

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 3

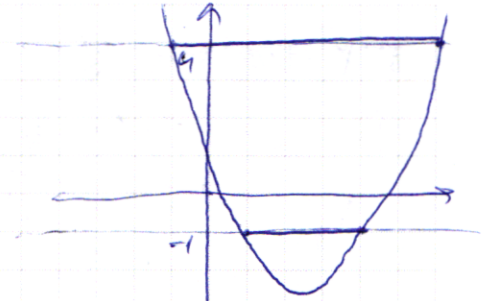
ШИФР

11-018
Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2 - 5x + 1$ пересекает прямые $y = -1$, $y = 4$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Найдите количество 16-значных чисел, содержащих только цифры “3”, “4” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “9” ровно четыре, и они идут подряд.
3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 24$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - 2a| \leq \sqrt{x - 1}$ является отрезок длины 3?
5. Несколько рабочих выполняют работу за 28 дней. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 21 день. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 15 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 7 : 3$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $7 : 36$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 3.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 30]$, $[31; 60]$, $[61; 90]$, $[91; 120]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 30. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1



$$y = 2x^2 - 5x + 1$$

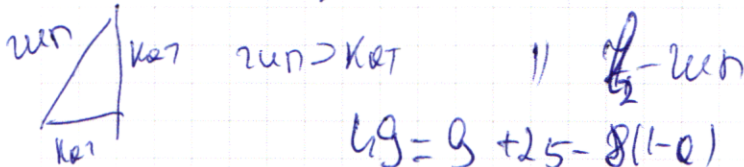
$$y = -1 \quad x_{1,2} = 4, 1 \quad l_1 = 3$$

$$y = 4 \quad x_{3,4} = 0, -1 \quad l_2 = 7$$

$$y = 0 \quad 2x^2 - 5x + 1 = 0 \quad 2x^2 - 5x + 1 - 0 = 0 \quad \sqrt{D} = \sqrt{25 - 8(1-0)}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{D}}{2}$$

$$l_2 = x_1 - x_2 = \sqrt{D} = \sqrt{25 - 8(1-0)}$$



$$49 = 9 + 25 - 8(1-0) \quad a = \frac{25}{8}$$

2) l_3 - гип

$$25 - 8(1-a) = 49 + 9 \quad a = \frac{41}{8}$$

Задача 2

пусть первая цифра 9 то и три последующих тоже
будет 9 тогда по правому произведению у нас всего
 $2^4 - 1 = 15$ произведений у нас должно быть мин. одна "2" или "3"
если первая у нас 9 будет второй цифрой то у нас
получится столько же различных чисел
тогда всего различных чисел у нас $(2^4 - 1)(16 - 4 + 1) =$
 $= (2^4 - 1) \cdot 13$

Задача 4

$$|ax - 2a| \leq \sqrt{x-1} \quad \text{О.Д.З} \quad x \geq 1$$

м.к. у нас всегда меньше всегда кон. то пробов
 можно доказать только кон. поэтому кон. может возникнуть
 в квадрат не меняя знак

$$a^2 x^2 - 4a^2 x + 4a^2 \leq x - 1 \quad a^2 x^2 - (4a^2 + 1)x + 4a^2 + 1 \leq 0$$

$$D = 16a^4 + 8a^2 + 1 - 4a^4 - 4a^2 = 4a^2 + 1$$

$$x_{1,2} = \frac{4a^2 + 1 \pm \sqrt{D}}{2a^2} \quad \text{м.к. } x_1 - x_2 = 3 \quad \text{то}$$

$$\frac{\sqrt{D}}{a^2} = 3 \quad 4a^2 + 1 = 9a^4 \quad 9a^4 - 4a^2 - 1 = 0 \quad D = 16 + 36 = 52$$

$$a_{1,2}^2 = \frac{4 \pm \sqrt{52}}{18} \quad a = \sqrt{\frac{4 \pm \sqrt{52}}{18}}$$

Задача 5

N_0 - нач. кол-во рабочих

α - сколько работы в час делает один рабочий

t_1 - время работы на 1 день

S - все работы

$$\begin{cases} N_0 \cdot \alpha \cdot t_1 = \frac{S}{28} \\ (N_0 + 2) \alpha (t_1 + 1) = \frac{S}{21} \\ (N_0 + 6) \alpha (t_1 + 2) = \frac{S}{15} \end{cases} \quad \begin{cases} 28N_0 \cdot t_1 = 2\alpha(N_0 + 2)(t_1 + 1) \\ t_1 = \frac{3N_0 + 6}{N_0 - 6} \end{cases}$$

$$28N_0 \cdot \frac{3N_0 + 6}{N_0 - 6} = 15(N_0 + 6) \cdot \frac{5N_0 - 6}{N_0 - 6}$$

$$84N_0^2 + 168N_0 = 75N_0^2 - 90N_0 + 450N_0 - 540$$

$$9N_0^2 - 192N_0 + 540 = 0$$

$$3N_0^2 - 64N_0 + 180 = 0$$

$$D = 8800 \quad \text{не имеет решения}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7

$[1; 30], [31; 60], [61; 90], [91; 120]$

Чтобы сумма была макс. и разность мин. надо брать по одному из каждого

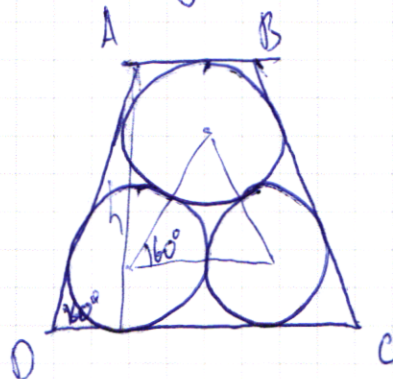
$120; 119; 118; 117; 116; 115;$

т.к. если мы возьмем $90; 89; 88; 87; 86; 85$ то разность будет меньше 30 то чтобы сумма была макс. надо брать

$84; 85; 82; 81; 80; 79$ и т.д.

слож. сумма равна $254 \cdot 6 = 1524$

Задача 3



$$AD + BC - AB - CD = 24$$

$$AD = BC$$

$$h = 2R + 2R \sin \alpha$$

$$\frac{h}{\sin \alpha} = AD$$

$$\frac{CD - AB}{2 \sin 30} = \frac{AD}{1}$$

$$CD = AD + AB$$

по теореме синусов

$$3AD - 2CD = 24$$



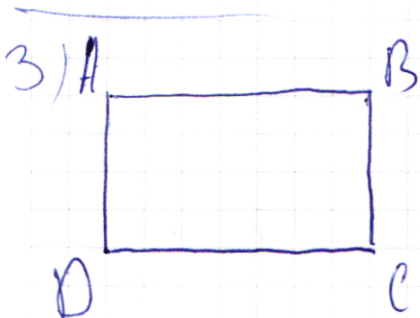
черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

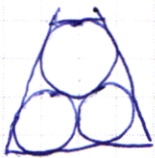
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = 2x^2 - 5x + 1$$

$$2^{12} \cdot 13$$



$$AP + BC - AB - CD = 2r$$



$$\sin \alpha = \frac{h}{AD}$$

$$AP = BC$$

$$AD = \sqrt{\left(\frac{DC - AB}{2}\right)^2 + h^2 (1 + \sin^2 \alpha)}$$

$$\frac{2R(1 + \sin \alpha)}{AD}$$

$$\sin \alpha (AD - 2R) = 2R$$

$$\sin \alpha = \frac{2R}{AD - 2R}$$

$$h = R(2 + \sqrt{3})$$

$$AD = \frac{2R(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4R}{\sqrt{3}} + 2R$$

$$\frac{4R^2(1 + \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha} = \left(\frac{DC - AB}{2}\right)^2 + 4R^2(1 + \sin^2 \alpha) \operatorname{ctg}^2 \alpha$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

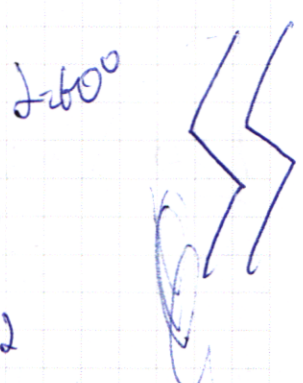
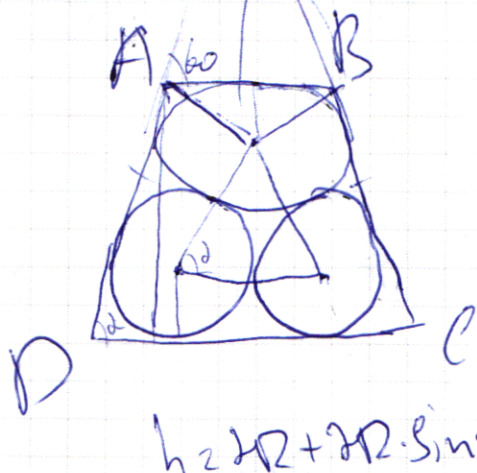
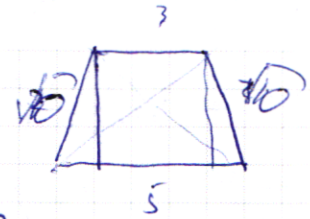
$$\frac{2R}{\sqrt{3}} + 4R = AB - CD = 2r$$

$$\frac{DC - AB}{2} = 2R(1 + \sin \alpha) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2R}{\sqrt{3}} + R$$

$$CD - AB = AD$$

$$\frac{CD - AB}{2} = \frac{AD}{1}$$

$$3AD - 2CD = 2r$$



$$N_0 \cdot t_1 = \frac{S}{28}$$

$$(N_0 + 2) \cdot (t_1 + 1) = \frac{S}{28}$$

$$(N_0 + 6) \cdot (t_1 + 2) = \frac{S}{15}$$

$$(N_0 t_1 + 2N_0 + 6t_1 + 12) \cdot 15 \neq 28N_0 t_1$$

$$15N_0 t_1 + 30N_0 + 90t_1 + 180 = 28N_0 t_1$$

$$t_1 = \frac{30N_0 + 180}{13N_0 - 90}$$

$$\frac{N_0 + 2}{N_0} \cdot \frac{43N_0 + 90}{30N_0 + 180} = \frac{28}{21}$$

$$21(43N_0^2 + 90N_0 + 86N_0 + 180) = 28(30N_0^2 + 180N_0)$$

$$(N_0 t_1 + N_0 + 2t_1 + 2) \cdot 21 = 28N_0 t_1$$

$$\frac{21N_0 + 42}{7N_0 - 42} = \frac{3N_0 + 6}{N_0 - 6}$$

$$28 \cdot N_0 \cdot \frac{3N_0 + 6}{N_0 - 6} = 15(N_0 + 6) \cdot \frac{5N_0 - 6}{N_0 - 6}$$

$$3N_0^2 + 198N_0 + 540 = 0$$

$$N_0^2 + 12N_0 + 60 = 0$$

$$D = 144 -$$

$$3N_0^2 - 64N_0 + 180 = 0$$

$$D =$$

$$\begin{array}{r} \times 36 \\ 15 \\ \hline 180 \\ 36 \\ \hline 540 \end{array}$$

$$84N_0^2 + 168N_0 = 75N_0^2 - 90N_0 + 450N_0 - 36 \cdot 15$$

$$360 - 188 = 192 \quad | \quad 3$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \hline 364 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 320 \quad 13 \\ 3 \quad \hline 24 \quad 180 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 64 \\ \hline 256 \\ 384 \\ \hline 4096 = 3880 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 180 \\ \times 12 \\ \hline 36 \\ 18 \\ \hline 216 \end{array}$$