МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 4

ШИФР 14-009

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 3x^2 - 4x + 2$ пересекает прямые $y = 17$, $y = 1$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?

2. Найдите количество 20-значных чисел, содержащих только цифры "1", "5" и "6" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно десять, и они идут подряд.

3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 38$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - a| \leqslant \sqrt{x - 2}$ является отрезок длины 1?

5. Несколько рабочих выполняют работу за 21 день. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 15 дней. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 10 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)

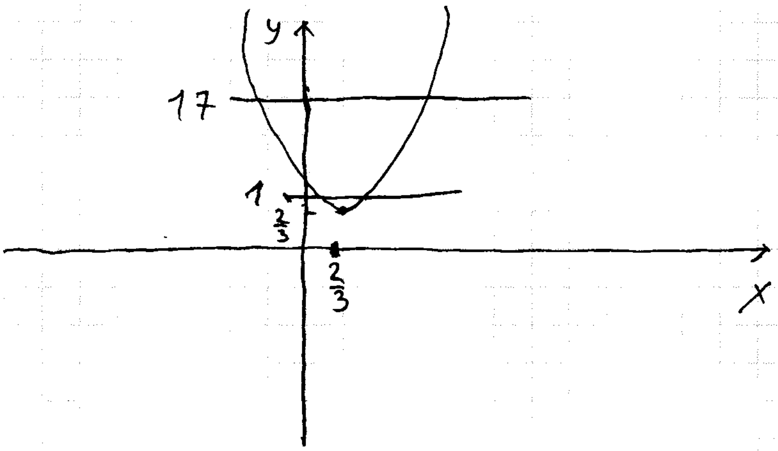
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 7$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $8 : 21$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 13.

7. Пиноккио выбрал по 7 целых чисел из каждого промежутка $[1; 50]$, $[51; 100]$, $[101; 150]$, $[151; 200]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 50. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати восьми выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} y=3x^2-4x+2\\ y=17\\ y=1\\ y=a\end{cases}$$



$x_0 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$y_0 = 3\cdot\frac{4}{9} - \frac{8}{3} + \frac{6}{3} = \frac{2}{3}$

AB - отрезок высекаемый прямой $y=1$

CD - отрезок высекаемый прямой $y=17$

KL - отрезок высекаемый прямой $y=a$

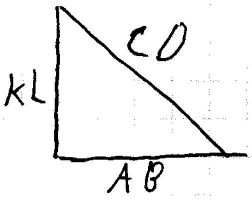
$\begin{cases} y=3x^2-4x+2\\ y=1\end{cases}$ $3x^2-4x+1=0$

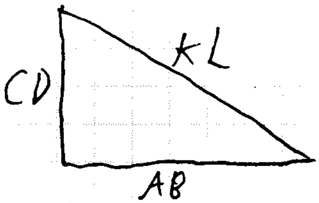
$D = 16-12=4$ $x_1 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$, $x_2 = 1$

$AB = x_2 - x_1 = 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $\begin{cases} y=3x^2-4x+2\\ y=17\end{cases}$ $3x^2-4x-15=0$,

$D = 16+180=196$ $x_3 = \frac{4-14}{6} = -\frac{5}{3}$, $x_4 = 3$

$CD = x_4 - x_3 = 3+\frac{5}{3} = \frac{14}{3}$





$KL^2+AB^2=CD^2$

$KL = \sqrt{\frac{196-4}{9}} = \sqrt{\frac{192}{9}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

$x_6 - x_5 = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

$CD^2+AB^2=KL^2$

$KL = \sqrt{\frac{196+4}{9}} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$

$x_8 - x_7 = \frac{10\sqrt{2}}{3}$

Согласно теореме Виета

$3x^2-4x+2=0$

$$\begin{cases} x_5+x_6=\frac{4}{3} \\ x_6-x_5=\frac{8\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$x_5=\frac{4}{3}-x_6$

$x_6-\frac{4}{3}+x_6=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

$2x_6=\frac{8\sqrt{3}+4}{3}$

$x_6=\frac{4\sqrt{3}+2}{3}$

$y=3x_6^2-4x_6+2$

$y=\frac{3\cdot(48+16\sqrt{3}+4)}{9}-\frac{(16\sqrt{3}+8)}{3}+2$

$y=\frac{52-8+6}{3}=\frac{50}{3}$

$3x^2-4x+2=0$

$$\begin{cases} x_7+x_8=\frac{4}{3} \\ x_8-x_7=\frac{10\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

$x_8=\frac{4}{3}-x_7$

$\frac{4}{3}-x_7-x_7=\frac{10\sqrt{2}}{3}$

$-2x_7=\frac{10\sqrt{2}-4}{3}$

~~$x_7=\frac{2-10\sqrt{2}}{3}$~~ $x_7=\frac{2-5\sqrt{2}}{3}$

$y=3x_7^2-4x_7+2$

$y=\frac{(4-20\sqrt{2}+50)}{3}-\frac{(8-20\sqrt{2})+\cancel{6}}{3}+\frac{6}{3}$

$y=\frac{54-8+6}{3}=\frac{52}{3}$

Ответ. $a=\frac{50}{3}$, $a=\frac{52}{3}$

№2 5555555555XXXXXXXXXX, X - неизвест. число

$\overset{1}{в}$ возможная пол. пятерок

~~Т~~ Все возможных положений пятерок в 20-значном числе 11

C_{10}^{1} - способов, сколько можно выбрать одну шестерку, используя 10 знаков

C_{10}^{2} - способов, сколько можно выбрать ~~одну~~ две шестерки, используя 10 знаков

...

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

C_{10}^{9} - способов, сколько можно выбрать девять шестерок используя 10 знаков

Получается $C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}$ -

$11 \cdot C_{10}^{1} \cdot C_{10}^{2} \cdot C_{10}^{3} \cdot C_{10}^{4} \cdot C_{10}^{5} \cdot C_{10}^{6} \cdot C_{10}^{7} \cdot C_{10}^{8} \cdot C_{10}^{9} =$

$= 11 \cdot 10 \cdot 45 \cdot \underset{120}{} \cdot 210 \cdot 42 \cdot 210 \cdot 120 \cdot 45 \cdot 10 =$

$= 11 \cdot 42 \cdot 10^2 \cdot 45^2 \cdot 120^2 \cdot 210^2 =$

При условии, что единица сама себя находит

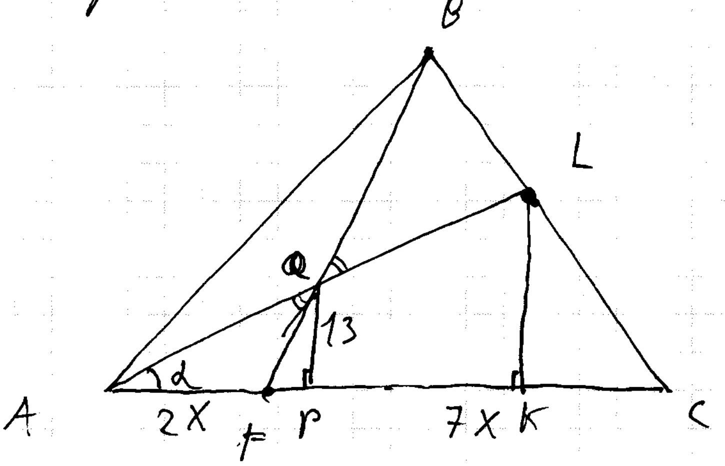
№6 Дано

$\frac{AF}{FC} = \frac{2}{7}$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{8}{21}$

$QP = 13$

$LK = ?$



Решение

Рассмотрим △ALK и △AQP. Они подобны так как ∠α - общий и углы ∠APQ = ∠ ~~K~~ AKL равны. Значит. $\frac{AP}{AK} = \frac{13}{LK}$. $LK = \frac{13AK}{AP}$

№5 t - время работы, рабочего в день

v - скорость одного рабочего в день

x - кол-во людей

$$\begin{cases} x \cdot v \cdot t = \frac{S}{21} & (1) \\ (x+2)(t+\frac{1}{24}) \cdot v = \frac{S}{15} & (2) \\ (x+6)(t+\frac{1}{12}) \cdot v = \frac{S}{10} & (3) \end{cases}$$

$$\frac{(1)}{(2)} = \frac{xt}{(x+2)(t+\frac{1}{24})} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

$$7xt = 5(xt + \frac{x}{24} + 2t + \frac{1}{12})$$

$$7xt = 5xt + \frac{5x}{24} + 10t + \frac{5}{12}$$

$$2xt = \frac{5x}{24} + 10t + \frac{5}{12} \Big| \cdot 24$$

$$48xt = 5x + 240t + 70$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x\cdot\frac{(2)}{(3)} = \frac{(x+2)\left(t+\frac{1}{24}\right)}{(x+6)\left(t+\frac{1}{12}\right)} = \frac{2}{3}$$

$$3\left(xt+\frac{x}{24}+2t+\frac{1}{12}\right) = 2\left(xt+\frac{x}{12}+6t+\frac{1}{2}\right)$$

$$3xt+\frac{3x}{24}+6t+\frac{3}{12} = 2xt+\frac{2x}{12}+\overset{12}{}t+1$$

$$xt = 6 + \frac{4x}{24} - \frac{3x}{24} + \frac{12-3}{12} + 6t$$

$$xt = 1\overset{+6t}{0} + \frac{x}{24} + \frac{9}{12} \Big| \cdot 24$$

$$\begin{cases} 24xt = \overset{144}{}t + x + \overset{18}{} = 0 \\ 48xt = 5x + 240t + 20 = 0 \end{cases}$$

~~$480t + 2x + 144 = 5x + 240t + 20$~~

~~$x = 240t -$~~

$$288t + 2x + 36 = 5x + 240t + 20$$

$$48t + 18 = 3x$$

$$\begin{cases} x = 16t + 6, \\ 48xt = 5x + 240t + 10 \end{cases}$$

$$768t^2 + 288t = 80t + 30 + 240t + 10$$

$$768t^2 - 32t - 40 = 0 \quad \Big| : 8$$

$$96t^2 - 4t - 5 = 0$$

$$D = 1936 \quad t_1 = \frac{4+44}{192} = \frac{48}{192} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 16\cdot\frac{1}{4} + 6 = 10$$

Ответ. было 10 рабочих

№7 $\overset{I}{[1;50]}, \overset{II}{[51;100]}, \overset{III}{[101;150]}, \overset{IV}{[151;200]}$

Чтобы сумма принимала максимальное знач. нужно, чтобы каждое слагаемое было максимально. ~~Всего~~ Постараемся выбрать максимальные числа из каждых промежутков так, чтобы разность не делилась на 50.

Начинаем выбирать с IV промежутка.

С учетом $9-9=0, 10-10=0, 8-8=0, 7-7=0, 6-6=0, 5-5=0$... С IV промежутка берем - 200, 199, 198, 197, 196, 195, 194. С III промежутка, с учетом, 143, 142, 141, 140, 139, 138, 137. Теперь учитываем снова 86, 85, 84, 83, 82, 81, 80. С последнего берем 29, 28, 27, 26, 25, 24, 23, 22. Итого сумма $= 1279 + 980 + 581 + 184 = 3024$. Ответ. 3024

№4 $|ax-a| \le \sqrt{x-2}$ ОДЗ: $x \ge 2$

$x-1=t$; $t \ge 1$

$|at| \le \sqrt{t-1}$

$a \ge 0$

$at \le \sqrt{t-1}$

$a^2t^2 \le t-1$

~~$a^2t^2 - t + 1 \le 0$~~

$a^2 \le \frac{t-1}{t^2}$

$a<0$

$-at \le \sqrt{t-1}$

0

$a=0$

$0 < \sqrt{t-1}$

$t \ge 1$

Ответ. при $a>0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1
$$\begin{cases} y=3x^2-4x+2 \\ y=17 \\ y=1 \\ y=a \end{cases}$$

$x_0 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$y = 3\cdot\frac{4}{9} - \frac{8}{3} + 2 = \frac{6}{3} - \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

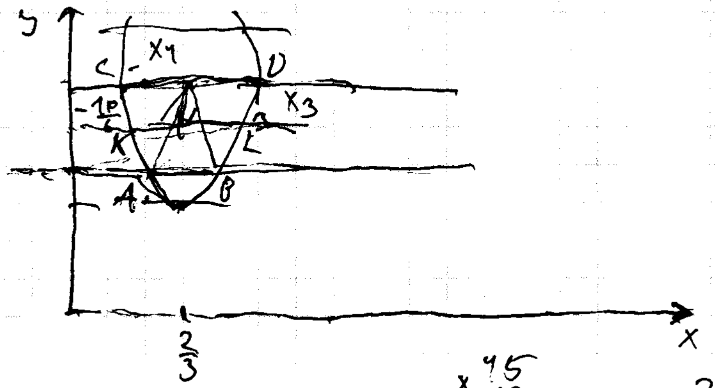
$D = 16-24 = -8$

$\times\, 96$
20
$+\, 1920$
1936

$(40+4)$

$\times\, 46$
46
276
184

$1600+320+16$



$3x^2-4x+2=17$

$3x^2-4x-15=0$

$D = 16+180=196$

$x_1 = \frac{4-14}{6} = -\frac{10}{6}$ $\quad x_2 = 3$

$3-\left(-\frac{10}{6}\right) = 3+\frac{10}{6} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$

$\times\, 45$
12
90
45
180

$3x^2-4x+2=1$

$3x^2-4x+1=0$

$D = 16-12=4$

$x_1 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$

$x_2 = \frac{4+2}{6} = 1$

$CD = \frac{14}{3}, \ AB = \frac{2}{3}$ $\qquad 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$CD = KL = \frac{196}{9} - \frac{4}{9} = \frac{\sqrt{192}}{3}$ ← по середине $\quad L-K = \frac{\sqrt{192}}{3}, \ L-K = \frac{\sqrt{200}}{3}$

$KL = \frac{\sqrt{200}}{3}$ – выше $\qquad \frac{\sqrt{200}}{3} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$

$192 = 16\cdot 12 = 4\sqrt{4\cdot 3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ $\quad x_1+x_2=4$ $\quad x_1 = 4-x_2$

$x_2 - x_1 = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ $\quad x_2 = 4+x_2 = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

$2x_2 = 8\sqrt{3}+4$ $\quad x_2 = 4\sqrt{3}+2$, $x_2^2 = 16\cdot 3 + 16\sqrt{3} + 4 = 52+16\sqrt{3}$

$52+16\sqrt{3} - 16\sqrt{3} + 8 +$

$$\begin{array}{r} 399 \\ +198 \\ \hline 597 \\ +197 \\ \hline 794 \end{array} \quad \begin{array}{r} 794 \\ +196 \\ \hline 890 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1085 \\ +194 \\ \hline 1279 \end{array}$$

№2

555 5555555 XXXXX XXXXX

10 · 10 ·

$C_{10}^{1} = \frac{10!}{1! \cdot 9!} = 10$

$C_{10}^{5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{\cancel{7}\cancel{8}\cancel{9}\cancel{10}}{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{5}} = 42$

$C_{10}^{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$

$C_{10}^{6} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} =$

$C_{10}^{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{\overset{4}{\cancel{8}} \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot 10}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 8 \cdot 3 \cdot 10 \quad \sim \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{8} \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot 10}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4}} = 210$

$C_{10}^{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{\cancel{7}\cancel{8}\overset{3}{\cancel{9}}10}{1\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cancel{4}} = 210$

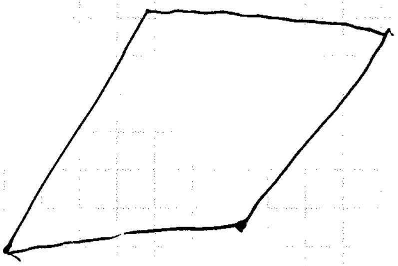
$C_{10}^{7} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{\overset{4}{\cancel{8}} \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot 10}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}}$

$C_{10}^{8} = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 10}{2}$

$C_{10}^{9} = \frac{10!}{9! \cdot 1!} = 10$

$$\begin{array}{r} 1279 \\ +980 \\ 587 \\ 184 \\ \hline 3024 \end{array} \quad \begin{array}{r} 48 \\ \times 16 \\ \hline 288 \\ 48 \\ \hline 768 \end{array} \quad \begin{array}{r} 48 \\ \times 6 \\ \hline 288 \end{array}$$

№3



№4

$|ax - a| \leq \sqrt{x-2}$

$x \geq 2$ - ОДЗ

$|a(x-1)| \leq \sqrt{(x-1)-1}$

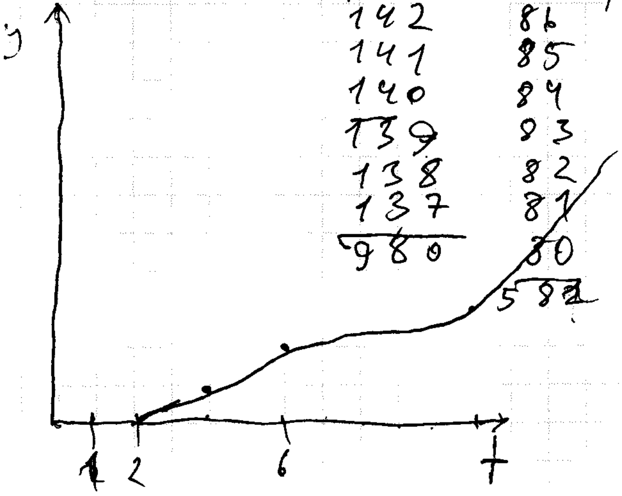
$|at| \leq \sqrt{t-1}$

$\underset{t}{x-1}$ $t-1$

$t \in [1; +\infty)$

$(ax-a)^2 \leq x-2$

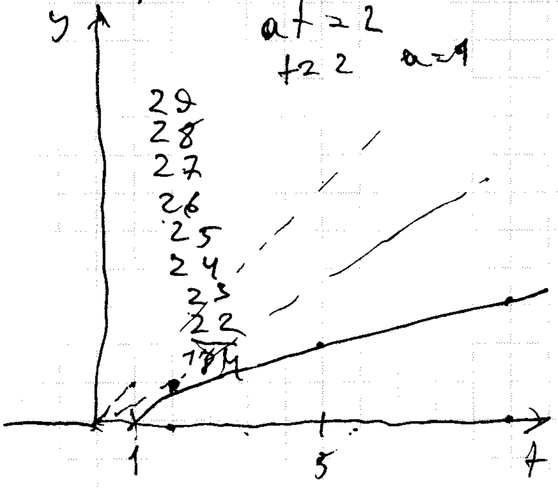
$$\begin{array}{r} 143 \\ 142 \\ 141 \\ 140 \\ 139 \\ 138 \\ 137 \\ \hline 980 \end{array} \quad \begin{array}{r} 86 \\ 85 \\ 84 \\ 83 \\ 82 \\ 81 \\ 80 \\ \hline 581 \end{array}$$



$at = 2$

$t = 2 \quad a = 1$

$$\begin{array}{r} 29 \\ 28 \\ 27 \\ 26 \\ 25 \\ 24 \\ 23 \\ 22 \\ \hline 184 \end{array}$$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

кол	V	t
X		21
X+2	~~(X+2)~~	15
X+6		10

~~$x \cdot 26$~~ $\frac{S}{v_1} = t_1$

x - кол, раб.

t_1 - время, работ. кажд

$(x+2)\cdot(t+1)$

$(x+6)\cdot(t+2)$

v - скорость одного рабочего

$x \cdot v$ - скорость x - рабочих

$x \cdot v \cdot t = S$ $v \cdot x \cdot 21 = S$

$v \cdot (x+2) \cdot 15 =$

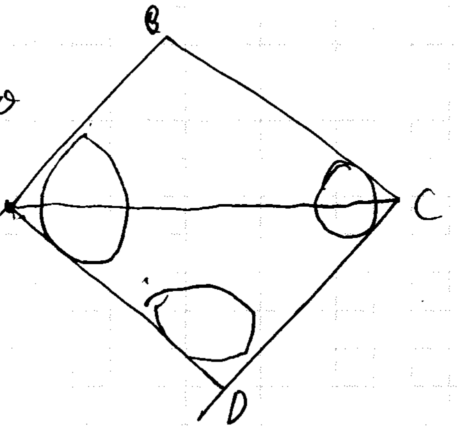
v - скорость одн. раб.

t - время работы одного раб. в день

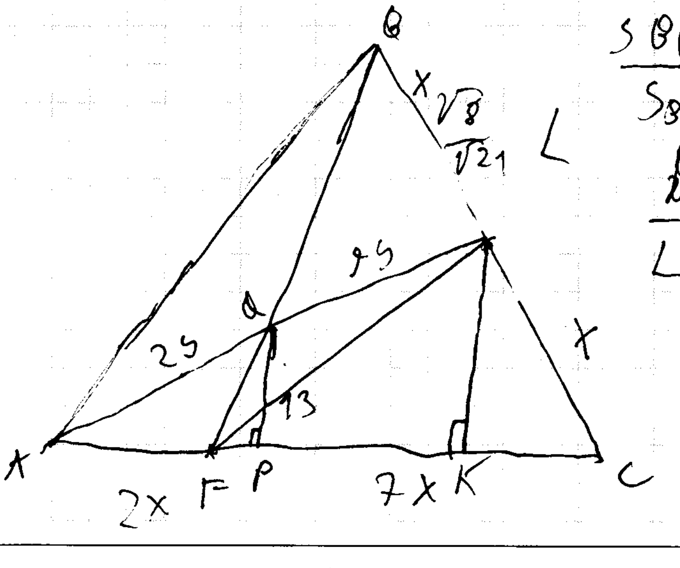
$(x \cdot v) \cdot t = S$ ~~$(x+2v)\cdot$~~

~~$(x+2)\cdot v \cdot t = S$~~ $(x+2)\cdot v \cdot (t+1) = S$

$(x+6)\cdot v(t+2) = S$



$\triangle AQP \sim \triangle ALK$



$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{8}{21} = K^2$

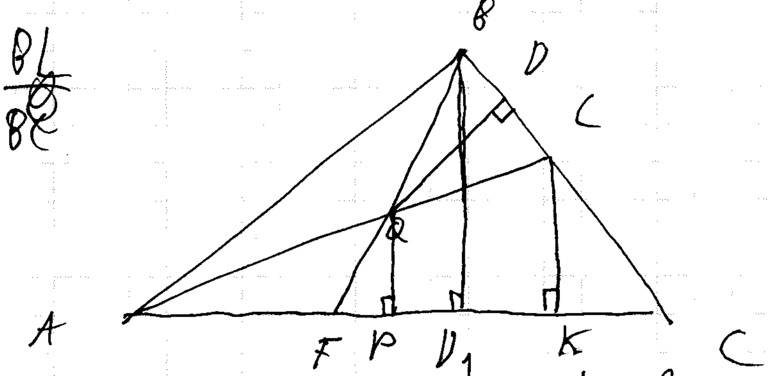
$\frac{BL}{LC} = \sqrt{\frac{8}{21}}$

$BL\sqrt{21} = \sqrt{8} \cdot LC$

$\frac{8}{21}=k^2$

$k=\sqrt{\frac{8}{21}}=\sqrt{\frac{4\cdot 2}{3\cdot 7}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{21}}$

$\frac{BL}{BC}$



$\frac{BD_1\cdot AC}{QD\cdot BC}=\frac{8}{21}$

t – время одного рабочего в день

v_p – скорость одного рабочего в день

x – кол-во людей

$(x\cdot v\cdot t)=\frac{S}{21}$

$(x+2)\cdot(t+1)\cdot v=\frac{S}{15}$

$\frac{x\cdot t}{(x+2)(t+1)}=\frac{15}{21}$

$(x+6)\cdot(t+2)\cdot v=\frac{S}{10}$

$21xt=15(xt+x+2t+2)$

$\frac{(x+2)(t+1)}{(x+6)(t+2)}=\frac{10}{15}$

$21xt=15xt+15x+30t+30$

$15x-6xt+30t+30=0$

$15xt+15x+30t+30=10(xt+2x+6t+12)$

$15xt+15x+30t+30=10xt+20x+60t+120$

$5xt-5x-30t-90=0$

$xt-x-6t-90=0 \quad xt=90+x+6t$

$15x-540-6x$