина первого отрезка:

$a = x_2 - x_1 = 1,5$.

3) По т-ме Пифагора:

$$\begin{cases} b^2 = a^2 + c^2 \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

2) $2x^2 - 5x - 3 = 0$.

$D = 25 + 24$

$x_1 = -0,5$

$x_2 = 3$

Длина второго отрезка:

$b = x_2 - x_1 = 3,5$.

4) $2x^2 - 5x + 1 - a = 0$.

$D = 17 + 8a$.

$x_1 = \frac{5 - \sqrt{17 + 8a}}{4}$

$x_2 = \frac{5 + \sqrt{17 + 8a}}{4}$

Длина третьего отрезка:

$c = x_2 - x_1 = 0,5 \sqrt{17 + 8a}$.

$$\begin{cases} 12,25 = 2,25 + \frac{17}{4} + 2a \\ \frac{17}{4} + 2a = 12,25 + 2,25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{23}{8} \\ a = \frac{41}{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2,875 \\ a = 5,125 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} a = 2,875 \\ a = 5,125 \end{cases}$.

5. План:

$$T_1 = 28 \text{ зн.}$$

$$T_2 = 21 \text{ зн.}$$

$$T_3 = 15 \text{ зн.}$$

$n = ?$

Решение

Пусть на-во работ, выполненной одним рабочим за один час, равна γ , а количество часов работы в день $= t$, тогда:

$$\begin{cases} T_1 t \cdot \gamma \cdot n = 1, \\ T_2 (t+1) \gamma (n+2) = 1, \\ T_3 (t+2) \gamma (n+6) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 28 t \cdot \gamma \cdot n = 1, \\ 21 (t+1) \cdot \gamma (n+2) = 1, \\ 15 (t+2) \gamma (n+6) = 1; \end{cases}$$

$$3(t+1)(n+2) = 4tn$$

$$3tn + 3n + 6t + 6 = 4tn;$$

$$t(3n - 6) = 3(n+2);$$

$$t = \frac{3(n+2)}{n-6}.$$

$$15 \left(\frac{3n+6+2n-12}{n-6} \right) (n+6) = 28 n \cdot \frac{1}{n-6}$$

$$25n^2 + 120n - 180 = 28n^2 + 56n;$$

$$3n^2 - 64n + 180 = 0.$$

$$D_1 = 1024 - 4 \cdot 90 = 484.$$

$$n_1 = \frac{32 + 22}{3} = 18 \text{ (рабочих)}.$$

n_2 не подходит, и.к. $t > 0$, а при $n = n_2, t < 0$.

Ответ: 18.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4. |ax - 2a| \leq \sqrt{x-1}; \quad \text{обл: } x \geq 1; \quad k = 3.$$

$$\Leftrightarrow a^2 x^2 - 4axa^2 + 4a^2 \leq x-1,$$

$$a^2 x^2 - x(4a^2 + 1) + 4a^2 + 1 \leq 0.$$

$$D = 4a^2 + 1.$$

$$x_1 = \frac{4a^2 + 1 - \sqrt{4a^2 + 1}}{2a^2}$$

$$a \neq 0.$$

$$x_2 = \frac{4a^2 + 1 + \sqrt{4a^2 + 1}}{2a^2}$$

$$x \in \left[\frac{4a^2 + 1 - \sqrt{4a^2 + 1}}{2a^2}; \frac{4a^2 + 1 + \sqrt{4a^2 + 1}}{2a^2} \right]$$

$$l = \frac{4a^2 + 1 + \sqrt{4a^2 + 1}}{2a^2} - \frac{4a^2 + 1 - \sqrt{4a^2 + 1}}{2a^2}.$$

$$\frac{\sqrt{4a^2 + 1}}{2a^2} = l \Leftrightarrow l^2 = \frac{4a^2 + 1}{a^4}.$$

$$l^2 a^4 - 4a^2 - 1 = 0;$$

$$a^2 = k; \quad k \geq 0.$$

$$9k^2 - 4k - 1 = 0.$$

$$D_1 = 16 + 36 = 52 = 4 \cdot 13$$

$$k = \frac{2 + \sqrt{13}}{9}$$

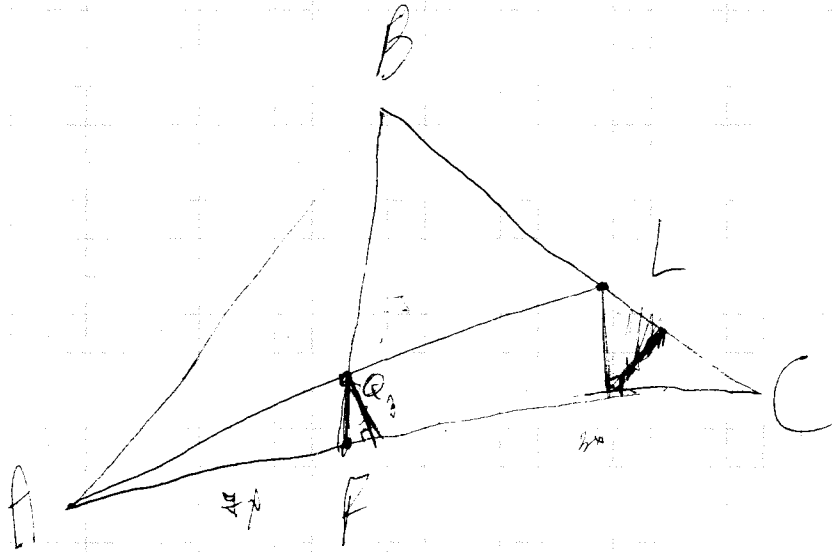
$$a = \pm \sqrt{\frac{2 + \sqrt{13}}{9}}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} a = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{13}}{9}} \\ a = -\sqrt{\frac{2 + \sqrt{13}}{9}} \end{cases}$$

7. ~~С~~ ~~max~~ ~~0424~~

1. ~~справочник~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$x - y \neq 30$$

$$x - y \neq 60$$

$$x - y \neq 90$$

$$x - y \neq 120$$

$$4x = 80$$

239

118

357

17

404

120

854

480

190

1424

- 120 119 118 (117) (116) (115)
- (87) (88) (89) (80) (79)
- (48) (47) (46) (45) (44) (43)
- (12) (11) (10) (9) (8) (7)

от 30 до 120.

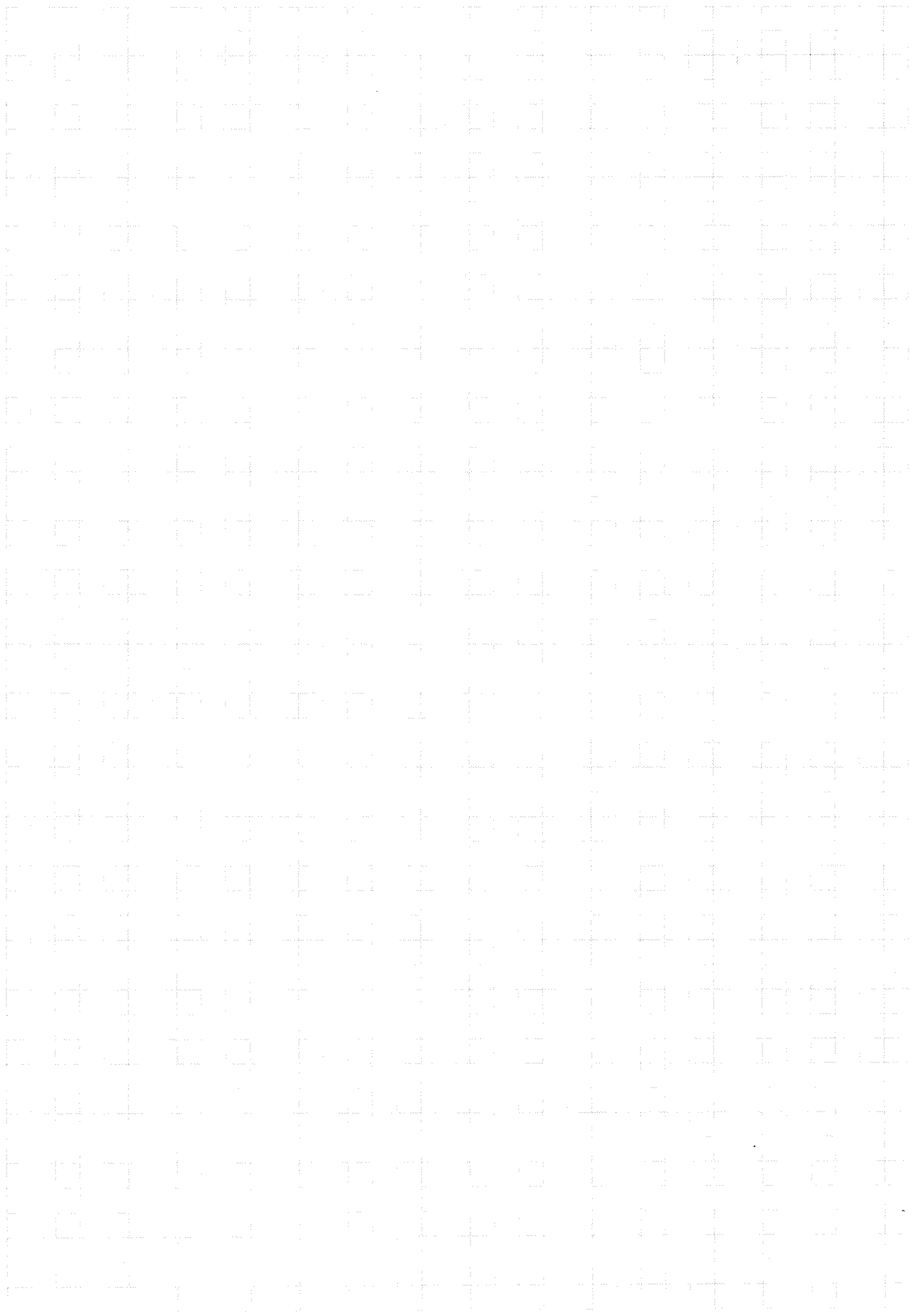
$$90 + 90 + 90 + 90 + 90 +$$

$$+ 60 + 130 + 160 + 160 + 160 +$$

$$+ 404$$

480

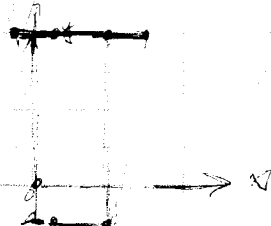
$$854 + 480 + 190 = 1424$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

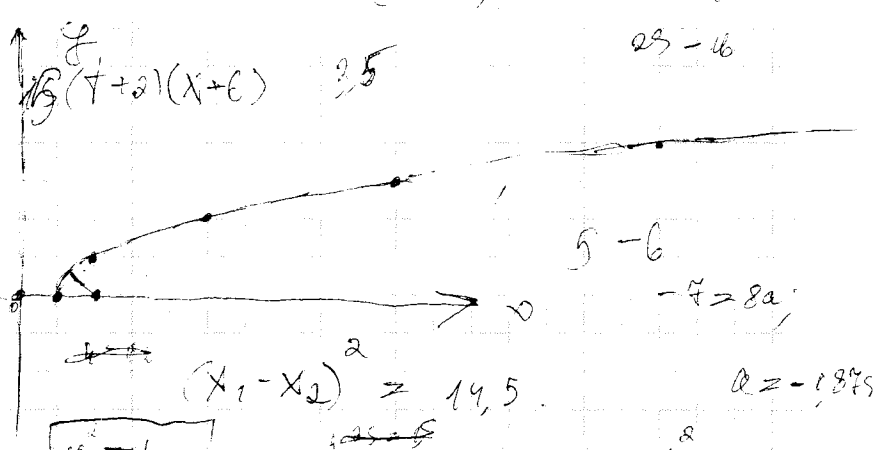


$20 \cdot t \cdot \mu \cdot X = 1$
 $21(t+1)\mu(X+2) = 1$
 μ - произв. раб. в
 T - время $4X - 9 = 0$
 $X = 2,25$
 t - раб. время
 $15 \cdot \mu (t+2)(X+2) = 1$

$2X^2 - 9X + 2 = 0$
 $D = 81 - 16 = 65$
 $X_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{65}}{4}$
 $X_1 = 2$
 $X_2 = 0,5$

$2X^2 - 9X + 3 = 0$
 $D = 81 - 24 = 57$
 $X_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{4}$
 $2X^2 - 5X + 4 - 2a = 0$
 $D = 25 - 8 + 8a = 17 + 8a$
 $X_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17 + 8a}}{4}$
 $X_1 = 2$
 $X_2 = -0,5$

$2X^2 - 5X + 1 = 0$
 $2X^2 - 9X + 1 - a = 0$
 $D = 81 - 8 + 8a = 73 + 8a$



$\frac{5 \pm \sqrt{17 + 8a}}{4}$
 $\frac{5 + \sqrt{17 + 8a}}{4} - \frac{5 - \sqrt{17 + 8a}}{4} = 2,25$
 $\sqrt{17 + 8a} = 14,5$
 $17 + 8a = 210,25$
 $8a = 193,25$
 $a = 24,156$

$(X_1 - X_2)^2 = 14,5$
 $(\frac{5 + \sqrt{17 + 8a}}{4} - \frac{5 - \sqrt{17 + 8a}}{4})^2 = 14,5$
 $\sqrt{17 + 8a} = 14,5$
 $17 + 8a = 210,25$
 $8a = 193,25$
 $a = 24,156$

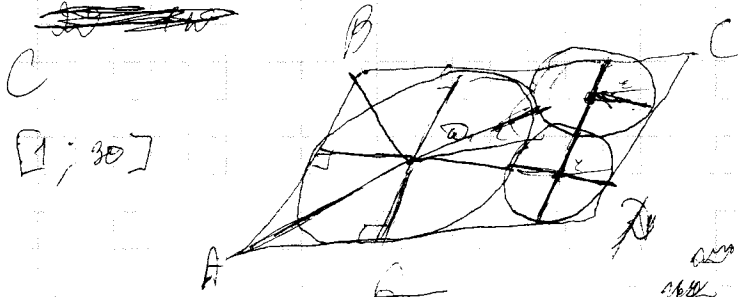
$a = \frac{5}{16}$
 $D = 25 - 20 = 5$
 $X_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{4}$
 $\frac{5 - \sqrt{5}}{4} \leq X \leq \frac{5 + \sqrt{5}}{4}$

0,3125

XXXX9999 XXXX XXXX

120 89 8887

$$AD + BC - AB - CD = 24$$



[1; 30]

87 86

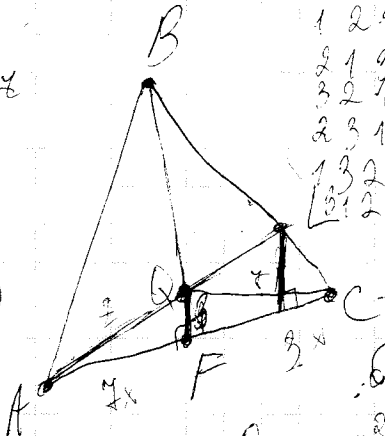
$$C_1^{p_2} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

111
222
212
221
112
121
122

2 119 118 117 116 115

1 2 3
2 1 3
3 2 1
2 3 1
1 3 2
3 1 2

$$\frac{S_{\text{BOC}}}{S_{\text{ABC}}} = \frac{4}{36}$$



$$x^2 + 1 = 1$$
$$(x+2) + t_2 = 1$$

2 2 2
1 1 1
1 2 1
2 1 1
1 2 2
2 1 2
1 2 2

$$0.3(x-2) \leq x-1$$

$$0.09x^2 - 0.36x + 0.36 \leq x - 1$$

$$169(x^2 - 4x + 4) \leq x - 1$$

$$13x^2 \leq x + 1$$

$$1ax \leq \sqrt{x+1}$$

$$a^2x^2 - x - 1 \leq 0$$

$$D = 1 + 4a^2$$

$$1 \pm \sqrt{1+4a^2}$$

$$\frac{1 + \sqrt{4a^2 + 1}}{2a} - \frac{1 - \sqrt{4a^2 + 1}}{2a}$$

$$\frac{\sqrt{4a^2 + 1}}{a} = 3$$

$$3a = \sqrt{4a^2 + 1}$$

$$\frac{10}{16} \leq 2ca \leq 10$$

$$\frac{2}{3} = 0.625$$

$$3a^2 - 1 \geq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f(t)x + x + 2t + 2 = 5(t + x + 2x + 6t + 12)$$

$$2tx - 3x - 16t - 46 = 0$$

$$2tx - 3x - 16t = 46$$

$$x = \frac{46 + 16t}{2t - 3}$$

$$28tx = 2^3(t+1)(x+2)$$

$$4tx = 3(t+x+2)$$

$$4x = 6t + 3x + 6$$

$$28tx = 10tx + 30x + 90t + 180$$

$$28tx = 15tx + 30x + 90t + 180, \quad t = 9$$

$$13tx = 30x + 90t + 180$$

$$\frac{13(16t + 46t)}{2t - 3} = \frac{30(16t + 46)}{2t - 3} = 90t + 180$$

$$t = \frac{3(x+2)}{x-6}$$

$$\frac{x-20}{12x-1}$$

$$x^2 - 36$$

$$13(16t^2 + 46t) = 30(16t + 46) + 130t^2 - 970t + 960t - 540$$

$$28t^2 + 598t = 180t + 1380 + 90t - 540$$

$$28t^2 + 28t - 840 = 0$$

$$27tx = 30x - 90t - 180 = 0$$

$$t = \frac{180 - 30x}{27x}$$

$$t(13x - 90) = \frac{180 - 30x}{27x}$$

$$14^2 + 14 - 12$$

$$14^2 - 43$$

$$6 \cdot 14 = 84$$

$$2 \cdot 14 = 28$$

$$(12x - 90)(x + 2) = 10(6 + x)(x + 6)$$

$$2$$

$$\frac{-14 + 14 \pm \sqrt{13}}{28}$$

$$3x - 64x + 180 = 0$$

$$3x = 64x - 180$$

$$= 584$$

$$3 \quad 7tx + 7x + 14t + 14 = 5tx + 16x + 30t + 60$$

$$2tx - 3x - 16t - 46 = 0$$

$$x = \frac{54}{3} = 18$$

$$\frac{2(x+2)}{x-6} - 3x - \frac{48(x+2)}{x-6} - 46 = 0$$

$$2x^2 + 12x - 3x^2 + 18x - 48x - 96 - 46x + 276 = 0$$

$$3x^2 - 18x - 46x + 180$$

$$3x^2 + 26x - 90x$$

$$1x - 64x - 180 = 30x - 180$$

α - производительность вч одного.

t - время
 T - время.

$\frac{40}{4} = \frac{17}{4}$

X - кол-во рабочих $\frac{23}{8}$

$$\begin{cases} 28x^2 + 3x = 1 \\ 21(x+2)\alpha(t+1) = 1 \\ 5(x+6)\alpha(t+2) = 1 \end{cases}$$

$26+17$
 $\frac{63}{4} = \sqrt{358} \cdot \frac{28}{4}$

$\alpha = \frac{1}{28xt}$

$28xt = 3tx + 6t + 3x + 6$
 $(5x-6)(t+6) \geq 1$

$tx = 6t = 3x + 6$; $\frac{(x+2)(t+1)}{xt} = \frac{4}{3}$

$t = 5$

$x = 18$

$5x-6$

$21 \cdot 20 \cdot 6 = 25 \cdot 24 \cdot 8 = 1$

$4x-5=0$

$x = 1,25$

$\frac{17}{4} + 2a = 12$

$\frac{15(x+6)(5x-6)}{28x \cdot 3(t+1)} = 1$

$\frac{125}{625}$
 $\frac{250}{125}$
 $\frac{15625}{15625}$

$28xt = k$

$21(x+2)(t+1) = k$

$5(x+6)(t+2) = k$

$125 - 625 + 1$

$-2, 125$

$\frac{3(x+2)(t+1)}{xt} = ?$
 $\frac{40}{4} = \frac{17}{4}$

$a = \frac{41}{8} = 5,125$

$4xt = 3tx + 6t + 3x + 6$

$5(x+6) \left(\frac{3x+6+2t-12}{x-6} \right) = \frac{5(x+2)}{x-6}$

$t = \frac{3(x+2)}{x-6} \cdot 5(x+6) \frac{(5x-6)}{x-6} = 28x^2 + 54x$

$5(5x^2 + 24x - 36) = 28x^2 + 54x$
 $5x^2 - 6x + 30x - 36 = 28x^2 + 54x$
 $25x^2 + 120x - 180 = 28x^2 + 54x$

$\frac{5(x+6)(5x-6)}{28x(x+2)} = 1$

$28x^2 + 54x = 25x^2 + 120x - 180$

$3x^2 - 66x + 180 = 0$

$\frac{6+2x}{x-6} \cdot x^2 - 22x + 60 = 0$

$5x^2 + 30x - 6 = 0$

$5x^2 + 24x - 36 = 0$

$4xt = 3(xt + 2t + xt)$
 $x^2 - 6t - 3x = 0$

$t(x-6) = 3x$

$t = \frac{3x}{x-6}$

$t = \frac{6+3x}{x-6} \quad x = \frac{6(t+1)}{t-3}$

$7(xt + 2t + xt) = 5(xt + 6t + 2x + 12)$

$2xt - 14t - 3x - 46 = 0$

$\frac{12(t+1)t}{t-3} - 14t - \frac{12(t+1)}{t-3} - 46 = 0$

$12t^2 + 12t - 14t^2 + 42t - 12t - 12 - 46t + 138 = 0$

$-2t^2 - 12t + 120 = 0$

$t^2 + 6t - 60 = 0$

$tx - 6t = 3x + 6$

$t = \frac{3(x+2)}{x-6}$