МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 3 ШИФР 9-20

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2 - 5x + 1$ пересекает прямые $y = -1$, $y = 4$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?

2. Найдите количество 16-значных чисел, содержащих только цифры “3”, “4” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “9” ровно четыре, и они идут подряд.

3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 24$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 2a| \leqslant \sqrt{x-1}$ является отрезок длины 3?

5. Несколько рабочих выполняют работу за 28 дней. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 21 день. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 15 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 7 : 3$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $7 : 36$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 3.

7. Пинокккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 30]$, $[31; 60]$, $[61; 90]$, $[91; 120]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 30. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-20
ШИФР
(заполняется секретарём)

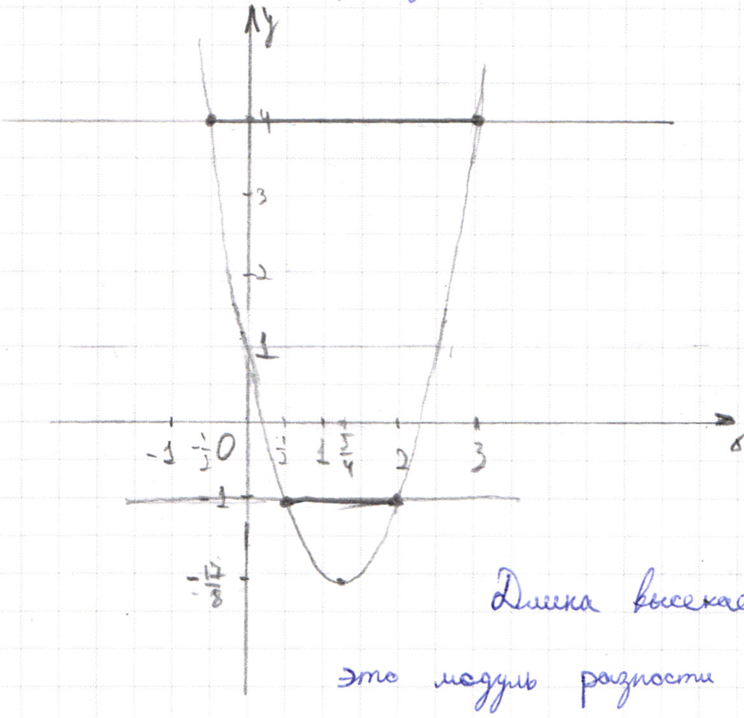
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Рассмотрим задачу с графической стороны:

Найдем координаты вершины параболы $y = 2x^2 - 5x + 1$:

$2 \cdot 2x_0 - 5 = 0 \to x_0 = \frac{5}{4}$ $\quad y_0 = \frac{25}{8} - \frac{25}{4} + 1 = 1 - \frac{25}{8} = -\frac{17}{8}$.

Построим данную параболу и прямые $y = -1$ и $y = 4$.



Чтобы $y = a$ высекала отрезок a должно быть больше чем y_0, т.е. $a > -\frac{17}{8}$.

Длина высекаемых отрезков это модуль разности координат точек пересечения параболы и соотв. прямой.

Т.е. $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ y = -1 \end{cases} \to 2x^2 - 5x + 2 = 0 \to$ длина высекаемого отрезка равна $|x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{D}}{2} = \frac{\sqrt{25-16}}{2} = \frac{3}{2}$.

Аналогично для $y = 4$: $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ y = 4 \end{cases} \to 2x^2 - 5x - 3 = 0 \to$ длина отрезка равна $\frac{\sqrt{D}}{2} = \frac{\sqrt{25+24}}{2} = \frac{7}{2}$.

и для $y = a$: $\begin{cases} 2x^2 - 5x + 1 = y \\ y = a \end{cases} \to 2x^2 - 5x + 1 - a = 0 \to$ длина отрезка высекаемого прямой $y = a$ (если отрезок существует) равна $\frac{\sqrt{D}}{2} = \frac{\sqrt{25 - 8(1-a)}}{2}$.

Т.е получили 3 отрезка длинами $\frac{3}{2}$; $\frac{7}{2}$ и $\frac{\sqrt{25-8(1-a)}}{2}$.

Из них должен выходить прямоугольный треугольник, т.е для них выполняется теорема Пифагора:

Следует рассмотреть 2 случая, когда отрезки $\frac{7}{2}$ и $\frac{\sqrt{25-8(1-a)}}{2}$ являются гипотенузами соответственно, т.е:

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25-8(1-a)}{2^2} \\ \frac{25-8(1-a)}{2^2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 \end{array}\right. \longrightarrow \left[\begin{array}{l} 9+49-25+8=8a \\ 25-8+9+8a=49 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 8a=41 \\ 8a=23 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} a=\frac{41}{8} \\ a=\frac{23}{8}. \end{array}\right.$$

Данные значения a удовлетворяют условию $a > y_0$

Ответ: $\frac{41}{8}$; $\frac{23}{8}$.

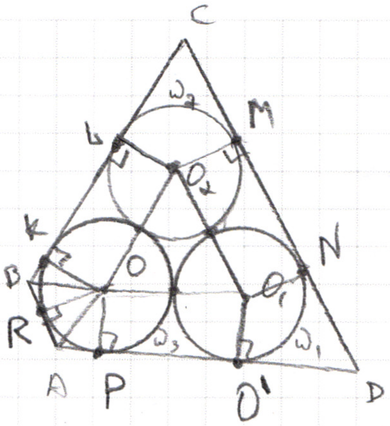
2. Т.к цифр „9" ровно четыре и они идут подряд, то можем ~~заменить эти~~ переформулировать задачу так: сколько $16-4+1=13$ значных чисел (т.к 4 "ячейки под число заменяем одной"), содержащих одну цифру „9" и цифры „3" и „4", которые встречаются хотя бы один раз. Тогда ~~число~~ место цифры „9" (на которую заменена группа 4-х девяток) можно выбрать C_{13}^{1} способами, а место для n цифр „3" C_{12}^{n} способами („4" занимает оставшиеся места), где $1<n<11$, т.к „3" и „4" встречаются хотя бы 1 раз. Тогда по правилу умножения количество искомых чисел равно $C_{13}^{1}\left(C_{12}^{1}+C_{12}^{2}+C_{12}^{3}+\ldots+C_{12}^{11}\right) = 13\cdot 2\left(\frac{12!}{1\cdot 11!}+\frac{12!}{2!\cdot 10!}+\frac{12!}{3!\cdot 9!}+\frac{12!}{4!\cdot 8!}+\frac{12!}{5!\cdot 7!}+\frac{12!}{2\cdot 6!\cdot 6!}\right)=$

$= 13\cdot 2(12+66+220+495+792+462) = 26\cdot 2047 = 63222.$

Ответ: 63222.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3.



Обозначим центры окружностей и точки касания как показано на рисунке. По св-ву отрезков касательных, проведенных из одной точки $BK=BR$, $AR=AP$, $DO'=DN$, $CM=CL$ (*)

Т.к окружности имеют равный радиус r и касательные перпендикулярны к радиусам (т.е $LO_2 \parallel OK$, $O_1N \parallel O_2M$, $O_1O' \parallel PO$) то по признаку KLO_2O, MNO_1O_2, $O'O_1OP$ — параллелограммы, а т.к окружности касаются, то $PO' = KL = MN = 2r$. (**)

Также из-за того, что $O_2O_1 \parallel CD$, $OO_1 \parallel AD$, $OO_2 \parallel BC$ следует, что $\angle C = \angle OO_2O_1 = 60^\circ$ и $\angle D = \angle OO_1O_2 = 60^\circ \to \angle B + \angle A = 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 240^\circ$. (***)

Из условия $AD+BC-AB-CD=24$ получим, что

$AP+PO'+O'D+BK+KL+LC-CM-MN-ND-AR-RB=24$

С учетом равенств (*) и (**) получим, что $2r=24 \to r=12$

Из того, что $\angle A + \angle B = 240^\circ$ (***) следует, что $\angle KOP = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$ (по сумме углов $ABKOP$)

Из-за того, что $OR=OP$, $OR \perp RA$, $OP \perp AP$ и $AR=AP$

$\triangle ORA = \triangle OPA \to \angle ROA = \angle AOP$

Аналогично из рав-ва $\triangle KOB$ и $\triangle BOR$ получим, что $\angle KOB = \angle ROB$, т.к $\angle KOP = \angle ROA + \angle AOP + \angle KOB + \angle ROB =$

$= 2(\angle BOR + \angle ROA) = 2\angle AOB \to \angle AOB = \frac{1}{2}\angle KOB = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$.

Ответ: 1) радиусы окружностей равны 12; 2) $\angle AOB = 60^\circ$.

4. $|ax-2a| \le \sqrt{x-1}$ ОДЗ $\underline{x \ge 1}$

Т.к обе части неравенства неотрицательные, то можем поднести обе части в квадрат:

$a^2x^2 - 4a^2x + 4a^2 \le x - 1$

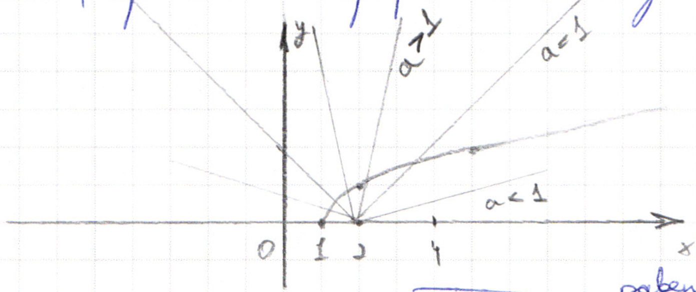
Рассмотрим случай, когда $a=0$:

$x-1 \ge 0 \quad x \ge 1$ т.е бесконечно много решений $\Rightarrow a \ne 0$.

Т.к $a \ne 0$ получили квадратное относительно x.

$a^2x^2 - x(4a^2+1) + 4a^2+1 \le 0$

Длиной отрезка решений данного неравенства будет разность корней соответствующего ур-ния, чему можно убедиться, применив графический метод:



Также следует заметить, что разностью корней равенства будет $\frac{\sqrt{D}}{a^2} =$

$$= \frac{\sqrt{(4a^2+1)^2 - 4a^2(4a^2+1)}}{a^2} = \frac{\sqrt{4a^2+1}}{a^2} = 3$$

$$4a^2+1 = 3a^4 \to \underset{\vee 0}{a^2} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3} \to$$

$$a = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{7}}{3}}.$$

Ответ: $a = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{7}}{3}}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. Пусть x - кол-во рабочих, Π - суммарная производительность группы рабочих, t - длительность рабочего дня, n - кол-во дней, τ - время (все) затраченное на работу, тогда

$\frac{P}{\Pi} = \tau$ $\quad \tau = nt$ $\quad \Pi = x \cdot \Pi'$, где Π' - производительность рабочего, т.е. $\frac{P}{x \cdot \Pi'} = nt$, $\frac{P}{\Pi'} = ntx$, для $\forall n, t, x$ допустимых.

Т.к P - работа одинакова и Π' также одинакова, то $ntx = const$, $\forall n, t, x$

Подставляя n, t, x из условия, принимая x_0, t_0 за начальные значения, получим:

$$21(x_0+2)(t_0+1) = 15(x_0+6)(t_0+2) = 28x_0t_0$$

$$\begin{cases} 7(x_0+2)(t_0+1) = 5(x_0+6)(t_0+2) \\ 3(x_0+2)(t_0+1) = 4x_0t_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x_0t_0 + 14t_0 + 7x_0 + 14 = 5x_0t_0 + 30t_0 + 10x_0 + 60 \\ 3x_0t_0 + 6t_0 + 3x_0 + 3 = 4x_0t_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_0t_0 = 16t_0 + 3x_0 + 46 \\ x_0t_0 = 6t_0 + 3x_0 + 6 \end{cases} \to \begin{cases} 12t_0 + 6x_0 + 12 = 16t_0 + 3x_0 + 46 \\ x_0t_0 = 6t_0 + 3x_0 + 6 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} t_0 = \frac{3x_0 - 34}{4} \\ \frac{3x_0^2 - 34x_0}{4} = \frac{9x_0 - 102}{2} + 3x_0 + 6 \end{cases} \to 3x_0^2 - 34x_0 = 18x_0 - 204 + 12x_0 + 24$$

$$3x_0^2 - 64x_0 + 180 = 0.$$

$$\sqrt{\frac{D}{4}} = \sqrt{1024 - 540} = 2 \cdot 11.$$

$$x_0 = \frac{32 \pm 22}{3} = \left[\begin{array}{l} \frac{10}{3} \ \varnothing \\ \frac{54}{3} = 18. \end{array} \right.$$

Т.к $x_0 \in \mathbb{Z}$, то количество рабочих равно 18.

Ответ: 18.

7. В каждом из промежутков $(a, b, c, d)^*$ пронумеруем элементы $(a_i; b_i; c_i; d_i)$

Несложно заметить, что номер i элемента равняется остатку от деления данного числа на 30, т.е для выполнения условия не должно встретится таких чисел с равными номерами, т.к нам требуется найти наибольшее значение суммы выбранных чисел и $a_i < b_j < c_z < d_k$, то наибольшей будет выборка

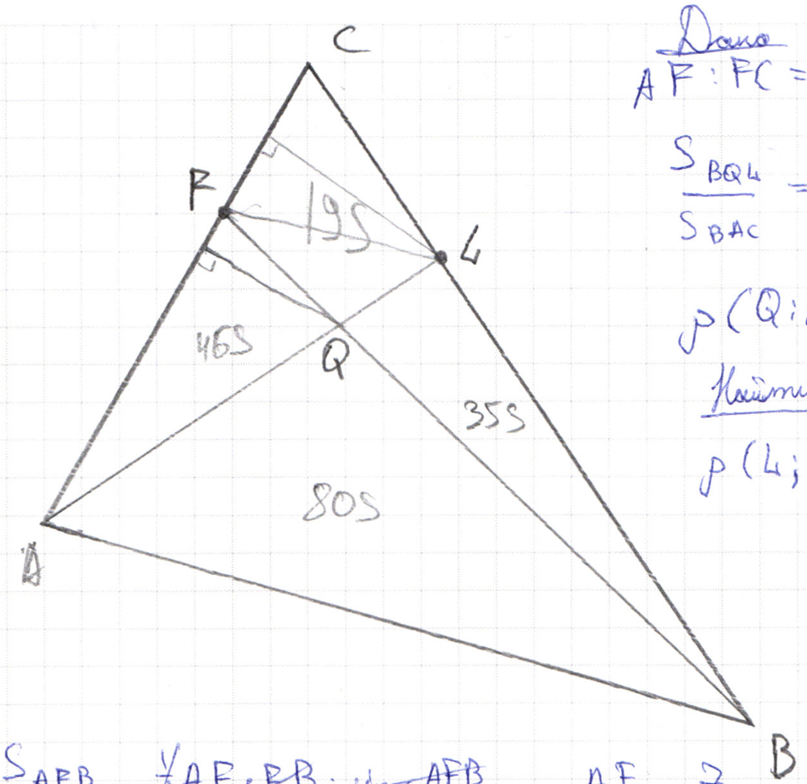
$d_{30}, d_{29}, d_{28}, d_{27}, c_{26}, c_{25}, c_{24}, c_{23}, b_{22}, b_{21}, b_{20}, b_{19}, a_{18}, a_{17}, a_{16}, a_{15}$, что соответственно даёт сумму, равную

$$120+129+128+127+(90-4)+(90-5)+(90-6)+(90-7)+(60-8)+(60-9)+(60-10)+$$
$$+(60-11)+(30-12)+(30-13)+(30-14)+(30-15) =$$
$$= 120\cdot 4+90\cdot 4+60\cdot 4+30\cdot 4-\sum_{i=1}^{15} i = 4\cdot 300-\frac{15\cdot \overset{8}{\cancel{16}}}{\cancel{2}} =$$
$$= 4\cdot 300-120 = 4\cdot(300-30) = 4\cdot 270 = 1080.$$

Ответ: наибольшее значение суммы 1080

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.



Дано

$AF : FC = 7 : 3$

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{7}{36}$

$\rho(Q;AC) = 3$

Найти

$\rho(L;AC)$ − ?

$$\frac{S_{AFB}}{S_{BFC}} = \frac{\frac{1}{2}AF\cdot FB\cdot \sin\angle AFB}{\frac{1}{2}CF\cdot FB\cdot \sin(180^\circ-\angle AFB)} = \frac{AF}{CF} = \frac{7}{3} \qquad \frac{S_{ABF}+S_{BFC}}{S_{BFC}} = \frac{7}{3}+1 = \frac{10}{3}$$

Т.е. $\frac{S_{BAC}}{S_{BFC}} = \frac{10}{3}$, $\frac{S_{BQL}}{S_{BFC}} = \frac{7}{36}\cdot\frac{10}{3} = \frac{35}{54} \to \frac{S_{BQL}}{S_{CLQF}} = \frac{35}{19}$, пусть

$$\frac{S_{FLB}}{S_{CLF}} = \frac{LB}{CL} \qquad \frac{S_{FLQ}}{S_{BLQ}} = \frac{FQ}{BQ} \qquad \frac{S_{BQL}}{S_{CLQF}}\cdot\frac{S_{FLQ}}{S_{BLQ}} = \frac{S_{FLQ}}{S_{CLQF}} = \frac{35FQ}{19BQ} \to$$

$$\to \frac{S_{CLF}+S_{FLQ}}{S_{FLQ}} = \frac{19BQ}{35FQ} \to \frac{S_{CFL}}{S_{FLQ}} = \frac{19BQ-35FQ}{35FQ}$$

$$\frac{\rho(L;AC)}{\rho(Q;AC)} = \frac{AL}{AQ} = 1+\frac{QL}{AQ} = 1+\frac{S_{BQL}}{S_{AQB}} \to$$

$$\to \rho(L;AC) = \rho(Q;AC)\left(1+\frac{S_{QBL}}{S_{AQB}}\right).$$

$$\frac{AF\cdot \cancel{AQ}\cdot BQ}{AC\cdot \cancel{AL}} = \frac{FQ\cdot \cancel{AQ}\cdot \cancel{AB}}{\cancel{AL}\cdot \cancel{AB}} \to \frac{AF}{AC} = \frac{FQ}{BQ} = \frac{7}{10} \to \frac{S_{AQB}}{S_{AQF}} = \frac{10}{7}.$$

$$S_{AQB}+S_{AQF} = 180S-54S = 126S \to S_{AQB} = \frac{126S}{17}\cdot 10 = 80S$$

Где $1803 = S_{ABC}$

$S_{AQB} = 808$

$S_{BQL} = 355$

$\rightarrow \rho(L;AC) = \rho(Q;AC)\left(1 + \dfrac{\cancel{388}^{\,7}}{\cancel{808}_{\,16}}\right) =$

$= 3 \cdot \dfrac{23}{16} = \dfrac{69}{16}.$

Ответ: $\dfrac{69}{16}.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y=2x^2-5x+1$ $\quad 4x_0-5=0$ $\quad x_0$ $\quad x_0=\frac{5}{4}$ $\quad y_0=\frac{2\cdot 25}{16_8}-\frac{25}{4}+1=$

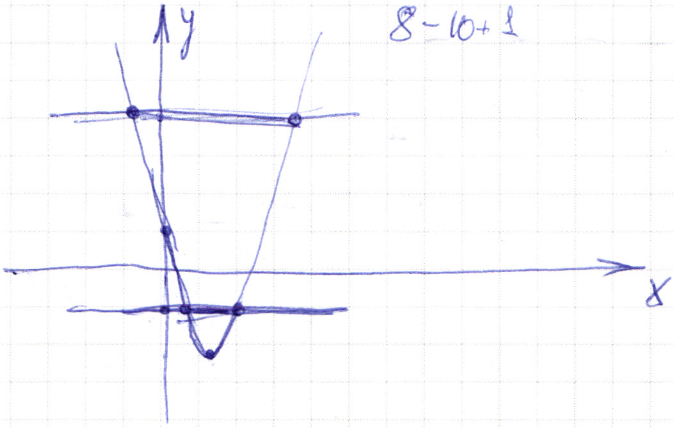
$y=-1$

$y=4$

$y=a$

$8-10+1$

$=1-\frac{25}{8}=\frac{8-25}{8}=-\frac{17}{8}.$



$\begin{cases} y=2x^2-5x+1 \\ y=-1 \end{cases}$ $\quad 2x^2-5x+2=0$ $\quad \cancel{25-16=}$

$\cancel{x=5\pm}$ $\quad D=25-16=9$

$x_1=\frac{5+\sqrt{D}}{4}$

$2x^2-5x-3=0$ $\quad 25+8\cdot 3=49$ $\quad x_2=\frac{5-\sqrt{D}}{4}$

$x_2-x_1=\frac{\sqrt{D}}{2}=\frac{7}{2}.$ $\quad x_2-x_1=\frac{5+\sqrt{D}}{4}-\frac{5-\sqrt{D}}{4}=$

$=\frac{\sqrt{D}}{2}=\frac{3}{2}.$

$\frac{7}{2}; \frac{3}{2}$

$y=a$ $\quad 2x^2-5x+1-a=0$ $\quad D=25-8(1-a)$

$x_2-x_1=\frac{\sqrt{D}}{2}=\frac{\sqrt{25-8(1-a)}}{2}.$

$\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25-8(1-a)}{2^2}$ или $25-8(1-a)+3^2=7^2$

$25+9-8+8a=49$

$7^2+3^2=25-8+8a$

$8a=23$

$49-25+8+9=8a$

$a=\frac{23}{8}.$

$\cancel{24}$ $41=8a \Rightarrow a=\frac{41}{8}$

3, 4, 9.

9

13

$C_{12}^{1}+C_{12}^{2}+C_{12}^{3}+C_{12}^{4}+C_{12}^{5}+C_{12}^{6}+C_{12}^{7}+C_{12}^{8}+$
$+C_{12}^{9}+C_{12}^{10}+$

$C_{13}^{1}\cdot\left(\sum_{i=1}^{11}C_{12}^{i}\right)$

$C_{12}^{i}=\frac{12!}{1!\cdot(12-1)!}+$

$\frac{\cancel{10!}\cdot 11\cdot\cancel{12}^{6}}{\cancel{10!}\cdot\cancel{2!}}$

$12!\left(\frac{1}{1!(12-1)!}+\frac{1}{2!(12-2)!}+\frac{1}{3!}\right.$

$\frac{10\cdot 11\cdot\cancel{12}^{2}}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}}=220$

$13\cdot 12!\left(\frac{2}{1!\cdot 11!}+\frac{2}{2!\cdot 10!}+\frac{2}{3!\cdot 9!}+\frac{2}{4!\cdot 8!}+\frac{2}{5!\cdot 7!}+\frac{1}{6!\cdot 6!}\right)=$

$\frac{8\cdot 9\cdot\cancel{10}\cdot 11\cdot\cancel{12}}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{5}}=99\cdot 8=792$

$\frac{9\cdot\cancel{10}^{5}\cdot 11\cdot\cancel{12}}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}}=495=45\cdot 11.$

$=13\cdot 2\,(12+66+220+495+792+462)=$

78, 298

$\frac{7\cdot\cancel{8}\cdot\cancel{9}\cdot\cancel{10}\cdot 11\cdot\cancel{12}}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{6}\cdot\cancel{2}}=7\cdot 6\cdot 11=462$

$$\begin{array}{r}462\\+\;288\\\hline 760\end{array}\qquad\begin{array}{r}760\\+\;495\\\hline 1255\end{array}\qquad\begin{array}{r}1255\\+\;792\\\hline 2047\end{array}$$

$=26\cdot 2047=63222.$

$$\begin{array}{r}27\\+\;4\\\hline 1080\end{array}$$

$\frac{2\cdot 3}{2}.$

$$\begin{array}{r}2047\\\times\;26\\\hline 12282\\+\;4094\\\hline 63222\end{array}$$

$\frac{n(n+1)}{2}$

$\frac{15\cdot\cancel{16}^{8}}{\cancel{2}}=$

$$\begin{array}{r}15\\\times\;8\\\hline 120\end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|ax-2a| \le \sqrt{x-1} \;\Big|^2$, т.к. обе части неотр. ОДЗ: $x \ge 1$.

$a^2(x-2)^2 \le x-1$

$a^2x^2 - 4a^2x + 4a^2 \le x-1$ $\qquad a=0$

$a^2x^2 - x(4a^2+1) + \cancel{4a^2+1} \le 0.$

$\cancel{x = 4a^2 -}$ $\qquad x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{D}}{a^2} = \frac{\sqrt{(4a^2+1)^2 - 20a^2}}{a^2} =$

$= \frac{\cancel{16a^4 - 12a^2 + 1}}{a^2}$

$4a^2+1$

$x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{(4a^2+1)^2 - (4a^2+1)4a^2}}{a^2} =$

$= \frac{\sqrt{(4a^2+1)(\cancel{4a^2}+1-\cancel{4a^2})}}{a^2} = \frac{\sqrt{4a^2+1}}{a^2}.$

$\frac{7}{4b^2} + b^2 = 2 \,|\cdot b^2$ $\qquad x_2 - x_1 = 3$

$\frac{\sqrt{4a^2+1}}{a^2} = 3$ $\qquad 4a^2+1 = 3a^4$

$\frac{7}{4} + b^4 - 2b^2 = 0$ $\qquad \sqrt{7}$

$2+\sqrt{7} > a^2$ $\qquad 1-$ $\qquad 3a^4 - 4a^2 - 1 = 0$

$\frac{\sqrt{7}}{2}$ $\qquad \frac{D}{4} = 4+3 = 7$

$\begin{cases} a^2+b^2 = 2 \\ 2ab = \sqrt{7} \end{cases}$

$a^2 = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3} \Rightarrow a^2 = \frac{2+\sqrt{7}}{3}.$

$a^2 = \frac{7}{4b^2}$ $\qquad \vee 0$

$a = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{7}}{3}}.$

x раб - 28 дней
$(x+2)$ раб

~~$x \cdot t$~~

28 дней = $\frac{28}{t}$ $28 \cdot t$ часов работы

~~t - работа в~~
~~П - производительность рабочего~~
t - время, ~~затрачиваемое~~ на работу в день.
~~x - кол-во рабочих.~~
τ - суммарное время, затраченое сугубо на работу.
n - кол-во дней работы

$\cancel{П} x \cdot \tau = \cancel{P}$

$\tau = n \cdot t$

$x \cdot 28t$

$(x+2) \cdot 21 \cdot (t+1) = const.$

$(x+6)(t+2) \cdot 15 = const.$

$21(x+2)(t+1) = (x+6)(t+2) \cdot 15 = x \cdot 28 \cdot t.$

$$\begin{cases} 7(x+2)(t+1) = 5(x+6)(t+2) \\ 3(x+2)(t+1) = 4xt. \end{cases}$$

$\cancel{7xt} + \cancel{14t} + \cancel{7x} + \cancel{14} = \cancel{5xt} + \cancel{30t} + \cancel{10x} + \cancel{60}.$

$2xt + 8 = 16t + 3x + 46$

$3xt + 6t + 3x + 6 = 4xt.$

$xt = 6t + 3x + 6$

$\cancel{12t} + \cancel{6x} + \cancel{12} = \cancel{16t} + \cancel{3x} + \cancel{46}$

$3x = \frac{4t+34}{3}$ $t = \frac{3x-34}{4}$

$\cancel{12t} + \cancel{6x} + 12 + 2 = \cancel{16t} + \cancel{3x}$

$3x + 14 = 4t.$ $\Rightarrow t \neq 2$

$3\frac{4t-14+6}{3}(t+1) = \frac{4}{3}(4t-14)t.$ $x = \frac{4t-14}{3}.$

$(4t-8)(t+1) = \frac{4}{3}(4t-14)t.$ $3(t-2)(t+1) = 4t^2 - 14t$

$3t^2 - 3t - 6 = 4t^2 - 14t.$

$t^2 - 11t + 6 = 0$

$\frac{3x^2 - 34x}{4} = \frac{9x - 102}{2}$ +

$+3x + 6$

$-\frac{102}{36}$

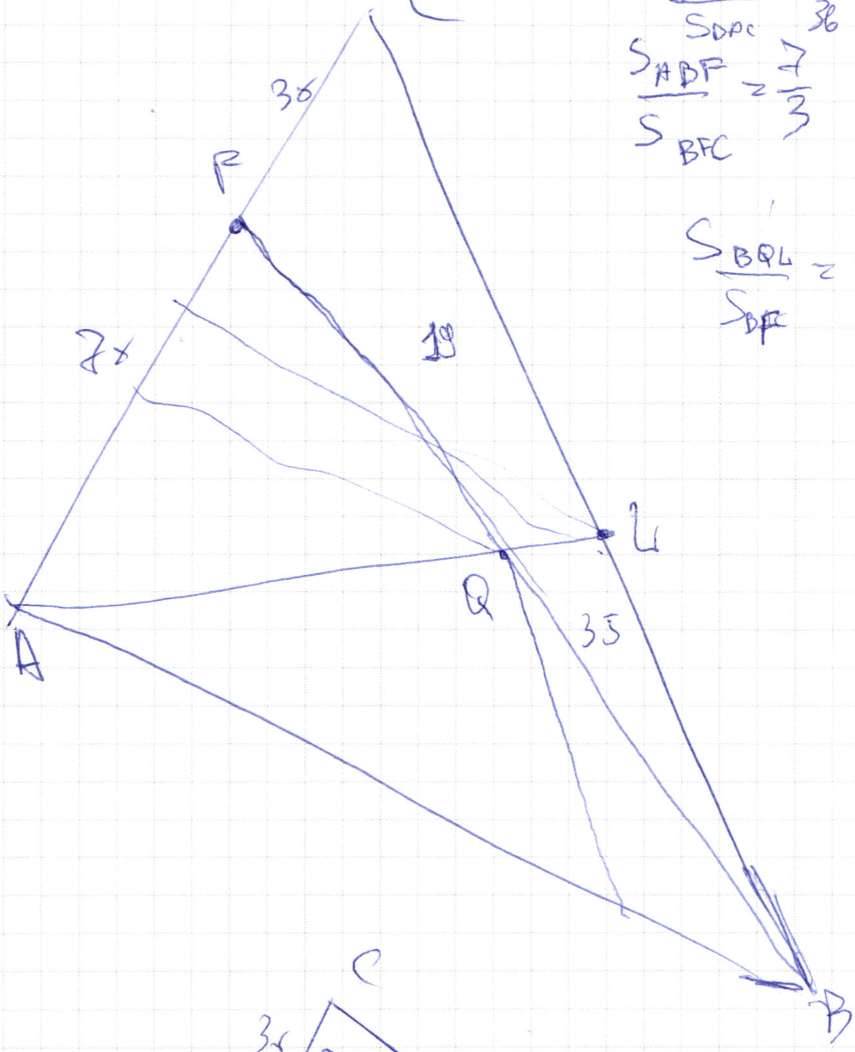
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

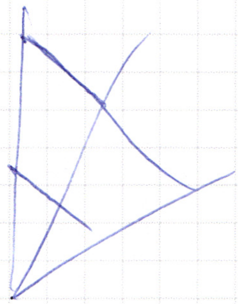
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

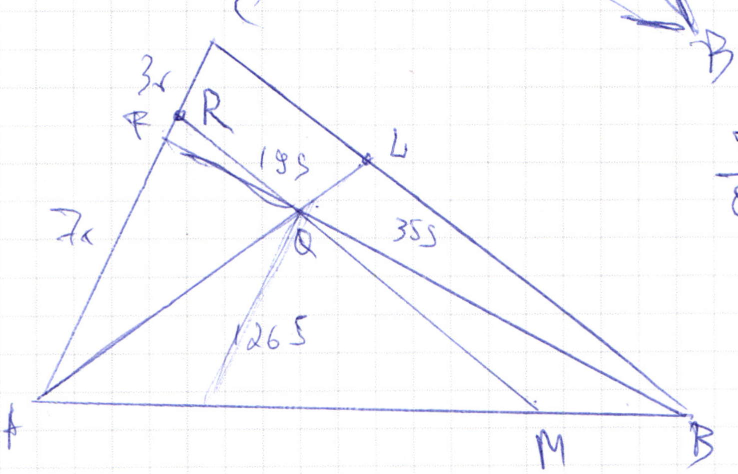
$$\frac{S_{BQL}}{S_{DPC}} = \frac{7}{36}$$

$$\frac{S_{ABF}}{S_{BFC}} = \frac{7}{3} \qquad \frac{S_{BAC}}{S_{BFC}} = \frac{10}{3}$$

$$\frac{S_{BQL}}{S_{BF}} = \frac{7}{\cancel{36}_{18}} \cdot \frac{\cancel{10}^{5}}{3} = \frac{35}{54}.$$







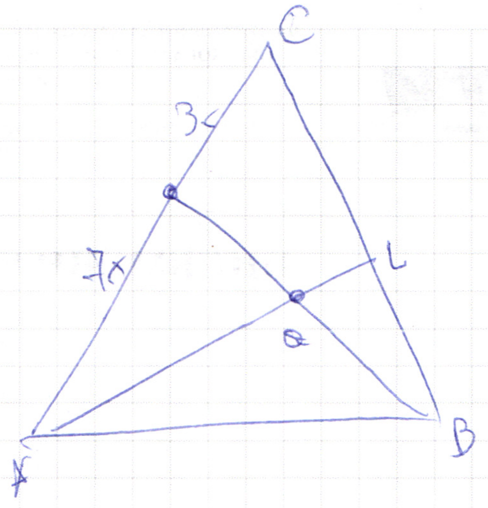
$$\frac{FQ}{QB} = \frac{S_{FQA}}{S_{BQA}}$$

$FQ \cdot Q$

$FQ \cdot QA$

$\underline{RQ}$ $\quad \frac{QM \cdot QB}{QR \cdot FQ}$

$|x-2| \leq \sqrt{x-1}$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

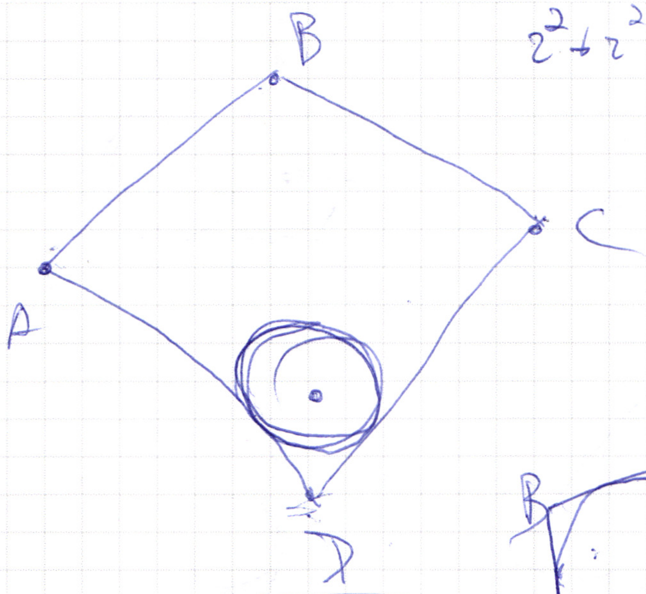
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-20

ШИФР

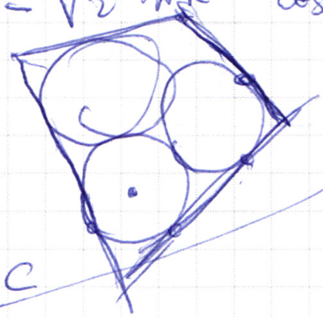
(заполняется секретарём)

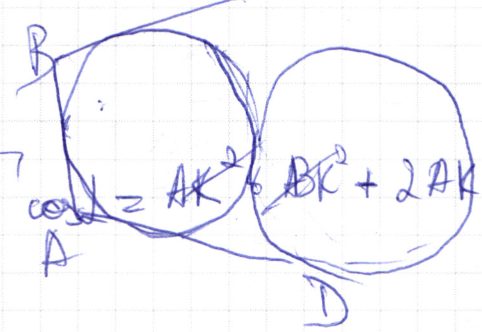
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



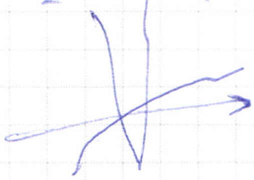
$z^2+z^2+\cancel{AK^2}-2z\sqrt{z^2+AK^2}\cos\alpha=\cancel{AK^2}$

$z=\sqrt{z^2+AK^2}\cdot\cos\alpha$

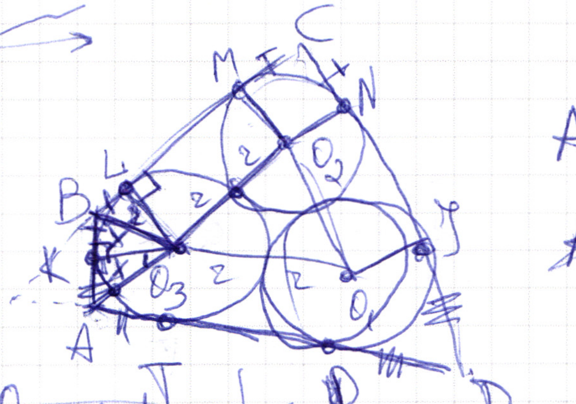




$z^2+\cancel{BK^2}+z^2+\cancel{AK^2}-2\sqrt{(z^2+BK^2)(z^2+AK^2)}\cos\alpha=\cancel{AK^2}+\cancel{BK^2}+2AK\cdot BK$



$2+\sqrt{7}$



$AD+BC-AB-CD=24$

$\cancel{AT}+2z+\cancel{RD}+\cancel{BL}+\cancel{2z}+\cancel{MC}-$
$-\cancel{AK}-\cancel{KB}-\cancel{CN}-\cancel{2z}-\cancel{JD}=24$

$z=12.$

$BO_3\cdot AO_3\cdot\sin\alpha=\sqrt{(z^2+\cancel{BK^2})(z^2+\cancel{AK^2})}$

$\cancel{AX\cdot 2z=AK^2}$

$\cancel{AK=\frac{AK^2}{2z}}\to AO_3=\frac{AK^2+2z^2}{2z}$

$AX\cdot(AX+2z)=AK^2$

$BY\cdot(BY+2z)=BK^2$

$AX^2+2z\cdot AX-AK^2=0\to$

BY

$BO_3=\sqrt{z^2+BK^2}$

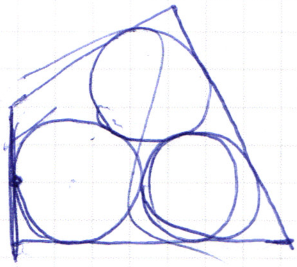
$AO_3=\sqrt{z^2+AK^2}$

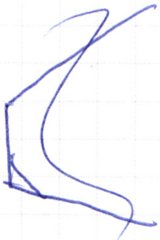
$\to AX=-z+\sqrt{z^2+AK^2}$

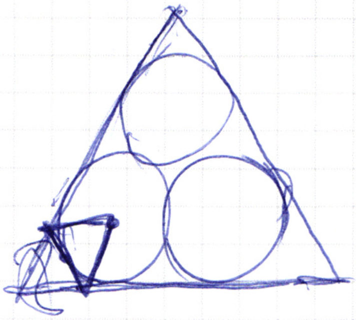
$BY=\sqrt{z^2+BK^2}-z.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



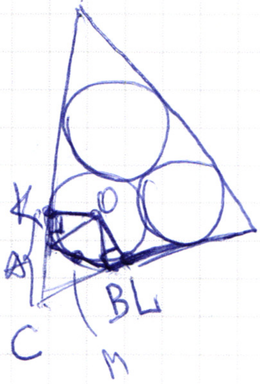




$30x$

$3x^2-34x=18x-$

$-204+12x+24$



27

540

$180=9\cdot 10\cdot 2$

$3x^2-64x+180=0$

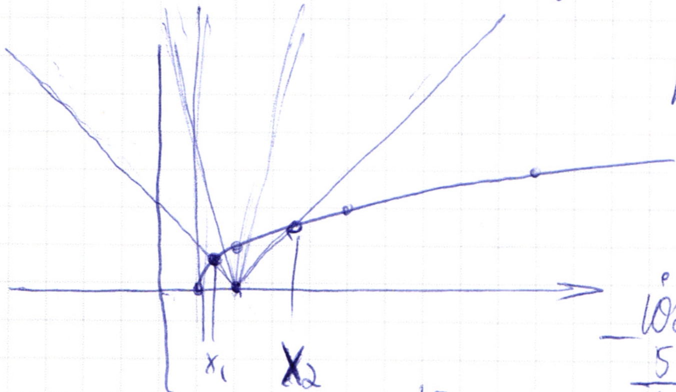
$\frac{D}{4}$ $D=8^4-$

$|ax-2a|\le\sqrt{x-1}$

$|a|\cdot|x-2|\le\sqrt{x-1}$

$\frac{D}{4}=\sqrt{2^{10}-180\cdot 3}$

$1024-540=$



$x-2=\sqrt{x-1}$

$\sqrt{484}=\sqrt{4\cdot 121}=$

$=2\cdot 11.$

$$\begin{array}{r} 1024 \\ -\ 540 \\ \hline 484 \end{array}$$

$$x=\frac{32\pm 22}{3}=\left[\begin{array}{l}\frac{10}{3}\ \varnothing \\ \frac{54}{3}=18.\end{array}\right.$$

Відп. 18.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

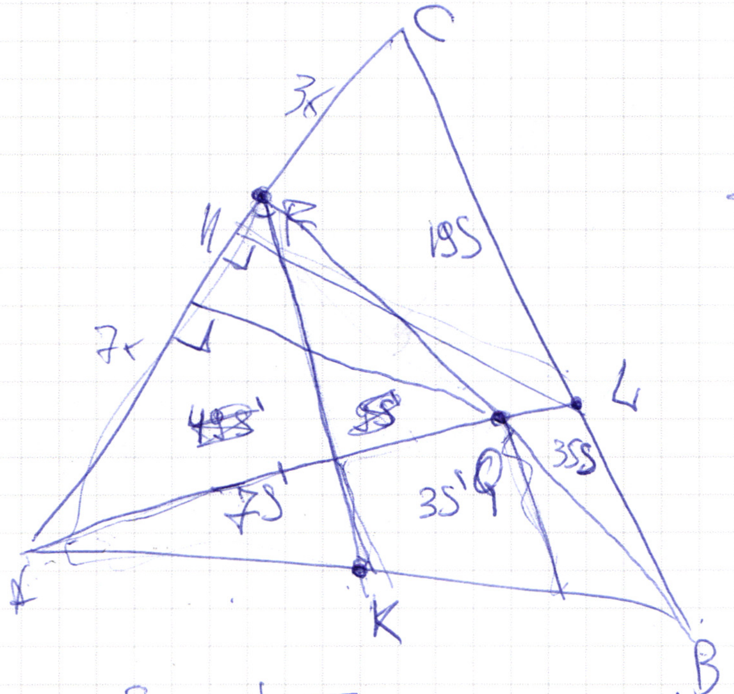
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

9-20
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.



$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{7}{36}$.

$S_{BAC} = \frac{36 \cdot 35S}{7} = 180S$

$S_{ABF} = \frac{1}{2} AF \cdot FB \cdot \sin\alpha$

$S_{BFC} = \frac{1}{2} FC \cdot FB \cdot \sin(180^\circ - \alpha)$

$\frac{S_{ABF}}{S_{BFC}} = \frac{AF}{FC} = \frac{7}{3}$.

$\frac{S_{ABF} + S_{BFC}}{S_{BFC}} = \frac{7}{3} + 1 = \frac{10}{3}$.

$\frac{AF \cdot AQ \cdot BQ}{AC \cdot \cancel{AL}} = \frac{FQ \cdot AQ \cdot AB}{\cancel{AL} \cdot AB}$

$\frac{S_{BAC}}{S_{BFC}} = \frac{10}{3}$.

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} \cdot \frac{S_{BAC}}{S_{BFC}} = \frac{7}{36} \cdot \frac{10}{3} = \frac{35}{54}$.

$\frac{AF \cdot BQ}{AC}$

$\frac{S_{AFQ}}{S_{FQL}} = \frac{FQ \cdot AQ}{S_{FQL}}$

$108S' + 54S = 180S$

$108S' = 126S$

$S_{AFQ} = \frac{S_{BQL}}{QL \cdot QB} \cdot FQ \cdot AQ$

$S' = 12{,}6S$

$S_{FQL} = \frac{S_{BQL} \cdot FQ}{QB}$

AQ

15

180S

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$[1;30]$, $[31;60]$, $[61;90]$, $[91;120]$.

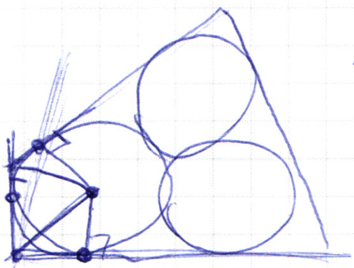
a

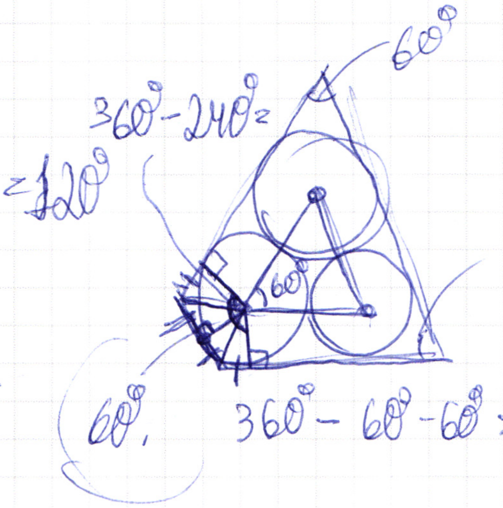
$\cancel{120\cdot 6 + 90\cdot 6 + 60\cdot 6 + 30\cdot 6}$

$120\cdot 6$

$\frac{5}{2}$

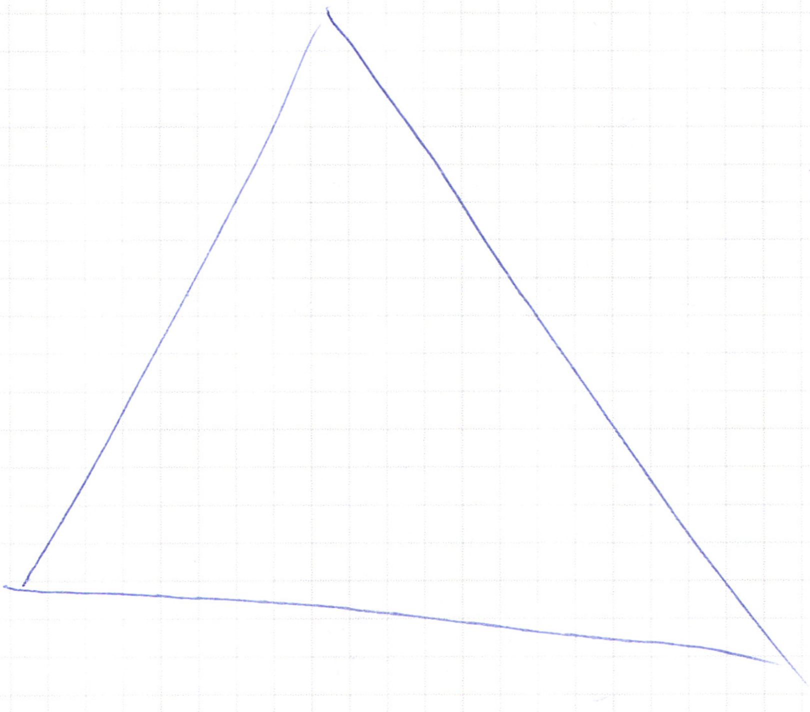
$\overset{7}{2}+\overset{8}{5}+1$.





$360^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 240^\circ$

$+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}+1=4.$



☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)