МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 4 ШИФР 10-003

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 3x^2 - 4x + 2$ пересекает прямые $y = 17$, $y = 1$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?

2. Найдите количество 20-значных чисел, содержащих только цифры "1", "5" и "6" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно десять, и они идут подряд.

3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 38$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - a| \leqslant \sqrt{x-2}$ является отрезок длины 1?

5. Несколько рабочих выполняют работу за 21 день. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 15 дней. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 10 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 7$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $8 : 21$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 13.

7. Пиноккио выбрал по 7 целых чисел из каждого промежутка $[1; 50]$, $[51; 100]$, $[101; 150]$, $[151; 200]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 50. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати восьми выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

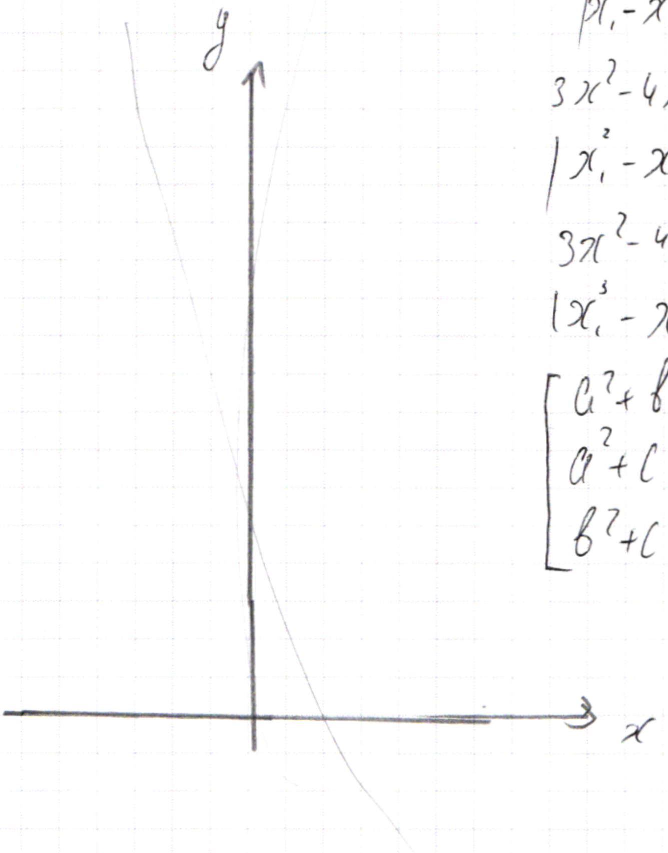
10-003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $3x^2-4x+2=y$



$3x^2-4x+2=17$ $\quad 3x^2-4x-15=0$ $\quad D=196$, $\sqrt{D}=14$

$|x_1^1-x_2^1|=a$ $\quad |x_1^1-x_2^1|=\left|\frac{4+14}{6}-\frac{4-14}{6}\right|=$

$3x^2-4x+2=1$ $\quad =3+1\frac{4}{6}=$

$|x_1^2-x_2^2|=b$ $\quad =4\frac{4}{6}$

$3x^2-4x+2=a$ $\quad 3x^2-4x+1=0$

$|x_1^3-x_2^3|=c$ $\quad |x_1^2-x_2^2|=\left|1-\frac{1}{3}\right|=$

$\left[\begin{array}{l} a^2+b^2=c^2 \\ a^2+c^2=b^2 \\ b^2+c^2=a^2 \end{array}\right.$ $\quad =\frac{2}{3}$

$3x^2-4x+2-a=0$

$D=16-4\cdot3\cdot(2-a)=$

$=16-24+12a=$

$=4(-2+3a)$

$\sqrt{D}=2\sqrt{-2+3a}$

$|x_1^3-x_2^3|=\frac{4+2\sqrt{-2+3a}}{6}-\frac{4-2\sqrt{-2+3a}}{6}$

$=\frac{4\sqrt{-2+3a}}{6}=\frac{2}{3}\sqrt{-2+3a}$

$\left[\begin{array}{l} a^2+b^2=c^2 \\ a^2+c^2=b^2 \\ b^2+c^2=a^2 \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} \left(4\frac{4}{6}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\sqrt{-2+3a}\right)^2 \;\Big|:\left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ \left(4\frac{4}{6}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\sqrt{-2+3a}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2 \;\Big|:\left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\sqrt{-2+3a}\right)^2=\left(4\frac{4}{6}\right)^2 \;\Big|:\left(\frac{2}{3}\right)^2 \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} 16+1=-2+3a \\ 16+(-2+3a)=1 \\ 1+(-2+3a)=16 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} a=5 \\ a=\frac{17}{3} \\ a=\frac{13}{3} \end{array}\right.$

№2 ~~В~~ Т.к. 5 десяток и они идут подряд, то возможно только 10 расположений. Тогда общее число нужных чисел n = количеству всех возм расп 1 и 6 в 10-зн. чисел $*$ 10

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$k = 2^{10} = 1024 \Rightarrow n = k \cdot 10 = 10240$

№ 4

$|ax - a| \leq \sqrt{x-2}$

$\sqrt{x-2}$

$\cancel{-(ax-a)} \leq \sqrt{x-2} \leq ax - a$

$0 \leq x-2 \leq a^2x^2 - 2a^2x + a^2$

$2 \leq x \leq a^2x^2 - 2a^2x + a^2 + 2$

$(a^2x^2 - 2a^2x + a^2 + 2) - 2 = 1$

$a^2x^2 - 2a^2x + a^2 - 1 = 0$

$D = 4a^4 - 4a^2(a^2-1) = 4a^2(a^2 - a^2 + 1) = 4a^2$

$\sqrt{D} = 2a$

$x_1 = \frac{2a^2+2a}{2a^2} \qquad x_2 = \frac{2a^2-2a}{2a^2}$

$x_1 = \frac{a+1}{a} \qquad x_2 = \frac{a-1}{a}$

$|x_1 - x_2| = 1$

$\left|\frac{a+1}{a} - \frac{a-1}{a}\right| = 1$

$a = \pm 2$

$|2x-2| \leq \sqrt{x-2}$

$\cancel{0 \leq x-2 \leq}$

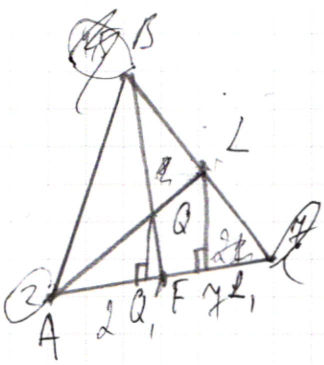
$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x-2} \geq 2x-1 \\ x-2 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x-2 \geq 4x^2 - 8x + 4 \\ x-2 \leq 0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 4x^2 - 9x + 6 \geq 0 \\ x \geq 2 \end{array}\right.$

$4x^2 - 9x + 6 = 0$

$D < 0$



$$\frac{AF}{FC}=\frac{2}{7}$$

$$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}}=\frac{8}{21}=$$

~~SBQL = BB1 · AC · 7/2~~

~~△BQL ∼ △BFC~~

$SALC = LL_1 \cdot AC$

$SAQF = QQ_1 \cdot AF$

$$\frac{LL_1 \cdot AC}{QQ_1 \cdot AF} = \frac{9LL_1}{2QQ_1}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 143 \\ 7 \\ \hline 961 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 86 \\ 7 \\ \hline 602 \end{array}$$

$29 \cdot 7 =$
$= 210 - 7 =$
$= 203$

17 ✓ $200 \cdot 7 - 1 - 2 - \ldots - 6 = 200 \cdot 7 - 21$ $\quad 143 \cdot 7 - 21 \quad 86 \cdot 7 - 21 \quad 29 \cdot 7 - 21$

200, 199, 198, 197, 196, 195, 194; 143, 142, 141, 140, 139, 138, 137; 86, 85, 84, 83, 82, 81, 80; 29, 28, 27, 26, 25, 24.

$1400 + 961 + 602 + 203 - 21 \cdot 4 = \quad 3166 - 21 \cdot 4 = 3166 - 84 = 3082$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

10-003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 Вр. ~~Раб~~

	Произв.	Вр.	Раб
x	Kx	$21g\cdot n$	1
$x+2$	$K(x+2)$	$15g\cdot(n+1)$	1
$x+4$	$K(x+4)$	$10g(n+2)$	1

$208^2 = 41600+1664 = 43264$

$43264 - 4200 = 39064$

$$\begin{cases} \frac{1}{21n} = x \\ x+2 = \frac{1}{15(n+1)} \\ x+4 = \frac{1}{10(n+2)} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{21n} = x \\ \frac{1}{21n}+2 = \frac{1}{15(n+1)} \\ \frac{1}{21n}+4 = \frac{1}{10(n+2)} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{21n} = x \\ \frac{42n+1}{21n} = \frac{1}{15(n+1)} \\ \frac{84n+1}{21n} = \frac{1}{10(n+2)} \end{cases}$$

$(42n+1)(n+1)\cdot15 = 21n$

$(42n^2+42n+n+1)15 = 21n$

$210n^2+215n+5 = 7n$

$210n^2+208n+5=0$

$D = 218^2 - 4\cdot210\cdot5 =$

$= \cancel{47524 - 4200} =$

$= 43324$

$\sqrt{D} =$

$(84n+1)10(n+2) = 21n$

$840n^2+1680n+20n+20 = 21n$

$840n^2+1679n+20=0$

$$\begin{cases} \frac{1}{21n} = x \\ 210n^2+208n+5=0 \\ 840n^2+1679n+20=0 \end{cases}$$

$D = 208^2 - 4\cdot210\cdot5 = 43264-4200 = 39064$

39064 | 2
19532 | 2
9766 | 2
4883 |

$$\begin{cases} \frac{1}{21n} = Kx \\ \frac{1}{15(n+1)} = K(x+2) \\ \frac{1}{10(n+2)} = K(x+4) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{21nK} = x \\ \frac{1}{15(n+1)} = K\left(\frac{1}{21nK}+2\right) \\ \frac{1}{10(n+2)} = K\left(\frac{1}{21nK}+4\right) \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

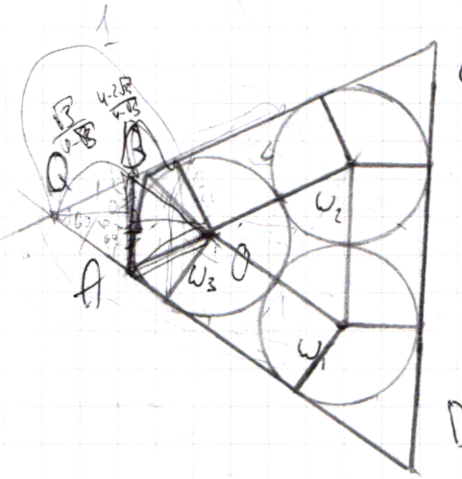
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

10-003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\triangle QCD$ - равностор.

$BC = QC - QB = CD - QB$

$AD = QD - QA = CD - QA$

$AB^2 = QA^2 + QB^2 - 2QA \cdot QB \cdot \cos 60^\circ =$
$= QA^2 + QB^2 - QA \cdot QB$

$AD + BC - AB - CD = CD - QB - QA - AB = 38$

$x - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4-\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\frac{4-\sqrt{3}}{2}}{\cancel{4}x} = \sin \frac{\sqrt{3}}{2}$

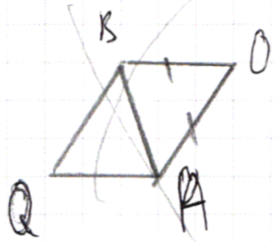
$\frac{(4-\sqrt{3})x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad x = \frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$

$(16 - 8\sqrt{3} + 9)x^2 = 9$

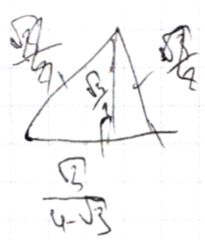
$(25 - 8\sqrt{3})x^2 = 9$

$x^2 = \frac{9}{25-8\sqrt{3}}$

4 $\angle QBA + \angle QAB = 120^\circ$



$P_{QBA} = CD - 38$



$\sqrt{\frac{9}{(4-\sqrt{3})^2} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 4 + 9(4-\sqrt{3})^2}{(4-\sqrt{3})^2 \cdot 4}}$ $= 9(4 + 16 - 8\sqrt{3} + 3)$

$tg \frac{\alpha}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} : \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{4-\sqrt{3}}$

$tg \alpha =$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№ 4

$|ax-a| \le \sqrt{x-2}$

$$\begin{cases} |ax_1 - a| = \sqrt{x_1 - 2} \\ |ax_1 + 1 - a| = \sqrt{x_1 - 1} \end{cases}$$

№ 5

$$\begin{cases} \frac{1}{21nk} = x \\ \frac{1}{15(n+1)} = \frac{1+42nk}{21n} \\ \frac{1}{10(n+2)} = \frac{1+84nk}{21n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{21nk} = x \\ \cancel{k = \frac{1 \cdot 21n}{15(n+1) \cdot (1+42nk)}} \quad 42nk = \frac{21n - 15(n+1)}{15(n+1)} \\ \frac{1}{10(n+2)} = \frac{1+84nk}{21n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{21nk} = x \\ k = \frac{21n - 15(n+1)}{15(n+1)42n} = \frac{7n-5n+5}{(5n+1)42n} = \frac{2n+5}{210n^2+42n} \\ \frac{1}{10(n+2)} = \left(1 + \frac{84n(2n+5)}{210n^2+42n}\right) : 21n \end{cases}$$

$|ax_1 - a| = \sqrt{x_1 - 2}$ ОДЗ: $x_1 - 2 \ge 0$, $x_1 \ge 2$

$$\left[\begin{array}{l} (ax_1 - a)^2 = x_1 - 2 \\ -(ax_1 - a)^2 = x_1 - 2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a^2x_1^2 - 2a^2x_1 + a^2 = x_1 - 2 \\ -a^2x_1^2 + 2a^2x_1 - a^2 = x_1 - 2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a^2(x_1^2 - 2x_1 + 1) = x_1 - 2 \\ -a^2(x_1^2 - 2x_1 + 1) = x_1 - 2 \end{array}\right.$$

$|ax_1 + 1 - a| = \sqrt{x_1 - 1}$

$$\left[\begin{array}{l} (ax_1 + 1 - a)^2 = x_1 - 1 \\ -(ax_1 + 1 - a)^2 = x_1 - 1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a^2x_1^2 + 1 + a^2 - 2a^2x_1 + 2ax_1 - 2a = x_1 - 1 \\ -a^2x_1^2 - 1 - a^2 + 2a^2x_1 - 2ax_1 + 2a = x_1 - 1 \end{array}\right.$$

$\times\frac{269}{269}$ $\times\frac{269}{269}$

$\left(1 + \frac{2(2n+5)}{5n+1}\right) : 21n = \frac{9n+11}{(5n+1)21n}$

$\frac{1}{10(n+2)} = \frac{9n+11}{(5n+1)21n}$

$105n^2 + 21n = 10(9n^2 + 11n + 18n + 22)$

$105n^2 + 21n = 90n^2 + 290n + 220$

$15n^2 - 269n - 220 = 0$ $\quad D = 269^2 + 4 \cdot 220 \cdot 15$

$=$

Заметим, что если взять два числа, разность которых делится на 50, то их x равны. Следовательно числа, которые дадут наиб. сумму: 200, 199, 198, 197, 196, 195, 194, 143...137, 86...80, 29...24 ~~ве~~ ведь при их записи по формуле $50n + x + 1$ у всех этих чисел x равное. Их сумма равна 3082

Ответ: 3082

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

10-003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 Если можно составить прямоуг. треуг. из отрезков, то по теореме Пифагора:

$$\left[\begin{array}{l} a^2+b^2=c^2 \\ b^2+c^2=a^2 \\ a^2+c^2=b^2 \end{array}\right. \text{, где} \quad \begin{array}{l} 3x^2-4x+2=17 \\ |x_1-x_2|=a \quad = 4\frac{2}{3} \\ 3x^2-4x+2=1 \\ |x_1-x_2|=b \quad = \frac{2}{3} \\ 3x^2-4x+2=a \\ |x_1-x_2|=b \quad = \frac{2}{3}\sqrt{-2+3a} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l} \left(4\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\sqrt{-2+3a}\right)^2 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\sqrt{3a-2}\right)^2=\left(4\frac{2}{3}\right)^2 \\ \left(4\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\sqrt{3a-2}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 16+1=-2+3a \\ 1+3a-2=16 \\ 16+3a-2=1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a=6\frac{1}{3} \\ a=5\frac{2}{3} \\ a=-4\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Ответ: $a \in \{6\frac{1}{3}; 5\frac{2}{3}; -4\frac{1}{3}\}$

№2 Т.к. 5 десятк. и они идут подряд, то возможно только 10 расположений, Тогда общее число нужных чисел (n) равно количеству всех возможных расположений 1 и 6 в 10-значном числе (k) умноженным на 10

$k = 2^{10}$

$n = 10 \cdot 1024 = 10240$

Ответ: 10240

№7 Все промежутки можно представить как $50 \cdot n + x + 1$, где n - номер промежутка, а x - номер цифры в промежутке ($0<x<50$)

☐ черновик ■ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1 (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

10-003

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)