

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 4

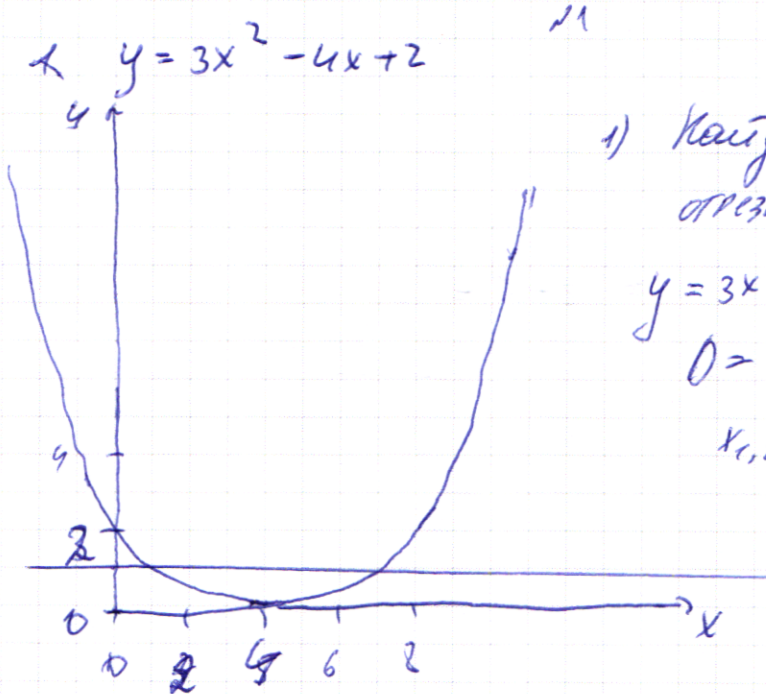
ШИФР

5-026

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 3x^2 - 4x + 2$ пересекает прямые $y = 17$, $y = 1$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Найдите количество 20-значных чисел, содержащих только цифры “1”, “5” и “6” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “5” ровно десять, и они идут подряд.
3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 38$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - a| \leq \sqrt{x - 2}$ является отрезок длины 1?
5. Несколько рабочих выполняют работу за 21 день. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 15 дней. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 10 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 7$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $8 : 21$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 13.
7. Пиноккио выбрал по 7 целых чисел из каждого промежутка $[1; 50]$, $[51; 100]$, $[101; 150]$, $[151; 200]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 50. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати восьми выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



1) Найдем длины отрезков:

$$y = 3x^2 - 4x + 2 = 1$$

$$0 = 16 - 12 = 2^2$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{6}; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

$$l_1 = x_1 - x_2 = \frac{2}{3}$$

$$y = 3x^2 - 4x + 2 = 17$$

$$3x^2 - 4x - 15 = 0$$

$$D = 16 + 180 = 196$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 14}{6}; \quad x_1 = 3; \quad x_2 = -\frac{5}{3}$$

$$l_2 = 3 + \frac{5}{3} = \frac{14}{3}$$

Из этих ~~двух~~ отрезков можно составить прямоугольный треугольник в 2 случаях:

1 - l_2 - гипотенуза

2 - l_2 - катет

Рассмотрим первый случай:

$$l_3 = \sqrt{l_2^2 - l_1^2} = \sqrt{\frac{196}{9} - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{192}{9}}$$

$$r_3 = x_3 - x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} - \left(\frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \right) = \frac{\sqrt{D}}{a}$$

$$D = r_3^2 a^2 = b^2 - 4ac$$

$$\frac{192}{9} \cdot 9 = 16 - 12c$$

$$192 - 16 = -12c$$

$$c = -14 \frac{2}{3}, \text{ тогда } a_{\text{н}} = 2 - c = \underline{\underline{16 \frac{2}{3}}}$$

1-й шаг

$$r_3 = \sqrt{r_2^2 + r_1^2} = \sqrt{\frac{200}{9}}$$

$$r_3 = \frac{\sqrt{D}}{a}$$

$$D = \frac{200}{9} \cdot 9 = 16 - 12c$$

$$184 = -12c$$

$$c = -15 \frac{1}{3}; \quad a = 17 \frac{1}{3}$$

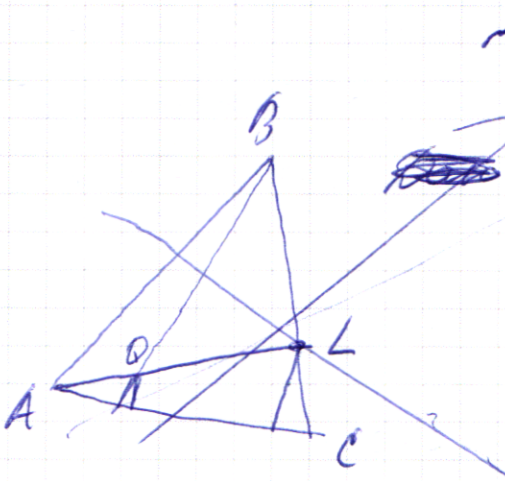
$$\text{Ответ: } \underline{\underline{16 \frac{2}{3}}}; \underline{\underline{17 \frac{1}{3}}}$$

12

Так как число 5 и используется 10 раз подряд, можно рассмотреть количество вариантов составления из "1" и "6", 14-значное число, тогда

$$N = 2^{14}; \quad \text{ответ } 2^{14}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



~~140~~
~~140~~ т.к. $\angle A O Q = \angle A K L = 90^\circ$,

$$55x^2 + 110x - 300x - 800 = 40x^2 + 240x - 200x - 1100$$

$$3x^2 + 120 = 46x$$

$$D = 46^2 - 4 \cdot 3 \cdot 120 = 26^2$$

$$x_{1,2} = \frac{46 \pm 26}{6}; \quad x_1 = \frac{20}{6}, \quad \text{это невозможно физически}$$

$$x_2 = 12; \quad \text{Ответ: } 12$$

В первом промежутке выберем максимальное число:

(50, 49, 48, 47, 46, 45, 44); Во втором выберем число так,

чтобы ~~максимальное~~ максимальное число в этом промежутке
и было равно сумме минимального в первом и 50,

т.е. (93, 92, 91, 90, 89, 88, 87). Так же и для

третьего промежутка

Найдем сумму:

$$47 \cdot 7 + 90 \cdot 7 + 138 \cdot 7 + 176 \cdot 7 = 3122$$

Ответ: 3122

Уравнение составим уравнения:

$x \cdot n = m$, где x - кол-во рабочих; n - кол-во часов;
 m - работа

$$15(x+6)(n+1) = ~~xn~~ + m$$

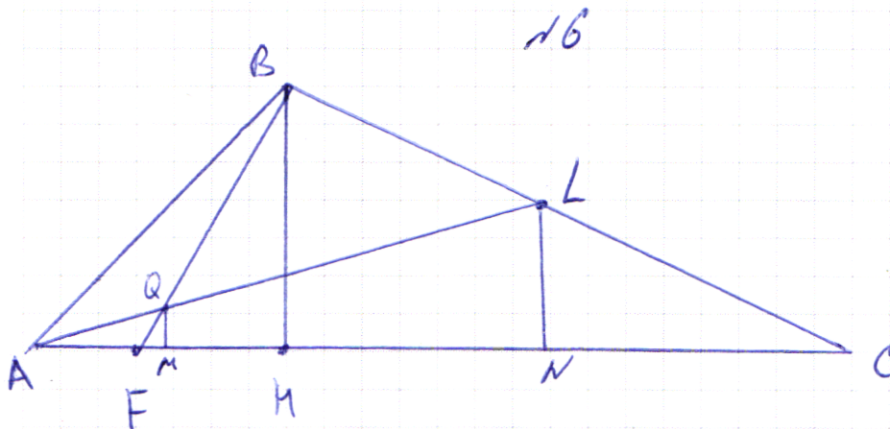
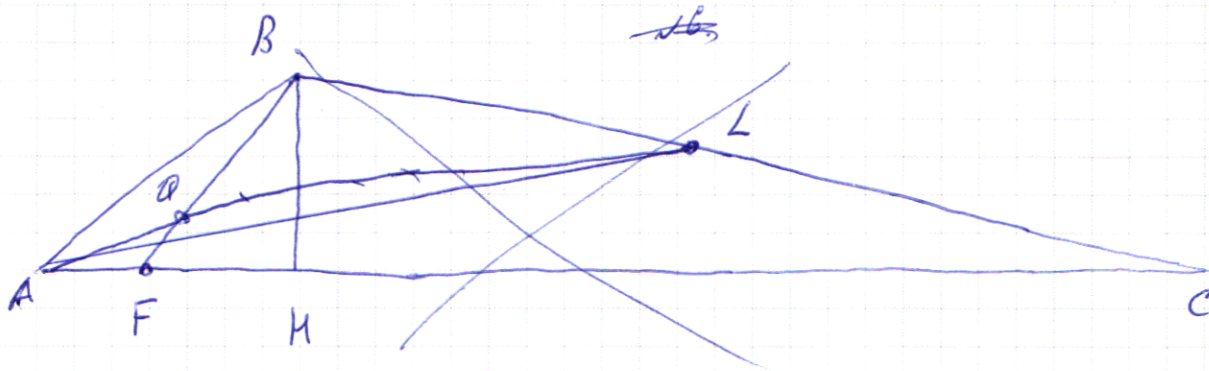
$$10(x+6)(n+2) = m$$

$$\begin{cases} 21xn = 15(x+6)(n+1) \\ 10(x+6)(n+2) = 21xn \end{cases}; \begin{cases} 10xn + 180n + 20x + 120 = xn - 21 \\ 30xn - 15 + 30n + 15x = xn - 21 \\ \cancel{60n + 20x + 120} = \cancel{141} \end{cases}$$

$$\begin{cases} n(11x - 60) = 20x + 120 \\ n(6x - 30) = 15x + 30 \end{cases}; \begin{cases} \text{разделим одно уравнение} \\ \text{на другое} \end{cases}$$

$$\frac{11x - 60}{6x - 30} = \frac{20x + 120}{15x + 30}; (11x - 60)(15x + 30) = (20x + 120)(6x - 30)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Т.к. луч выходящий из угла делит тр-ик так, что ~~на~~ отношении
их площадей обр. тр-ов равно отношению сторон, к которым
проведен луч. F, Q рассмотрим $\triangle ABC$; BM делит точку

$$\frac{AF}{FC} = \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2}{9}; \quad S_{\triangle ABF} = \frac{2}{9} S_{\triangle ABC}$$

$$S_{\triangle BQ} = \frac{8}{21} S_{\triangle ABC}, \text{ по условию, тогда}$$

$$S_{\triangle FQLC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BQ} - S_{\triangle ABF} = \frac{25}{63} S_{\triangle ABC}$$

$$\frac{LC}{BC} = \frac{S_{\triangle FLC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{S_{\triangle FLC}}{S_{\triangle FBC}} = \frac{25}{63} : \left(\frac{25}{63} + \frac{8}{21} \right) = \frac{25}{49}, \text{ так как}$$

$\triangle BFC \sim \triangle LNC$, по 3 углам

$$\frac{BK}{LN} = \frac{BC}{LC} = \frac{25}{49};$$

$$\frac{BK}{AM} = \frac{2}{9}; \quad LC = \frac{49}{25} \cdot AM \cdot \frac{2}{9} = \frac{98 \cdot 13}{225} = \frac{1276}{225}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5. \quad x \cdot n \cdot 21 = m$$

$$(x+2) \cdot (n+1) \cdot 15 = m$$

$$(x+6) \cdot (n+2) \cdot 10 = m$$

$$(x+2)(n+1) \cdot 15 = (x+6)(n+2) \cdot 10$$

$$(xn + 2n + x + 2) \cdot 15 = (xn + 6n + 2x + 12) \cdot 10$$

$$xn \cdot 3 + 6n + 3x + 6 = 2xn + 12n + 4x + 24$$

~~$$xn + 6n + x + 18 = 0$$~~

$$xn - 6n - x - 18 = 0$$

~~$$xn - 6n - x - 18$$~~

$$xn = 6n + x + 18$$

~~$$xn = 21$$~~

$$6xn = 30n + 15x + 30$$

$$11xn = 60n + 20x + 120$$

~~$$x(6n - 15) = 30n + 30$$~~

~~$$n(6x - 30) = 15x + 30$$~~

$$(x+2)(n+1) \cdot 15 = xn \cdot 21$$

$$n = \frac{15x + 30}{6x - 30}$$

$$(x+6)(n+2) \cdot 10 = xn \cdot 21$$

$$(xn + 2n + x + 2) \cdot 15 = xn \cdot 21$$

~~$$(x+6)(xn + 6n + 2x + 12) \cdot 10 = xn \cdot 21$$~~

$$15xn + 30n + 15x + 30 = xn \cdot 21$$

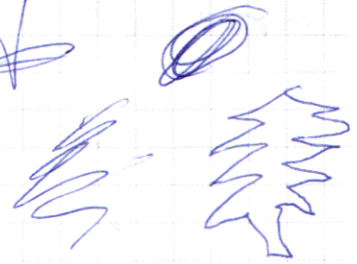
$$10xn + 60n + 20x + 120 = xn \cdot 21$$

$$\frac{14}{14} = 1$$

$$1, 2, 5, 7; 346$$



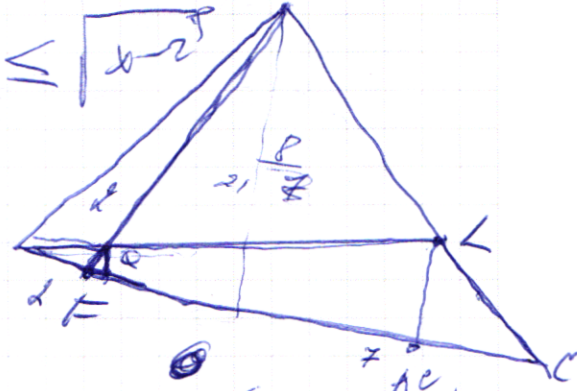
$$k = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$



$$x_1 - x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} - \left(\frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \right) = \frac{2\sqrt{D}}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{a}$$

$$D = -b^2 - 4ac; \quad |ax - a| \leq \sqrt{x-2}$$

$$b_3 = \frac{\sqrt{D}}{a}; \quad b_3^2 = \frac{D}{a^2}$$



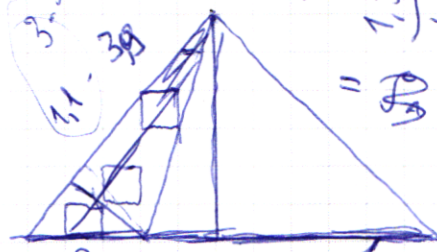
$$\frac{184}{64} = \frac{12}{n}$$

$$\frac{176}{56} = \frac{12}{3}$$

$$\frac{176}{56} = \frac{12}{3} \Rightarrow \frac{176}{56} = 3 \Rightarrow \frac{176}{56} = 3 \Rightarrow \frac{176}{56} = 3$$

$$(ax - a)^2 \leq (x - 2)$$

$$a^2 + a^2 - 2a^2 \leq -1$$



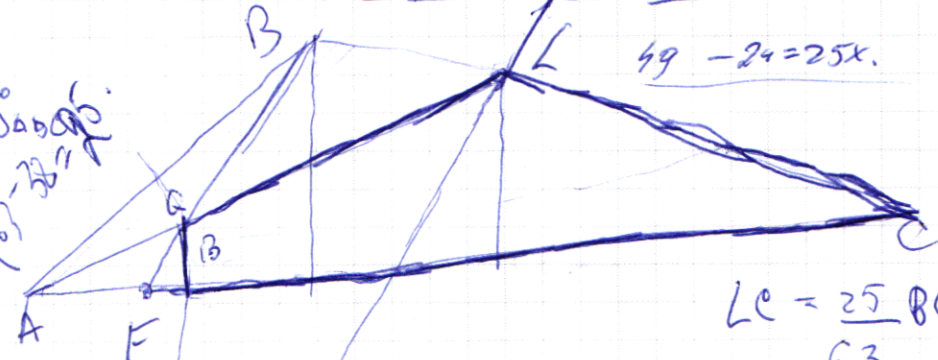
$$S_{FQLC} = S_{ABC} - S_{BDF} - S_{BLQ} = 21x - \frac{8}{5} - \frac{8}{21}$$

$$63x - 14x - 24x = 49 - 24 = 25x$$

$$S_{FQLC} = \frac{25}{63} S_{ABC}$$

$$\frac{25}{63} = \frac{25}{63}$$

$$S_{FQLC} = \frac{25}{63} \cdot 14 = \frac{350}{9}$$



$$LC = \frac{25}{63} BC$$

$$AF = FB$$

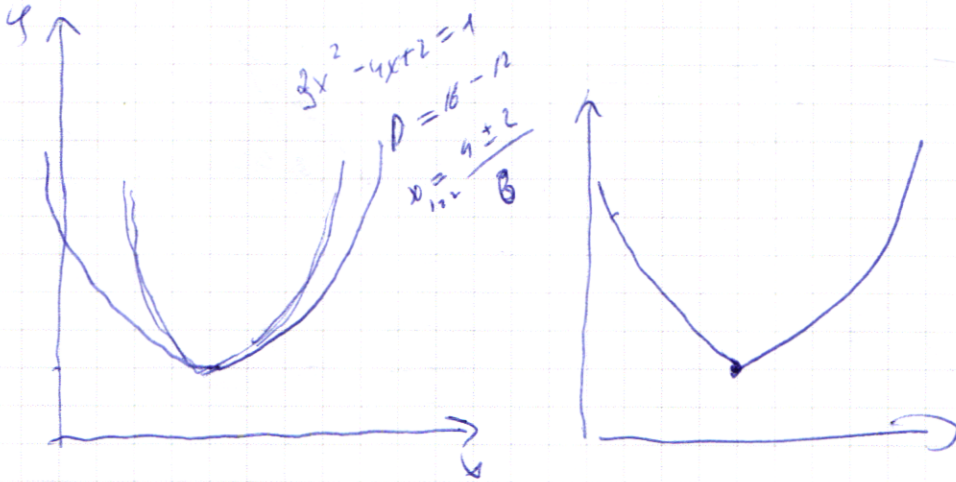
$$LK = B \cdot \frac{25}{63} = \frac{2}{9}$$

$$= \frac{13 \cdot 25}{2 \cdot 7} = \frac{325}{14} \text{ cm}$$

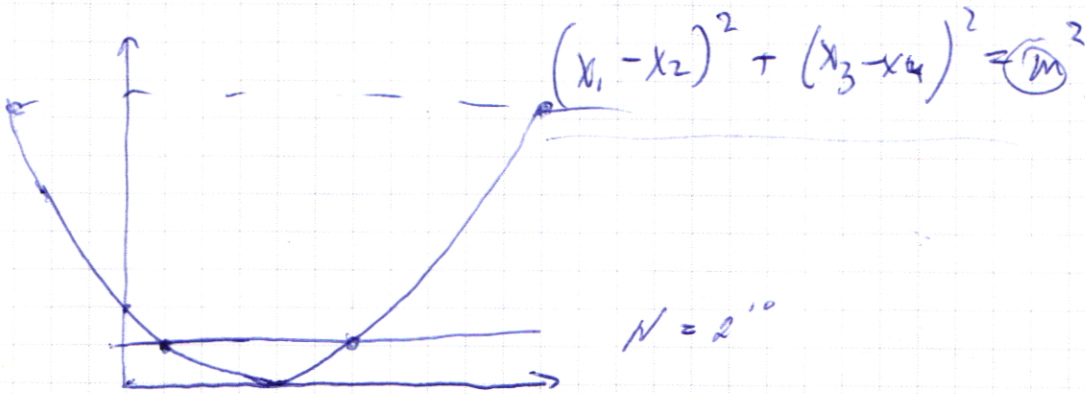
$$\frac{25}{63} + \frac{8}{21} = \frac{49}{63}$$

$$\frac{25}{49}; \quad \frac{98}{13 \cdot 2} = \frac{296}{218}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

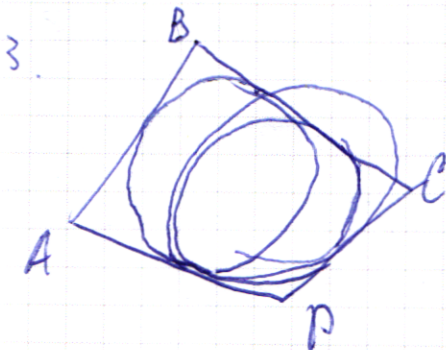


$$x_1 = 1; \quad x_2 = \frac{1}{3}$$



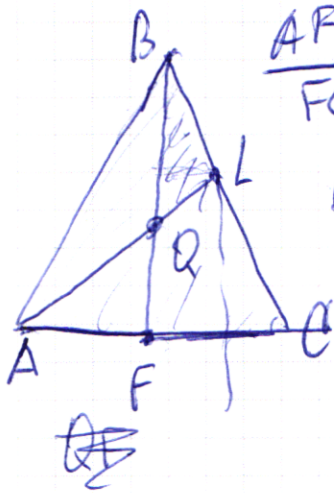
2. Кол-во точек 1, 5, 6 : ~~N = 3^{10}~~
~~2^{10}~~

из них : ~~N = N_1 - 2^{10}~~



$$|ax - a| \leq \sqrt{x-2}$$

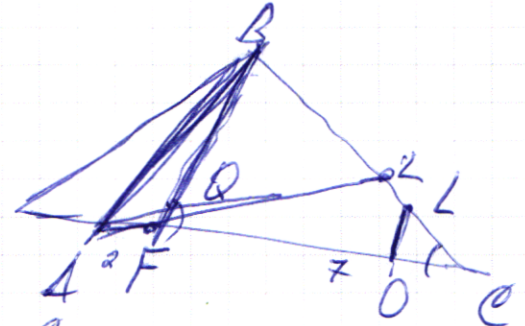
50;



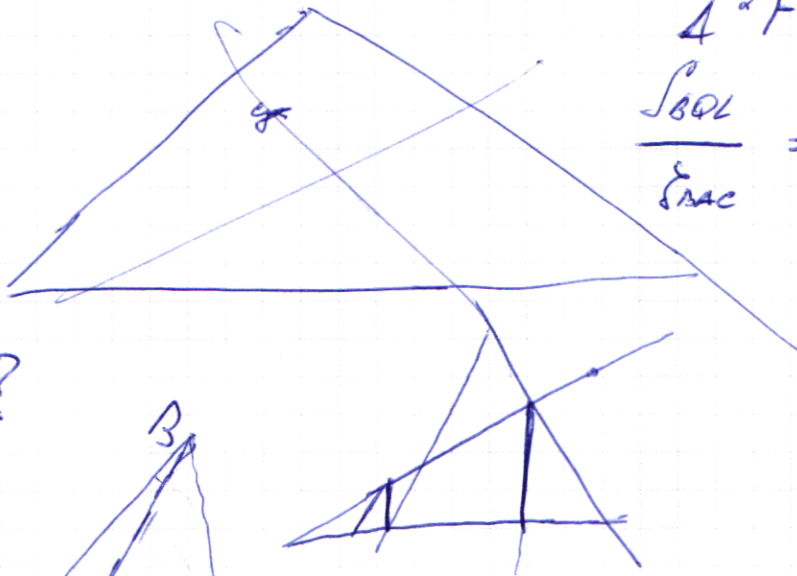
$$\frac{AF}{Fc} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{BF}{AL}$$

$$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{8}{21}$$

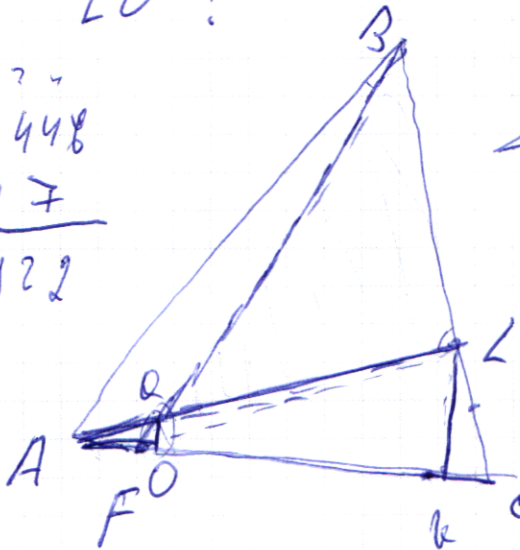


$$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{8}{21}$$



LO-?

$$\begin{array}{r} 448 \\ \times 7 \\ \hline 3122 \end{array}$$



$$\triangle AQO \sim \triangle ALK$$

$$\frac{QO}{AL} = \frac{AQ}{AL}$$

$$\begin{array}{r} 47 \\ + 50 \\ \hline 97 \\ \times 2 \\ \hline 194 \end{array}$$

$$AO : AL = \frac{AQ}{AL} = \frac{2}{5} = \frac{QO}{LK} ; LK = \frac{15 \cdot 13}{2} = \frac{195}{2}$$

$$44 + 50 = 94 ; 93^2$$

5 10 3 17 22 48 49 36 40
 4 2 p. ~ 44

100-50

99

50, 45, 48, 47, 46, 45, 44, 43

$$100 - 99 = 100 - 99 = 100 - 99$$

$$88 - 3 =$$

$$(ax - a)^2 \leq x - 2$$

$$ax^2 + a^2 - 2a^2x \leq x - 2 \quad \times \frac{14}{15}$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 15 \cdot 14 \leq 21 \cdot 14 \cdot x$$

$$a + a^2 - 2a^2 \leq -1$$

$$a - a^2 \leq -1 \quad 5(1-5) = -20$$

$$a(a - a) \leq -1 \quad a - a^2 - 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = \dots$$

$$a - a^2 + 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5; \quad a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{-2}$$

$$\cancel{x - 1} + (x + 2)(x + 1) = x(x - 2)$$

$$x^2 - 15 + 30x + 15x = x^2 - 2x$$

$$6x^2 = 30x + 15x + 30$$

$$(x + 6)(x + 2) = x(x - 2)$$

$$10x^2 + 60x + 20x + 120 = x^2 - 2x$$

$$60x + 20x + 120 = 11x^2$$

$$11x^2 - 80 = 20x + 120$$

$$11x^2 - 30 = 15x + 30$$

$$\frac{11x - 80}{6x - 30}$$

$$= \frac{20x + 120}{15x + 30}$$

$$\frac{11x - 80}{2x - 10} = \frac{20x + 120}{5x + 10}$$

$$(11x - 80)(5x + 10) = (20x + 120)(2x - 10)$$

$$55x^2 + 110x - 300x - 800 = 40x^2 + 240x - 200x - 1200$$

$$15x^2 + 800 = 230x$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 46 \\ \hline 48 \\ \hline 276 \\ \hline 2116 \\ \hline 1440 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\frac{(1 + \sqrt{D})}{2} = \frac{1 + \sqrt{2116}}{2} = \frac{1 + 46}{2} = 23.5$$

$$25; \quad x_{1,2} = \frac{46 \pm 26}{6}$$

$$3x^2 + 120 = 46x$$

$$D = 46^2 - 4 \cdot 3 \cdot 120$$

$$\left(\frac{46}{6}, \frac{20}{6}\right); \quad \frac{46 + 26}{6} = \frac{72}{6} = 12$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$h = \frac{15x + 30}{6x - 30}$$

$$11x \cdot \frac{15x + 30}{6x - 30} = 60 \cdot \frac{15x + 30}{6x - 30} + 20x + 120$$

$$11x \cdot (15x + 30) = 60 \cdot (15x + 30) + 20x(6x - 30) + 720x - 3600$$

$$165x^2 + 450x = 900x + 1800 + 120x^2 - 600x + 720x - 3600$$

$$105x^2 = 450x + 1800 - 7800$$

$$105x^2 = 570x - 1800 \quad / : 5$$

$$21x^2 = 114x - 360$$

$$7x^2 - 38x - 120 = 0$$

$$D = 38^2 + 120 \cdot 7 \cdot 4$$