

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО  
МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 3

ШИФР

12-003

Заполняется ответственным секретарем

- ✓1. Парабола  $y = 2x^2 - 5x + 1$  пересекает прямые  $y = -1$ ,  $y = 4$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
- ✓2. Найдите количество 16-значных чисел, содержащих только цифры “3”, “4” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “9” ровно четыре, и они идут подряд.
3. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ .
- а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 24$ .
- б) Найдите угол  $AOB$ , где  $O$  – центр окружности  $\omega_3$ .
- ✓4. При каких значениях параметра  $a$  решением неравенства  $|ax - 2a| \leq \sqrt{x - 1}$  является отрезок длины 3?
5. Несколько рабочих выполняют работу за 28 дней. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 21 день. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 15 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 7 : 3$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как  $7 : 36$ . Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 3.
- ✓7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 30]$ ,  $[31; 60]$ ,  $[61; 90]$ ,  $[91; 120]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 30. Какое наибольшее значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.  $y = 2x^2 - 5x + 1$   
 $y = -1; y = 4; y = a$

Найдем точки пересечения прямой  $y = -1, y = 4,$   
с параболой, для этого в  $y = 2x^2 - 5x + 1$ , подставим  
 $-1$ , а затем  $4$ , вместо  $y$ :

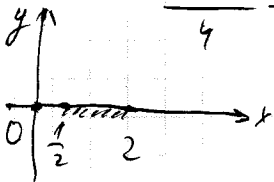
$$-1 = 2x^2 - 5x + 1$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$x_1 = \frac{5 + 3}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{5 - 3}{4} = \frac{1}{2}$$



$\Rightarrow$  это значит  
прямая пересекет  
параболу в двух точках,  
а функция отрезка между  
этими точками:  $2 - \frac{1}{2} = 1,5$

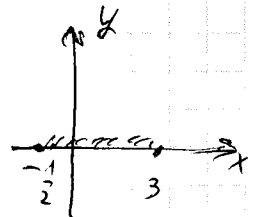
$$4 = 2x^2 - 5x + 1$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$D = 25 + 24 = 49$$

$$x_1 = \frac{5 + 7}{4} = 3$$

$$x_2 = \frac{5 - 7}{4} = -\frac{1}{2}$$



значит прямая пересекет  
параболу в двух точках,  
а функция отрезка между  
этими точками  $3 - (-\frac{1}{2}) = 3,5$

$y$  нас есть 2 стороны треугольника,  
нужно найти третью, зная, что треугольник - прямоугольни-  
кий. Т.к. в треугольнике сторонами  $a$  и  $b$

$$\begin{cases} a + b \geq c \\ b + c > a \\ c + a > b \end{cases} \text{ то возможно}$$

линия:

$$\text{Когда } \begin{cases} a > b \\ a > c \end{cases} \begin{cases} b > a \\ b > c \end{cases} \text{ где}$$

мы  
параметр,  
 $a, b, c$  - отрезки  
 $1,5$  и  $3,5$

Тогда: кот. Параллельно

$$a^2 + 1,5^2 = 3,5^2; a = \sqrt{3,5^2 - 1,5^2} = \sqrt{10}$$

$$3,5^2 + 1,5^2 = a^2; a = \sqrt{3,5^2 + 1,5^2} = \sqrt{14,5}$$

значит, при  $a = \sqrt{10}$ , при  $a = \sqrt{14,5}$  из этих отрезков  
можно составить прямоугольный треугольник.

Ответ:  $\sqrt{10}; \sqrt{14,5}$

2. Пусть в начале все 9 стоек групп за группой в начале шила:

9999 ..... , тогда количество таких шил  $n = 12!$ , т.к.  $10 - 4 = 12$ .

Затем, сдвинув 9999 на одно шило вправо, кол-во шил  
останется такое же равно  $12!$ , потому что еще ~~сдвинут~~ таких шил  
вдвое больше, вместе с первыми. Количество таких перестановок

$12$ , тогда общее количество перестановок:  $12! \cdot 12 = 11! \cdot 12^2$

Ответ:  $12! \cdot 12$

$$4. |ax - 2a| \leq \sqrt{x-1}$$

$$\text{ОРЗ: } x-1 \geq 0; \quad x \geq 1$$

$$|a(x-2)| \leq \sqrt{x-1}$$

$$\begin{cases} a(x-2) \leq \sqrt{x-1} & \text{при } a(x-2) \geq 0 \\ a(x-2) \geq -\sqrt{x-1}, & a(x-2) \leq 0 \end{cases}$$

минимально возможный  $x=1$ , тогда концы максимально возможного промежутка:  $\frac{1}{2}$ , тогда  $a \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Заметим, что для больших значений  $x$ , промежуток  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$  будет ужиматься. Тогда, при  $x \geq 1$ ,  $a \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ , применим  $a$  из этого промежутка будут заканчиваться линия (т.е.  $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$ )

Ответ:  $a \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ ,  $a$  - только заканчивающиеся числа

или  $-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}$  (т.е.)

4. Максимальное значение у этой функции будет  $\frac{1}{2}$ , а тогда у нас линия будет самой большой, т.е.

$$S = 30 + 29 + 28 + 27 + 26 + 25 + 60 + 59 + 58 + 57 + 56 + 55 + 90 + 89 + 88 + 87 + 86 + 85 + 120 + 119 + 118 + 117 + 116 + 115 = 165 + 395 + 525 + 405 = 1440$$

Ответ: 1440.

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{n \cdot 28}{x} = \frac{(n+2) 21}{x+1}; \quad 28nx + 28n = 21nx + 42x; \quad 7nx + 28n = 42x$$

$$\underline{nx + 4n = 6x}$$

$$\frac{n \cdot 28}{x} = \frac{(n+6) 15}{x+2}; \quad 28nx + 56n = 15nx + 90x; \quad 13nx + 56n = 90x$$

$$\frac{(n+6) 15}{x+2} = \frac{(n+2) 21}{x+1}; \quad 5(x+1)(n+6) = 7(x+2)(n+2)$$

$$5xn + 30x + 5n + 30 = 7xn + 14x + 14n + 28$$

$$\begin{array}{r} -224 \\ 90 \\ \hline 134 \\ 26 \end{array}$$

$$2xn + 9n = 2 + 16x$$

$$-xn + 4n = 6x$$

$$2(6x - 4n) + 9n = 2 + 16x$$

$$12x - 8n + 9n = 2 + 16x$$

$$\underline{n = 2 + 4x}$$

$$13(2+4x)x + 56(2+4x) = 90x$$

$$26x + 52x^2 + 112 + 224x = 90x$$

$$52x^2 + 160x + 112 = 0$$

$$26x^2 + 80x + 56 = 0$$

$$13x^2 + 40x + 28 = 0$$

$$D = 1600 - 28 \cdot 13 \cdot 4 = 1600 - 1456 = 144$$

$$x_1 = -40 + 12$$

$$x_2 =$$

$$\begin{array}{r} \times 28 \\ 13 \\ \hline 84 \\ 28 \\ \hline 364 \\ 4 \\ \hline 1456 \end{array}$$

$$\frac{n \cdot 28}{x} = A$$

$$\frac{(n+2) 21}{x+1} = A$$

$$\frac{(n+6) 15}{x+2} = A$$

$$\frac{n \cdot 28}{x} = \frac{(n+2) 21}{x+1}; \quad 28nx + 28n = 21nx + 42x; \quad 7nx + 28n = 42x$$

$$\underline{nx + 4n = 6x}$$

$$\frac{n \cdot 28}{x} = \frac{(n+6) 15}{x+2}; \quad 28nx + 56n = 15nx + 90x; \quad 13nx + 56n = 90x$$

$$13nx + 56n = 90x$$

$$\frac{(n+2) 21}{x+1} = \frac{(n+6) 15}{x+2}; \quad 7(x+2)(n+2) = 15(x+1)(n+6)$$

$$2(14n + 12x + 42n + 84) = 15(5n + 6x + 6n + 6)$$

$$12x - 8n + 9n = 2 + 16x$$

$$\underline{n = 2 + 4x}$$

$$\frac{n-2}{4} = x$$

$$2xn + 9n = 2 + 16x$$

$$nx + 4n = 6x$$

$$2(6x - 4n) + 9n = 2 + 16x$$

$$\frac{A}{t} = N = n$$

$$n \times 28 = A$$

$$(n+2)(x+1)21 = A$$

$$(n+6)(x+2)15 = A$$

$$n \times 28 = 21nx + 21n + 42x + 42; \quad nx = 3n + 6x + 6$$

$$n \times 28 = 15nx + 30n + 30x + 180; \quad 13nx = 30n + 30x + 180$$

$$(n+2)(x+1)21 = (n+6)(x+2)15$$

$$(n+2)(x+1)7 = (n+6)(x+2)5$$

$$7nx + 7n + 7x + 7 = 5nx + 10n + 30x + 60$$

$$2nx = 3n + 6x + 56$$

$$nx = 3n + 6x + 6$$

$$13nx = 30n + 90x + 180$$

$$2(3n+6x+6) = 3n+6x+56$$

$$6n+12x+12 = 3n+6x+56$$

$$3n = 4x + 44$$

$$\frac{3n-44}{4} = x$$

$$13n \cdot \frac{3n-44}{4} = 30n + 90 \cdot \frac{3n-44}{4} + 180$$

$$13n(3n-44) = 120n + 90(3n-44) + 180$$

$$39n^2 - 572n = 120n + 420 + 270n - 3960$$

$$39n^2 - 572n - 120n - 270n + 3960 - 420 = 0$$

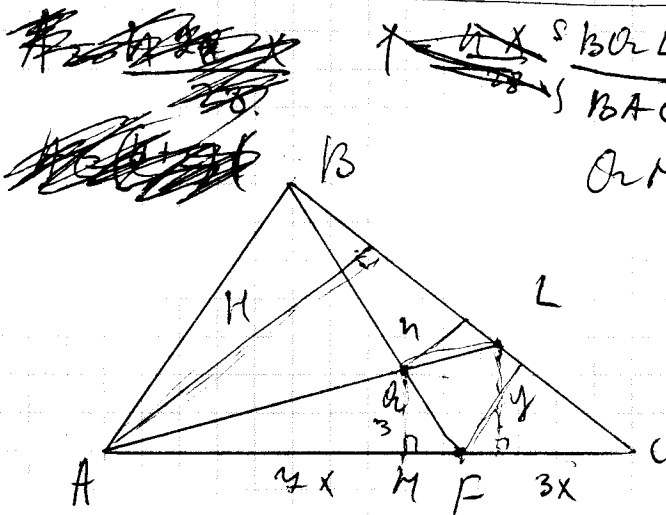
$$39n^2 - 962n + 3240 = 0$$

$$3n^2 - 44n +$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ + 13 \\ \hline 132 \\ \times 44 \\ \hline 542300 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 390 \\ + 572 \\ \hline 962 \\ 3240 \\ \hline 3960 \\ - 3960 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3240 \\ - 26 \\ \hline 84 \\ - 52 \\ \hline 120 \\ 117 \\ \hline 30 \end{array}$$



$$\frac{BC}{BL}$$

$$\frac{1}{2} M \cdot BC = \frac{44}{30} \cdot \frac{36}{4}$$

$$\frac{1}{2} h \cdot BL$$

$$\frac{h \cdot BL}{M \cdot BC} = \frac{36}{4}$$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$S_{ALC} = S_{AOL} + S_{POL} \quad \left| \quad S_{FBC} = S_{OZBL} + S_{II} \right.$$

$$\frac{1}{2} y \cdot 10x = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4x + S_{II} \quad \left| \quad \frac{1}{2} BC \cdot h \right.$$

$$\frac{h}{2} = \frac{BL}{BC} = \frac{S_{FBC} - S_{II}}{S_{ALC}} = \frac{4}{36}$$

$$S_{FBC} - \frac{4}{36} S_{ALC} = S_{II}$$

$$\frac{BC}{2} \cdot 2 - \frac{4}{36} \cdot \frac{BC}{2} \cdot h$$

$$\frac{10x \cdot y}{2} = \frac{h \cdot Lc}{2}$$

$$10x \cdot y = h \cdot Lc$$

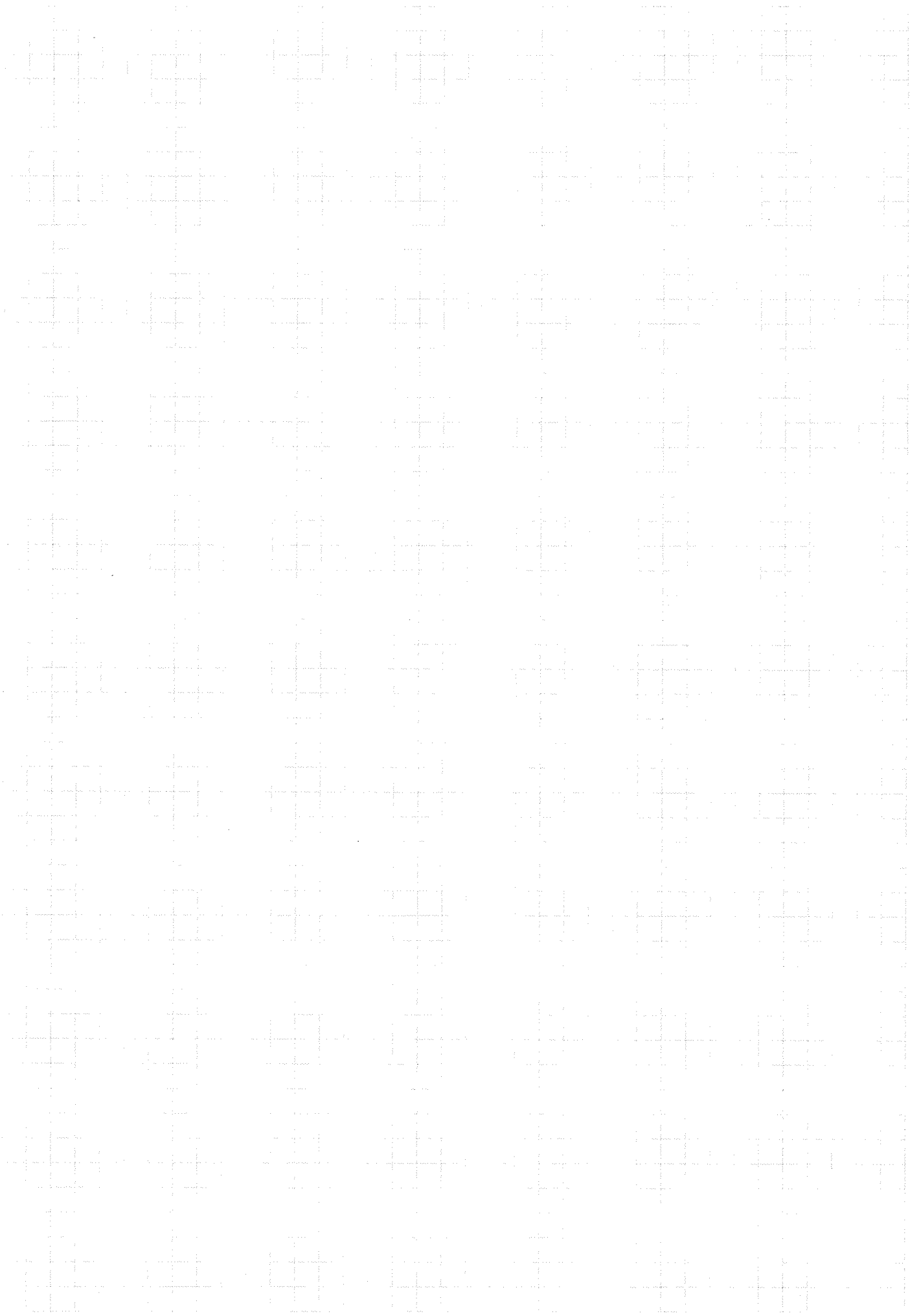
36) ~~4300~~ + ~~510~~

$$65 \times 345 + 525 + 405 =$$

$$\begin{array}{r} 65 \\ \times 345 \\ \hline 325 \\ 2250 \\ 20250 \\ \hline 22500 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1035 \\ + 1440 \\ \hline 2475 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 310 \\ 490 \\ 550 \\ \times 120 \\ \hline 640 \end{array}$$



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = 2x^2 - 5x + 1$$

$$x_0 = \frac{5}{4}; y_0 = 2 \cdot \frac{25}{16} - \frac{5 \cdot 5}{4} + 1 =$$

$$= \frac{25}{8} - \frac{25}{4} + 1 = \frac{25}{8} - \frac{25}{8} + \frac{8}{8} = \frac{8-25}{8} = -\frac{17}{8}$$

$$-1 = 2x^2 - 5x + 1$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$$

$$x_1 = \frac{5+3}{4} = \frac{2}{1} = 2$$

$$x_2 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$y = 2x^2 - 5x + 1$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$D = 25 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 + 24 = 49$$

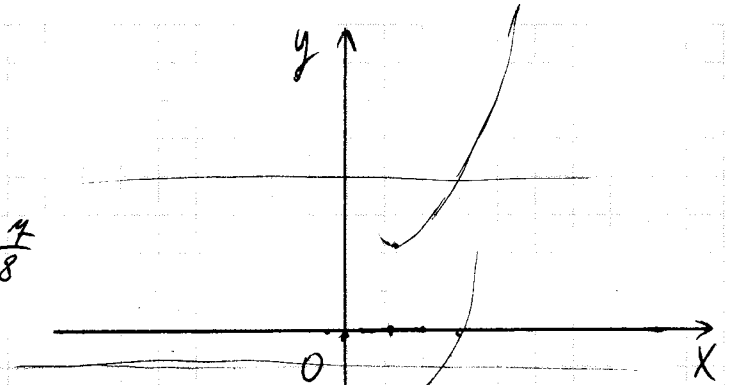
$$x_1 = \frac{5+7}{4} = 3$$

$$x_2 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$1,5^2 + 3,5^2 = a^2$$

$$a = \sqrt{1,5^2 + 3,5^2}$$

$$1,5^2 + a^2 = 3,5^2; a = \sqrt{3,5^2 - 1,5^2} = \sqrt{(3,5-1,5)(3,5+1,5)} = 2$$



$$n \frac{n-2}{4} + 4n = \frac{8(n-2)}{2}$$

$$n^2 - 2n + 16n = \frac{12n - 24}{2}$$

$$n^2 + 14n = 6n - 12$$

$$n^2 + 8n + 12 = 0$$

$$|ax - 2a| \leq \sqrt{x-1}$$

$$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

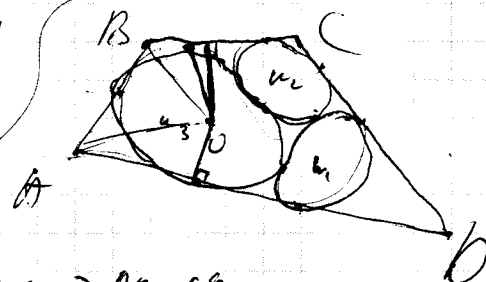
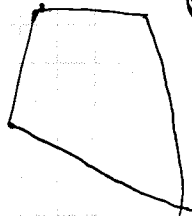
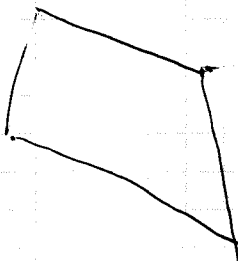
$$x \geq 1$$

$$|a(x-2)| \leq \sqrt{x-1}$$

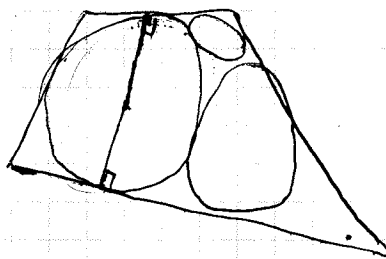
$$a(x-2) \leq \sqrt{x-1}$$

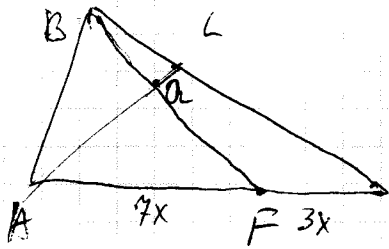
$$a^2 \leq \frac{x-1}{(x-2)^2}$$

28



$$AB + BC - AC - CO = 24$$





$$\begin{array}{r}
 +59 \\
 28 \\
 \hline
 87 \\
 +24 \\
 \hline
 111 \\
 +164 \\
 \hline
 275
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 +224 \\
 59 \\
 \hline
 283 \\
 +58 \\
 \hline
 341 \\
 +54 \\
 \hline
 395
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 +398 \\
 90 \\
 \hline
 488
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 +488 \\
 80 \\
 \hline
 568
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 3,5 \\
 3,5 \\
 \hline
 12,25
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 +145 \\
 105 \\
 \hline
 250
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &= 35(10+10+10+5) = \\
 &= 350 \cdot 3 + 165 = 1150 + 165 = \\
 &= 1315
 \end{aligned}$$

~~$$30+29+28+27+60+59+58+57+80+89+88+87+120+119+118+117$$~~

$$|ax-2a| \leq \sqrt{x-1} \quad \frac{398}{4} \quad |a(x-2)| \leq \sqrt{x-1}$$

$$\begin{aligned}
 \text{OДЗ: } x-1 &\geq 0 \\
 x &\geq 1
 \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx \frac{1,7}{2} \approx 0,85$$

$$\frac{2}{3} \approx \frac{2}{3} \approx 0,66$$

$$\begin{cases}
 a(x-2) \leq \sqrt{x-1} \\
 a(x-2) \geq -\sqrt{x-1}
 \end{cases}$$

$$\frac{-\sqrt{3}}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$n$	$x$	28	$  \begin{cases}  A = \frac{(n+2)(x+1)}{21} \\  A = \frac{n \cdot x}{28} \\  A = \frac{(n+4)(x+2)}{15}  \end{cases}  $
$n+2$	$x+1$	21	
$n+4$	$x+2$	15	

$$\begin{aligned}
 \frac{(n+2)(x+1)}{21} &= \frac{n \cdot x}{28} \\
 28nx + 28n + 56x + 56 &= 21nx \\
 28n + 56x + 56 - 21nx &= 0
 \end{aligned}$$

$$\frac{n \cdot x}{28} = \frac{(n+4)(x+2)}{15}$$

$$\begin{aligned}
 15nx &= 28nx + 56n + 112x + 224 \\
 112x + 56n + 224 + 13nx &= 0
 \end{aligned}$$

$$\frac{(n+2)(x+1)}{21} = \frac{(n+4)(x+2)}{15}$$

$$15nx + 15n + 30x + 30 = 21nx + 42n + 84x + 168$$

$$6nx +$$

$n$	$x$	28	$\frac{145}{3,5}$
$n+2$	$x+1$	21	$\frac{3,5}{1,5}$

$$\frac{x}{28}$$

$$\frac{n \cdot x}{28} = A$$

$$\begin{aligned}
 &\sqrt{(3,5+1,5)^2 - 3,5 \cdot 1,5} = \\
 &= \sqrt{25 - 5,25}
 \end{aligned}$$

$$\frac{(n+2)(x+1)}{21} = A$$

$$\frac{n \cdot 28}{x} = A$$

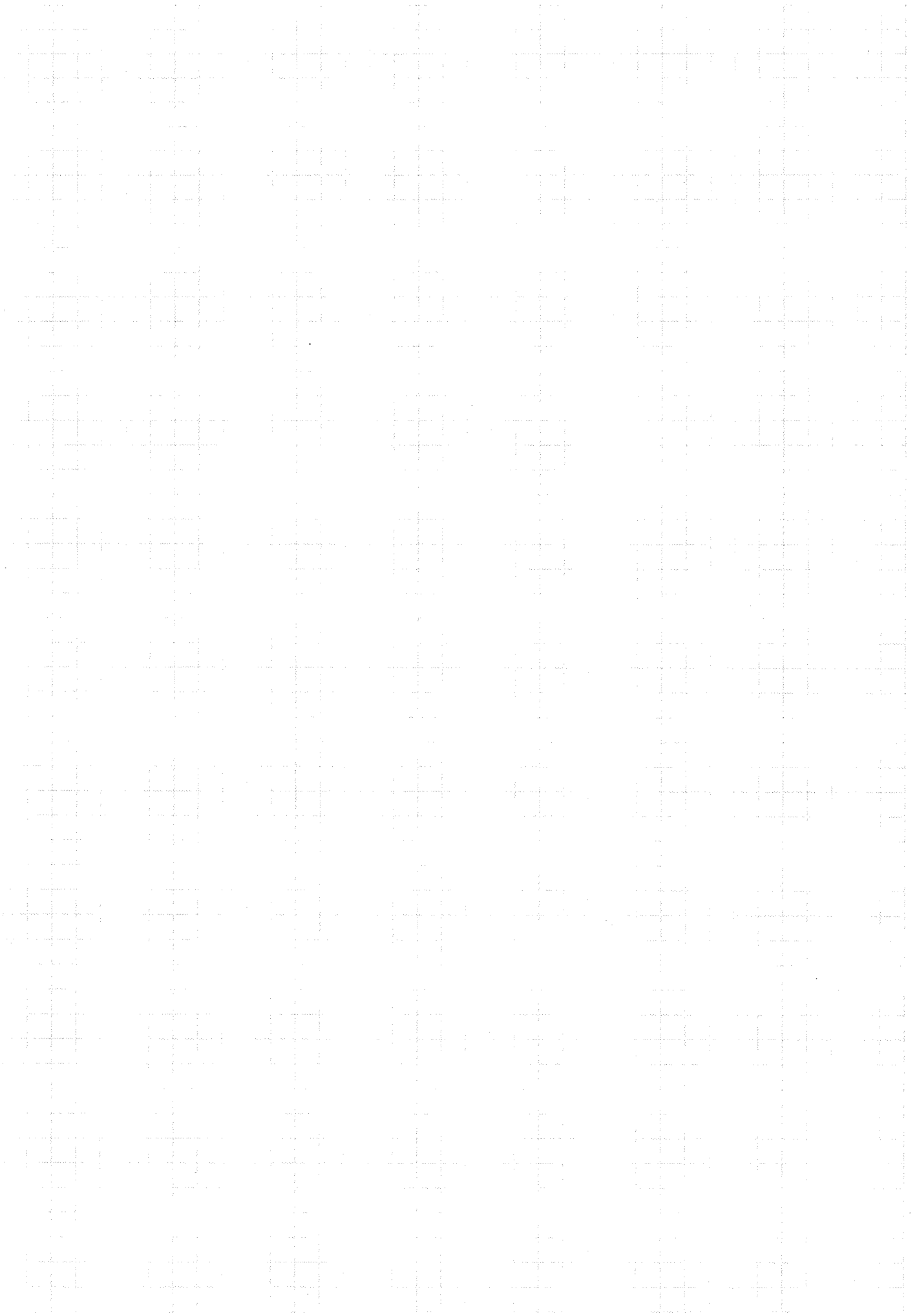
$$\frac{(n+2) \cdot 21}{(x+1)} = A$$

$$\frac{(n+6) \cdot 15}{(x+2)} = A$$



ШИФР (заполняется секретарём)
----------------------------------

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)