МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 4 ШИФР 5-005

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 3x^2 - 4x + 2$ пересекает прямые $y = 17$, $y = 1$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?

2. Найдите количество 20-значных чисел, содержащих только цифры "1", "5" и "6" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно десять, и они идут подряд.

3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 38$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - a| \leqslant \sqrt{x-2}$ является отрезок длины 1?

5. Несколько рабочих выполняют работу за 21 день. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 15 дней. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 10 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 7$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $8 : 21$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 13.

7. Пиноккио выбрал по 7 целых чисел из каждого промежутка $[1; 50]$, $[51; 100]$, $[101; 150]$, $[151; 200]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 50. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати восьми выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-005 ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Пусть x – количество рабочих, а y – количество рабочих часов. Тогда имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 21x\cdot y = t \quad (1) \\ 15(x+2)(y+1) = t \quad (2) \\ 10(x+6)(y+2) = t \quad (3) \end{cases}$$

где t – некоторая работа, $x, y \in \mathbb{N}$.

Вычитая из уравнения (1) уравнение (2), из уравнения (2) уравнение (3), и из уравнения (1) уравнение (3) получаем новую систему уравнений:

$$\begin{cases} \cancel{21xy} = 6xy = 15x + 30y + 30 \quad (4) \\ 5xy = 5x + 30y + 90 \quad (5) \\ 11xy = 20x + 60y + 120 \quad (6) \end{cases}$$

где $x, y \in \mathbb{N}$.

Вычитая из уравнения (4) уравнение (5) имеем

$xy = 10x - 60$,

$x(y-10) = -60$.

Заметим, что так как $x, y \in \mathbb{N}$, то каждый из этих множителей – целое число. Также заметим, что $y < 10$, так как $x > 0$. Рассмотрим все пары множителей, произведение которых 60, а также которые удовлетворяют условию:

1) $x = 60$ $y - 10 = -1$, откуда $x = 60$, $y = 9$. Подставляя в (1) получаем $t_1 = 21\cdot 60\cdot 9 = 2^2\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7$, а подставляя в (2) получаем $t_2 = 2^2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 31$. Заметим, что $t_1 \neq t_2$, что противоречит условию. Следовательно, данный случай нам не подходит.

2) $x=30$, $y-10=2$, откуда $y=8$. Подставляя в (1) получаем $b_1=30\cdot21\cdot8=$
$=2^4\cdot3^2\cdot5\cdot7$. Подставляя в (2) получаем $b_2=15\cdot32\cdot9=2^5\cdot3^3\cdot5$. Заметим, что $b_1\neq b_2$, что противоречит условию.

3) $x=20$, $y-10=-3$, откуда $y=7$. Подставляя в (1) получаем $b_1=21\cdot20\cdot7=2^2\cdot3\cdot5\cdot7^2$. Подставляя в (2) получаем $b_2=2^4\cdot3\cdot5\cdot11$. Заметим, что $b_1\neq b_2$, что противоречит условию

4) $x=15$, $y-10=-4$, откуда $y=6$. Подставляя в (1) получаем $b_1=2\cdot3^3\cdot5\cdot7$. Подставляя в (2) имеем $b_2=3\cdot5\cdot7\cdot17$. Заметим, что $b_1\neq b_2$, что противоречит условию

5) $x=12$, $y-10=-5$, откуда $y=5$. Поставляя в (1) получаем $b_1=21\cdot12\cdot5=2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7$. Подставляя в (2) имеем $b_2=15\cdot14\cdot6=2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7$. Подставляя в (3) имеем $b_3=70\cdot18\cdot7=2^2\cdot3^2\cdot5\cdot7$. $b_1=b_2=b_3$, следовательно, данный случай нам подходит.

6) $x=10$, $y-10=-6$, откуда $y=4$. Подставляя в (1) имеем $b_1=21\cdot10\cdot4=2^3\cdot3\cdot5\cdot6$. Подставляя в (2) получаем $b_2=15\cdot16\cdot5=2^4\cdot3\cdot5^2$. Заметим, что $b_1\neq b_2$, что противоречит условию. Ответ: 12

№2

Заметим, что расстановок, где цифра „5" будет стоять 10 раз подряд, и ~~их будет ровно~~ где их количество будет равняться ровно 10-11 (от 1 до 10; от 2 до 11; от 3 до 12; ...; от 11 до 20). Также заметим, что после этого мы можем поставить цифру „1" 10 способами, а после этого цифру „6" 9 способами (порядок постановки сначала „1" или „6" неважен). Затем мы можем оставшиеся 8 цифр заполнить 2 цифрами - „1" или „6". Таких расстановок по правилу произведения из комбинаторики будет 2^8.

По правилу произведения из комбинаторики всего чисел, удовлетворяющих этому условию будет $11\cdot10\cdot9\cdot2^8=990\cdot253=253440$

Ответ: 253440

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

Заметим, что длина высеченного отрезка будет равняться $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2} = |x_1-x_2|$. Отметим, что скобки модуля можно будет убрать, если считать, что x_1 – ~~больший корень~~ большая координата, x_2 – меньшая.

Найдём длины высеченных отрезков при $y=17$ и $y=1$:

а) при $y=17$ имеем $17=3x^2-4x+2 \Leftrightarrow 3x^2-4x-15=0$

$D=4^2+12\cdot15=196=14^2$

$x_1=\frac{4+\sqrt{14^2}}{6}$

$x_2=\frac{4-\sqrt{14^2}}{6}$ $\Rightarrow x_1-x_2=\frac{2\sqrt{14^2}}{6}=\frac{28}{6}=4\frac{2}{3}=l_1$

б) при $y=1$ имеем $1=3x^2-4x+2 \Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0$

$D=16-12=4=2^2$

$x_1=\frac{4+\sqrt{2^2}}{6}$

$x_2=\frac{4-\sqrt{2^2}}{6}$ $\Rightarrow x_1-x_2=\frac{2\sqrt{2^2}}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}=l_2$

Заметим, что возможны два случая: 1 – l_3 (отрезок который высекает $y=a$) – гипотенуза; 2 – l_1 – гипотенуза, значит l_3 – катет. Случай, когда l_2 является гипотенузой быть не может, так как $l_2<l_1$, а гипотенуза – наибольшая из сторон. Разберём каждый из этих случаев:

1) $l_3^2=l_1^2+l_2^2$. Подставляем значения l_1 и l_2 получаем

$l_3^2=\left(4\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2$.

$l_3^2 = \frac{196}{9} + \frac{4}{9} = \frac{200}{9} \Rightarrow l_3 = \frac{10\sqrt{2}}{3}$.

При $y=a$ имеем $a = 3x^2 - 4x + 2 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 2 - a = 0$.

$D = 16 - 12(2-a) = 16 - 24 + 12a = 12a - 8 = 4(3a-2)$

$x_1 = \frac{4+2\sqrt{3a-2}}{6}$,

$x_2 = \frac{4-2\sqrt{3a-2}}{6}$.

$x_1 - x_2 = \frac{10\sqrt{2}}{3}$;

$\frac{4\sqrt{3a-2}}{6} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$;

$12\sqrt{3a-2} = 60\sqrt{2}$;

$\sqrt{3a-2} = 5\sqrt{2}$;

$3a - 2 = 50$

$3a = 52$;

$a = \frac{52}{3} = 17\frac{1}{3}$

2) $l_1^2 = l_2^2 + l_3^2$;

$l_3^2 = l_1^2 - l_2^2$;

$l_3^2 = \frac{196}{9} - \frac{4}{9} = \frac{192}{9} \Rightarrow l_3 = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

Аналогично случаю 1 имеем $x_1 = \frac{4+2\sqrt{3a-2}}{6}$, $x_2 = \frac{4-2\sqrt{3a-2}}{6}$.

$x_1 - x_2 = \frac{8\sqrt{3}}{3}$;

$\frac{4\sqrt{3a-2}}{6} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

$12\sqrt{3a-2} = 48\sqrt{3}$;

$\sqrt{3a-2} = 4\sqrt{3}$;

$3a - 2 = 48$;

$3a = 50$;

$a = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}$

Ответ: $16\frac{2}{3}$; $17\frac{1}{3}$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-005
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Заметим, что в каждом промежутке ровно 50 целых чисел (членов). Пронумеруем их по возрастанию в каждом промежутке по отдельности (1 - первый член в первом промежутке, 51 - во втором и т.д.). ~~Заметим, что 2 числа, имеющие одинаковый номер, независимо от того~~

Заметим, что разность двух чисел, имеющих одинаковый номер, независимо от того, в каком промежутке каждое число находится, кратна 50 (даже 2 числа, которые одинаковы в разности дают 0, а 0 кратен 50). Следовательно нужно брать числа, имеющие разные порядковые номера. Мы будем брать наибольшие числа в больших промежутках, так как нам нужно найти наибольшее значение:

В промежутке [151; 200] берём числа с порядковым номером от 50 до 44 включительно (200, 199 ... 194). Их сумма $= \frac{200+194}{2} \cdot 7 = 1379$

В промежутке [101; 150] берём числа с порядковым номером от 43 до 37 включительно (143, 142..., 137). Их сумма $\frac{143+137}{2} \cdot 7 = 980$

В промежутке [51; 100] берём числа с порядковыми номерами от 36 до 30 включительно (86, 85, ..., 80). Их сумма $\frac{80+86}{2} \cdot 7 = 581$

В промежутке [1; 50] берём числа с порядковым номером от 29 до 23 включительно (29, 28, ..., 23). Их сумма $\frac{29+23}{2} \cdot 7 = 182$.

Сумма всех чисел $- 1379 + 980 + 581 + 182 = 3122$

Ответ: 3122

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

S-005

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3x^2-4x-15=0$

$D=16+12\cdot 15=196=14^2$

$\frac{4+14}{6}=\frac{18}{6}$

$12=3x^2-4x+2$

$3x^2-4x-15=0$

$D=16+12\cdot 15=196=16^2$

$x_1, x_2=\frac{4\mp 14}{6}=-1\frac{2}{3}, 3$

$3+\frac{5}{3}=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$

$3x^2-4x+1=0$

$D=16-12=4=2^2$

$x_1, x_2=\frac{4\mp 2}{6}=\frac{1}{3}, 1$

$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$11\cdot 10\cdot 9\cdot 2^8$

$c^2=a^2+b^2$

$\frac{14^2}{3^2}=\frac{196}{9}=a^2+\frac{4}{9}$

$\frac{192}{9}=a^2$

$a=\frac{\sqrt{192}}{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

$2^5=32$, $2^6=64$, $2^7=128$, $2^8=256$

$D=16-12(2-a)=16-24+12a=12a-8=4(3a-2)$

$$\begin{cases}3x_1^2-4x_1+2-a=0\\3x_2^2-4x_2+2-a=0\\x_1-x_2=\frac{8\sqrt{3}}{3}\end{cases}$$

$x_1=\frac{4+\sqrt{3a-2}}{6}$

$x_2=\frac{4-\sqrt{3a-2}}{6}$

$\frac{2\sqrt{3a-2}}{6}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

$11\cdot 10\cdot 9\cdot 3^8$

$d^2=\frac{4}{9}+\frac{196}{9}=\frac{200}{9}=\frac{10\sqrt{2}}{9}=\frac{10\sqrt{2}}{3}$

$\frac{2\sqrt{3a-2}}{6}=\frac{10\sqrt{2}}{3}$

$6\sqrt{3a-2}=48\sqrt{3}$

$\sqrt{3a-2}=8\sqrt{3}$

$3a-2=64\cdot 3$

$3a-2=192$

$3a=194$

$a=\frac{194}{3}=64\frac{2}{3}$

$6\sqrt{3a-2}=60\sqrt{2}$

$\sqrt{3a-2}=10\sqrt{2}$

$3a-2=200$

$3a=202$

$a=\frac{202}{3}=67\frac{1}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$ax - a \le \sqrt{x-2}$

$a \ge 0,\ x \ge 0$

$a(x-1) \le \sqrt{x-2}$

$a^2(x-1)^2 \le x-2$

$a^2x^2 - 2a^2x + 1 \le x - 2$

$a^2x^2 - (2a^2-1)x + 3 \le 0$

$D = (2a^2-1)^2 - 12a^2 =$

$= 4a^4 - 4a^2 + 1 - 12a^2 =$

$4a^4 - 16a^2 + 1 \ge 0$

$a^2 = b \quad (2a^2+1)^2 = 4a^2+1 - 4a^2$

$4b^2 - 16b + 1 = 0$

$D = 16^2 - 4\cdot4 = 256 - 16 = 240$

$b_{1,2} = \dfrac{16 \mp 4\sqrt{15}}{8} = 2 \mp \frac{1}{2}\sqrt{15}$

x – чел. y – кол. часов

$\begin{cases} 21x\cdot y = t \\ 15(x+2)(y+1) = t \\ 10(x+6)(y+2) = t \end{cases}$

$\begin{cases} 21xy = t \\ 15xy + 15x + 30y + 30 = t \\ 10xy + 20x + 60y + 120 = t \end{cases}$

$\begin{cases} 21 x\cdot y = t \\ 15xy + x + 2y + 2 = t \\ 10xy + 2x + 6y + 12 = t \end{cases}$

$6xy = 15x + 30y + 30$

$5xy = 5x + 30y + 90$

$11xy = 20x + 60y + 120$

$xy = 10x - 60$

$xy - 10x + 60 = 0$

$x(y-10) + 60 = 0$

$x(y-10) = -60$

$-1, -2, -3, -4, -5, -6$

$y=9,\ y=8,\ y=7,\ y=6,\ y=5$

$x=30,\ x=20,\ x=15,\ x=12$

$x = 60$

$2\cdot5\cdot2\cdot3\cdot3\cdot7$

$21\cdot9\cdot60 = 11340$

$189\cdot60 - 189\cdot60$

$150\cdot62 = 75\cdot62\cdot10$

$6xy = x + 2y + 2$

$5xy - x - 4y - 10 = 0$

$9xy - 2x - 6y - 12 = 0$

$6xy = x + 2y + 2$

$5xy = x + 4y + 10$

$11xy = 2x + 6y + 12$

$xy = -2y - 8$

$xy = -(2y+8)$

$21\cdot8\cdot30 =$

$21\cdot15\cdot6$

$75\cdot22\cdot8$

$15\cdot14\cdot7$

$21\cdot12\cdot5$

$15\cdot14\cdot6$

$3\cdot7\cdot3\cdot5\cdot2\cdot3$

$27\cdot15\cdot6$

$75\cdot16\cdot5$

$21\cdot4\cdot10$

$3\cdot7\cdot2^2\cdot2\cdot5$

$3\cdot5\cdot2^4\cdot3\cdot2$

$2^3\cdot3\cdot5\cdot7$

$15\cdot32\cdot9 =$

$21\cdot y \cdot 20$

$2^2\cdot3^2\cdot5\cdot6$

1260

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

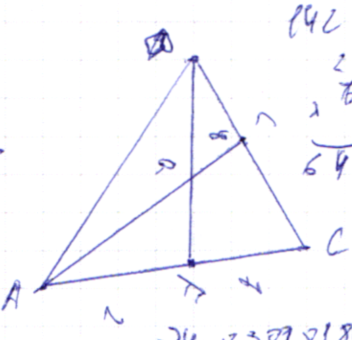
5-005

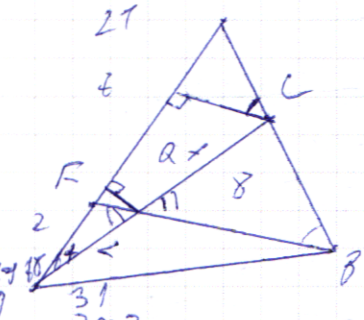
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

142 141 140 139 138 137 136 135





$142 + 24$, $135 + 71$, 277, 161

$161 \cdot 4 = 644$

$4 \cdot 277 = 1108$

$(142 + 135) \cdot 4$

$(84 + 71) \cdot 4$

84 83 82 81 80

$393 \cdot 4 = 1572$

$990 \cdot 256$: 5940, 4950, 1980, 253440

$256 \cdot 990 = 253440$

43 42 41 40 39 38 37

200 199 198 197 196 195 194 193

142 142 141 140 139 138 137

86 85 84 83 82 81 80

29 28 27 26 25 24 23

200 + 193

$36 + 29 = 65$, $65 \cdot 4 = 260$

$1572 + 1108 + 644 + 260$

36 35 34 33 32 31 30 29 2680 + 6

$(36+29)$

$2680 + 644 + 260 = 3584$

$394 \cdot 3 = 1182$

200 | 2, 100 | 2, 50 | 2, 25 | 5, 5 | 5, 1

$394 \cdot 3 + 197$

$1182 + 197 = 1379$

200 194 199–195 198–196 197

$197 \cdot 7 = 1379$

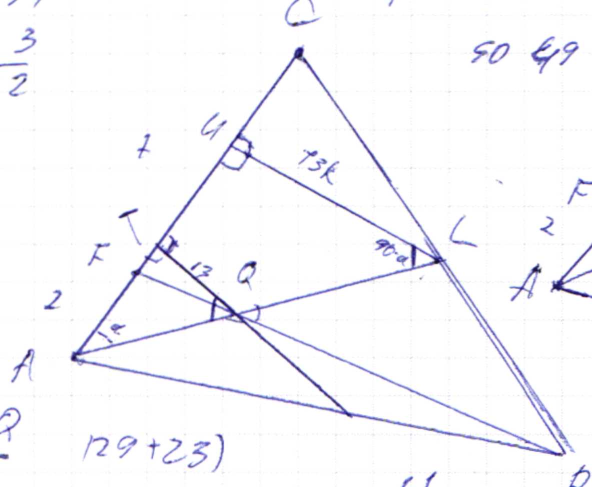
$S_{BQL} : S_{ABC} = 8 : 21$

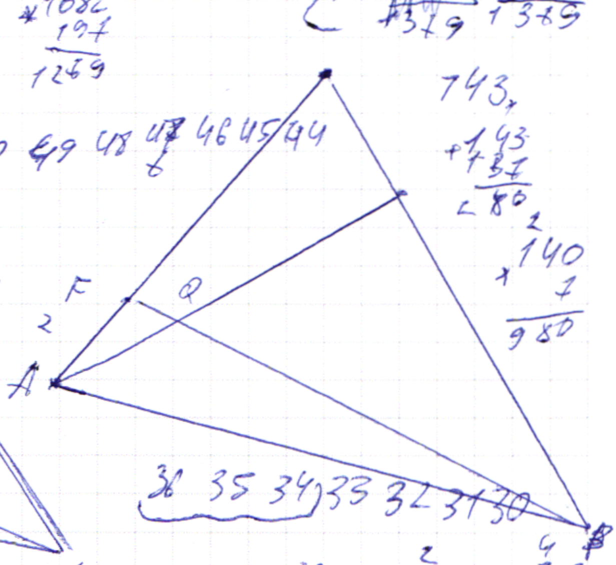
$394 \cdot 3 = 1182$

50 49 48 47 46 45 44

$143 + 137 = 280$

$140 \cdot 7 = 980$





36 35 34 33 32 31 30

$\frac{AF}{LH} = \frac{AQ}{QL}$

$(29 + 23)$

$52 \cdot 3 = 156$, $156 + 26 = 182$

$166 \cdot 3 = 498$

29 28 27 26 25 24 23

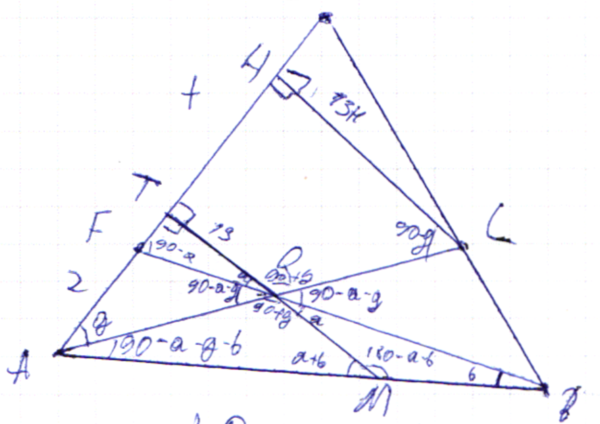
$86 + 80 = 166$

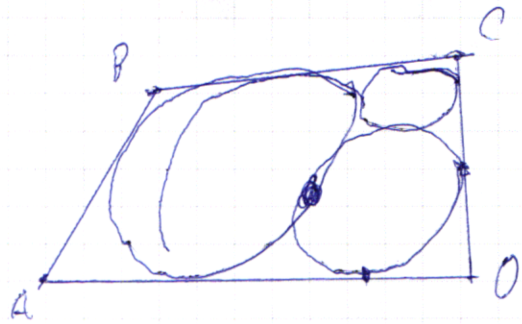
$83 \cdot 7 = 581$

$26 \cdot 7 = 182$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

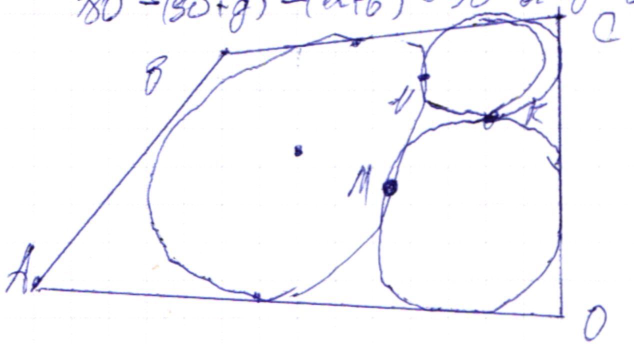
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)





$\cancel{\frac{AB}{TH}} \Rightarrow \frac{AQ}{QL}$ $\quad \cancel{AF}$ $\quad \frac{AT}{HT} = \frac{AQ}{QL}$

$180 - (90+g) - (a+b) = 90 - a - g - b$



$$\begin{array}{r} 1379 \\ +\ 980 \\ 581 \\ 182 \\ \hline 3122 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1379 \\ +\ 581 \\ \hline 1960 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1960 \\ +\ 1162 \\ \hline 3122 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 980 \\ +\ 182 \\ \hline 1162 \end{array}$$