

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 4

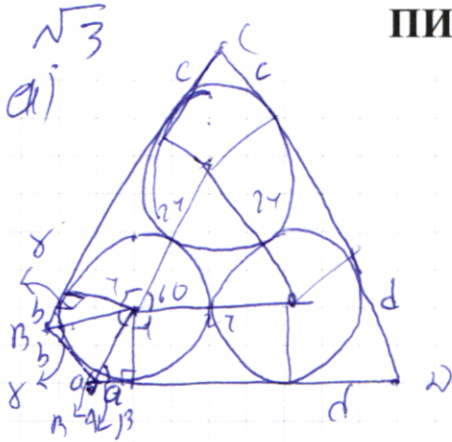
ШИФР

11-012

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 3x^2 - 4x + 2$ пересекает прямые $y = 17$, $y = 1$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Найдите количество 20-значных чисел, содержащих только цифры "1", "5" и "6" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно десять, и они идут подряд.
3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 38$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - a| \leq \sqrt{x - 2}$ является отрезок длины 1?
5. Несколько рабочих выполняют работу за 21 день. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 15 дней. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 10 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 7$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $8 : 21$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 13.
7. Пиноккио выбрал по 7 целых чисел из каждого промежутка $[1; 50]$, $[51; 100]$, $[101; 150]$, $[151; 200]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 50. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати восьми выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$AD + BC - AB - CD = 38$$

$$a + 2r + d + b + 2r + c - a - b - c - d - 2r = 38$$

$$2r = 38$$

$$r = 19$$

б) $\delta + \beta + \alpha = 180$

$$+ \begin{cases} 90 - \delta + 90 - \beta + \alpha = 120 \end{cases}$$

$$180 + 2\alpha = 300$$

$$2\alpha = 120$$

$$\alpha = 60^\circ$$

в) $\sqrt{5}$

S - сколько часов должна работать работница

T - сколько часов работает за весь срок работы

N - число работниц

$$\frac{S}{2N} = 21; \quad \frac{S}{(N+7)(2+1)} = 15; \quad \frac{S}{(N+4)(2+1)} = 10$$

$$\frac{S}{(N+7)(2+1)} = \frac{15}{10} \Rightarrow \frac{N+4}{N+7} = \frac{3}{2}; \quad 2N+8 = 3N+6$$

$$N = 2$$

Ответ: всего 2 работниц.

№ 6

~~$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3^7$~~ → По правилу произведения можно найти:
 $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3^7 = 13122$ чисел
Ответ: 13122.

№ 7

~~Максимальная сумма равна:~~

№ 7

Чтобы сумма была максимальной нужно подобрать такие числа 50, 49, 48, 47, 46, 45, 44 и 99, 96, 93, 90, 87, 84, 81, и 148, 145, 142, 139, 136, 133, 130 и ~~197, 194, 191, 188, 185, 182, 179~~ и их сумма равна $\frac{30+44}{2} + \frac{99+81}{2} + \frac{148+136}{2} + \frac{97+145}{2} = 3248$.

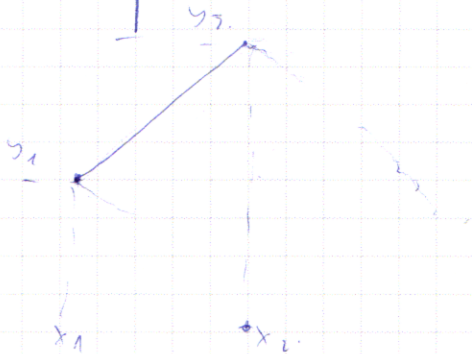
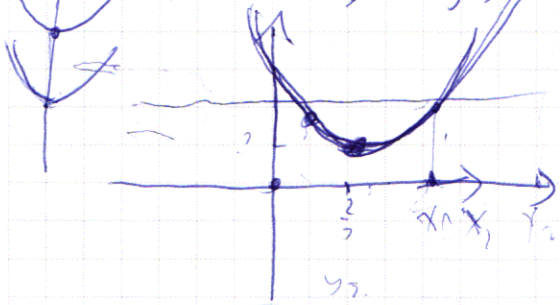
№ 6

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2 + 2 = y$ $(x_2)^2 = y$

$y = 3x^2 - 4x + 2 = 3(x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} - \frac{4}{9} + \frac{2}{3}) = 3(x - \frac{2}{3})^2 + \frac{2}{3}$; $\frac{4}{9} + \frac{2}{3} = 2$

$y = 3(x - \frac{2}{3})^2 + \frac{2}{3}$; $x_0 = \frac{2}{3}$; $y_0 = \frac{2}{3}$



156 7 8 6 0
4 1 1 4 8 5
5 5 5 5 6 1
6 6 6 5 1 6
 8 1 3
 2 5 1

1 5 6
1 1 1
5 5

3 1 7 = 1 1 3 7

6 1 3 7

$3^3 = 27$; $3^4 = 81$; $3^5 = 243$; $3^6 = 729$; $3^7 = 2187$

$N = 13122$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

9 2/9

$$\frac{24}{24} = \frac{120}{360}$$

$$\frac{24}{24} = \frac{48}{504}$$

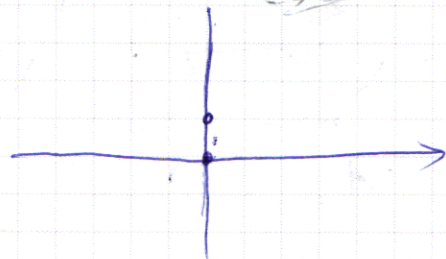
$$\frac{S}{9M} = 2 \cdot 10 \cdot 24, \quad \frac{S}{(M+2)(2+1)} = 15 \cdot 24, \quad \frac{S}{(M+4)(2+1)} = 10 \cdot 24.$$

$$S = 504M, \quad S = 360(M+2)(2+1) = 360M + 360M + 720 + 360$$

$$5 \cdot 049M = 360M + 360M + 720 + 360$$

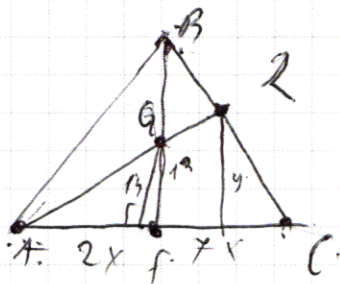
$$\frac{S}{(M+2)(2+1)} = \frac{360M + 720}{(M+2)(2+1)}$$

$$\frac{S}{(M+4)(2+1)} = 10 \cdot 24$$



$$\frac{M+4}{M+2} = \frac{15}{10}; \quad 10M + 40 = 15M + 30$$

$$5M = 10; \quad M = 2.$$



$$\frac{AF}{FC} = \frac{2}{7}$$

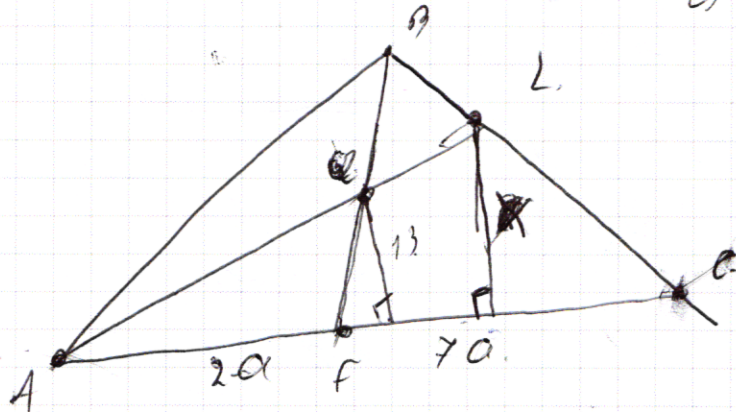
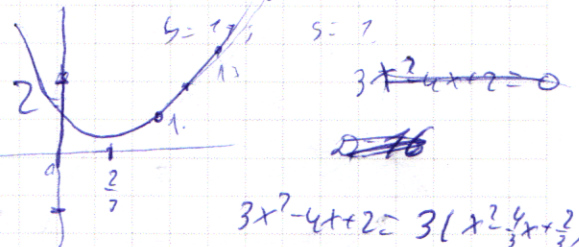
$$\frac{S_{BAC}}{S_{BFC}} = \frac{S}{71}$$

$$3x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$= 2x^2 - 2 + 2x^2$$

$$= (x-2)^2 + 2(x^2+1)$$

$$y = 3x^2 - 4x + 2 = 0$$

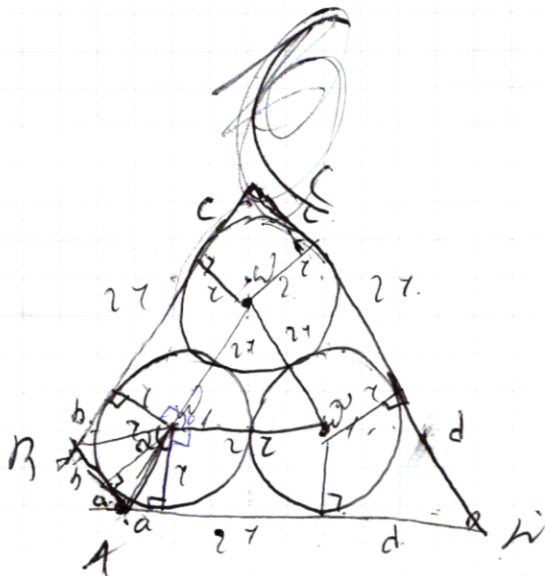
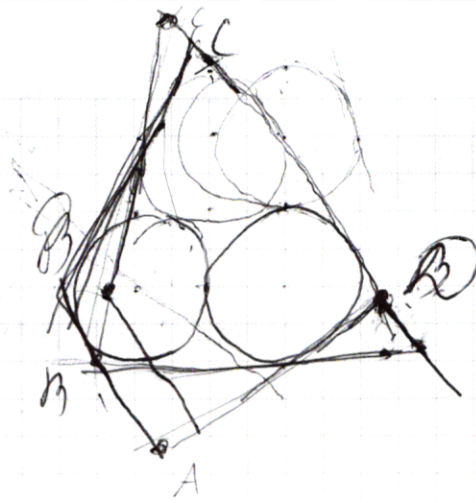


$$y_0 = 3 - 4 + 2 = 1; \quad x = 0$$

$$D = 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$S = 3x^2 - 4x + 2 = 3(x - \frac{2}{3})^2 - 2$$

$$x = 2$$



$$A D + B C - A B - C D = 38$$

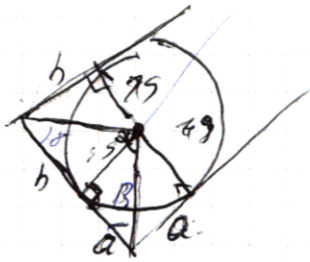
~~$$a + b + b + c + c$$~~

$$|a + c + d + b + c + a - a - b - c - d - x = 38$$

$$27 = 38$$

$$7 = 19$$

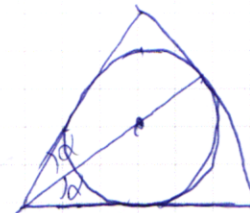
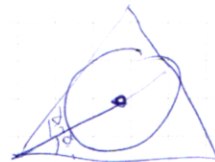
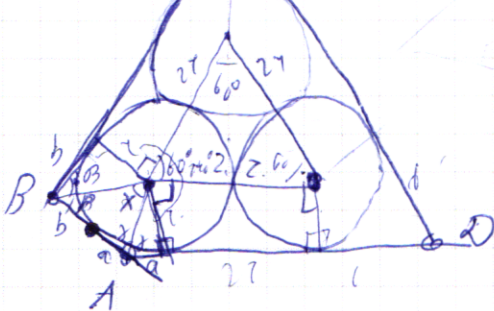
$$\odot (70^{\circ}) : 400 - 2 \cdot 70 \cdot 1 = 361$$



$$a^2 + b^2 + c^2 = b^2 + 361 + a^2 + 361 - 2 \sqrt{(b^2 + 361)(a^2 + 361)} \cos \alpha$$
~~$$2ab = 361 - \sqrt{(b^2 + 361)(a^2 + 361)} \cos \alpha$$~~

$$\sin B = \frac{79}{\sqrt{361 + a^2}} ; \sin \gamma = \frac{79}{\sqrt{361 + b^2}} ;$$

~~$$\sqrt{361 + a^2} \sin \gamma = \sqrt{361 + b^2} \sin B$$~~



$$360 - 240 = 120$$

$$B + \delta + X = 150$$

$$\odot 90 - \delta + 90 - B + X = 120$$

$$180 + 2X = 300$$

$$2X = 120$$

$$X = 60^{\circ}$$