МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120°?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры “0”, “5” и “9” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “5” ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пинокkио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12-002

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1) Заметим, что $169 = 13^2$; $64 = 8^2$. Значит, график функции $y = x^2$ будет пересекать прямую $y = 169$ в точках $(-13; 169)$ и $(13; 169)$, тогда длина высекаемого на этой прямой отрезка будет равна $|-13|+|13| = 26$; а прямую $y = 64$ – в точках $(-8; 64)$ и $(8; 64)$, тогда длина высекаемого на этой прямой отрезка будет равна $|-8|+|8| = 16$. (Т.к. прямые $y = 169$ и $y = 64$ параллельны оси Ox.) Две стороны треугольника уже есть, осталось найти третью. Как известно, если в треугольнике есть угол в $120°$, то каждый из оставшихся углов меньше $120°$, иначе сумма углов треугольника была бы больше $180°$, что невозможно. Кроме того, напротив большего угла лежит большая сторона. Значит, напротив угла в $120°$ может быть либо сторона длиной 26 (I случай), либо неизвестная сторона (II случай). I. Теорема cos для этого треугольника: $26^2 = 16^2 + x^2 - 2\cdot16\cdot x\cdot\cos120°$, где x – длина третьей стороны. $\cos120° = -\cos60° \Rightarrow 676 = 256 + x^2 + \cancel{2}\cdot16\cdot x\cdot\frac{1}{\cancel{2}} \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 16x - 420 = 0$. $D_1 = 64 + 420 = 484 = 22^2$.

Тогда $x = -8 \pm 22 \Rightarrow \underline{x_1 = -30}; \underline{x_2 = 14}$, но x – длина стороны треугольника, поэтому $x > 0 \Rightarrow \underline{x = 14}$. $y = x^2 = 14^2 = 196 = a$.

II. Теорема cos для этого треугольника: $x^2 = 26^2 + 16^2 - 2\cdot16\cdot26\cos120°$.
$x^2 = 676 + 256 + \cancel{2}\cdot26\cdot16\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = 1348 \Rightarrow y = x^2 = 1348 = a$.

Ответ: при $a = 196$ и $a = 1348$.

№3) „Блок" из 6 цифр „5" в 18-значном числе можно расположить 13 способами. (Спереди, затем сдвинуть на 1 вправо и так далее до конца числа. Таких сдвигов будет $18-6=12$, т.е. всего 13 способов). В каждом из таких случаев остальные цифры - только „0" и „9". I. Пусть все пятёрки занимают 6 мест в начале числа, тогда на каждом из оставшихся 12 мест может быть „0" или „9", т.е. всего 2^{12} вариантов. Но при этом мы посчитали варианты, в которых эти 12 мест занимают цифры одного вида (все „9" или все „0"), что невозможно. Значит, на самом деле вариантов $2^{12}-2$. II Пусть пятёрки занимают 6 мест не в начале числа, тогда в старшем разряде может стоять только „9". Значит, заполнить остальные 11 мест мы можем 2^{11} способами. При этом мы посчитали вариант без „0" (хоть одна „9" есть из-за старшего разряда). Значит, на самом деле вариантов $2^{11}-1$. Тогда всего таких вариантов равно $12\cdot(2^{11}-1)$ для всех оставшихся случаев расположения „блока" из 6 „5". Значит, всего вариантов $2^{12}-2+12(2^{11}-1)=$

$= 2(2^{11}-1)+12(2^{11}-1) = 14\cdot(2^{11}-1) = 14(2048-1) = 14\cdot 2047 = 28658$.

Ответ: 28658.

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

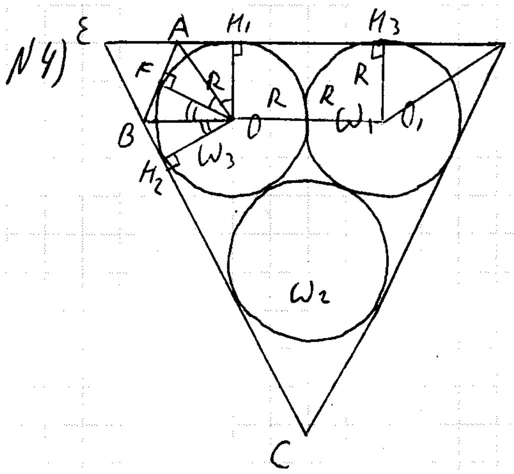
12-005

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4)



Пусть F – точка касания ω_3 и AB, H_1 – точка касания ω_3 и AD; H_2 – точка касания BC и ω_3. Продлим AD и BC, пусть точка их пересечения – E. Теперь из симметрии задачи $\triangle EDC$ – равносторонний, т.к. $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$, стороны треугольника – попарно общие касательные и т.п. Пусть H_3 – точка пересечения ω_1 и DE, тогда $H_1H_3 = 2R$ из прямоугольника $OH_1H_3O_1$, где O_1 – центр ω_1. Тогда $DH_3 = EH_1 = R\sqrt{3}$. ($\angle H_3DC = 60°$; DO_1 – его биссектриса, т.к. центр вписанной в угол окружности лежит на его биссектрисе. $\Rightarrow \angle H_3DO_1 = \frac{60°}{2} = 30°$; $H_3D = R\,ctg\,30° = R\sqrt{3}$). Тогда $DE = H_1H_3 + 2H_3D = CD$, $H_1D = H_1H_3 + H_3D = H_2C$. Тогда $AD = H_1D + AH_1$; $BC = H_1D + BH_2$; $BH_2 = BF$; $AH_1 = AF$ как отрезки касательных. $\Rightarrow$ а) $\cancel{2R} + \cancel{R\sqrt3} + \cancel{AH_1} + 2R + \cancel{R\sqrt3} + \cancel{BH_2} - \cancel{BF} - \cancel{AF} - \cancel{2R} - 2\cancel{R\sqrt3} = 10 \Rightarrow 2R = 10 \Rightarrow \underline{R = 5}$. б) $\triangle AOF = \triangle AH_1O$, т.к. $AF = AH_1$; AO – общая сторона; $OF = OH_1 = R$; аналогично $\triangle BOF = \triangle BOH_2 \Rightarrow \angle AOB = \angle FOB + \angle FOA = \frac{1}{2}\angle H_1OH_2$. Из из EH_1OH_2 $\angle O = 180° - \angle E = 180° - 60° = 120°$. Значит, $\angle AOB = \frac{1}{2}\cdot 120° = \underline{60°}$. в) Теорема cos для $\triangle ABO$: $BA^2 = AO^2 + BO^2 - 2\,AO\cdot BO\cos 60° = AO^2 + BO^2 - \cancel{2}\cdot 42\cdot\cancel{\frac{1}{2}}$. Из из теорем Пифагора в $\triangle OH_2B$ и $\triangle OH_1A$: $OA^2 = R^2 + AH_1^2 = AH_1^2 + 25$; $OB^2 = R^2 + BH_2^2 = 25 + B^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cancel{BF^2} + \cancel{AF^2} + 2BF\cdot AF = 25 + 25 + \cancel{H_2B^2} + \cancel{H_1A^2} - 42 \Rightarrow BF\cdot AF = \frac{50-42}{2} = 4$.
Тогда $42^2 = AO^2\cdot BO^2 = (25 + H_2B^2)(25 + H_1A^2) \Rightarrow 1764 = 625 + 25H_2B^2 + 25H_1A^2 + H_2B^2H_1A^2$

Тогда $25(H_1A^2+H_2B^2)=1139-4^2=1123 \Rightarrow H_1A^2+H_2B^2=\frac{1123}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB^2=AF^2+BF^2+2\cdot AF\cdot BF=\frac{1123}{25}+2\cdot 4=\frac{1323}{25} \Rightarrow AB=\sqrt{\frac{1323}{25}}=\frac{3}{5}\sqrt{147}$.

Ответ: а) 5; б) 60°; в) $\frac{3}{5}\sqrt{147}$.

N5) $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\geq 1$. $x+5>0 \Rightarrow \underline{x>-5}$; $x+3\geq 0 \Rightarrow \underline{x\geq -3}$

$\sqrt{x+3}-x>0 \Rightarrow \sqrt{x+3}>x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x<0. \\ \begin{cases} x+3>x^2 \ (1) \\ x>0. \end{cases}\end{array}\right.$ (1) $x^2-x-3<0$. $D=1+4\cdot 3=13$.

$x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

$\sqrt{x+3}-x\neq 1 \Rightarrow \sqrt{x+3}\neq x+1 \Rightarrow x+3\neq x^2+2x+1 \Rightarrow x^2+x-2\neq 0$.

$D=1+4\cdot 2=9=3^2 \Rightarrow x\neq\frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow \underline{x\neq -2}$, $\underline{x\neq 1}$, но $x+1\geq 0 \Rightarrow \underline{x\neq 1}$.

Значит, ОДЗ: $\Rightarrow x\in[-3;1)\cup(1;\frac{1+\sqrt{13}}{2}]$.

На ОДЗ: $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\geq 1 \Leftrightarrow x+5\geq\sqrt{x+3}-x \Rightarrow \sqrt{x+3}\leq 2x+5$.

Тогда $x+3\leq 4x^2+25+20x \Rightarrow 4x^2+19x+22\geq 0$. $D=19^2-4\cdot 4\cdot 22=361-352=9$

Тогда $x=\frac{-19\pm 3}{2\cdot 4} \Rightarrow \underline{x_1=-\frac{22}{8}=-\frac{11}{4}, x_2=-\frac{16}{8}=-2}$. $\Rightarrow$ + − +

Тогда: $\Rightarrow$ $\underline{\text{Ответ: } x\in[-3;-\tfrac{11}{4}]\cup[-2,1)\cup(1,\tfrac{1+\sqrt{13}}{2}].}$

N7) Заметим, что наибольшая разница между двумя элементами в каждом промежутке равна 34, что меньше 35. Значит, для любых двух чисел из одного промежутка условие выполнено. Также заметим, что длина каждого из промежутков равна 35. $\Rightarrow$ Если пронумеровать в каждом из них числа от до 3, то разность между двумя любыми числами будет кратна 35 тогда и только тогда, когда они стоят под одинаковыми номерами. (Длина промежутков кратна 35; значит, при вычитании чисел разница их номеров тоже должна быть кратной 35, т.е. равной 0, т.к. номера принадлежат промежутку [; 3]. Тогда сумма всех выбранных чисел равна: 0+35+70+105+140 + сумма номеров.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(Каждый элемент можно представить как сумму его номера и числа $(n-1)35$, где n - номер промежутка.) Тогда сумма чисел равна 350 + сумма номеров, где все номера различны, иначе условие не будет выполнено. Тогда наименьшая возможная сумма номеров: $1+2+\dots+25 = 26\cdot12+13 = 325$. Значит, наименьшая возможная сумма выбранных чисел равна $350+325=675$.

Ответ: 675.

№2) $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = \frac{1}{2}(\cos 7x + \cos 2x) - 1 + \cos^2 7x - \cos^2 x - 3 \Rightarrow 2g(x) = \cos 7x + \cos 2x + 2\cos^2 7x - 2\cos^2 x - 8$.

$\cos 2x = -\sin^2 x + \cos^2 x = -1 + 2\cos^2 x \Rightarrow 2g(x) = 2\cos^2 7x + \cos 7x - 8 - 1 + \cancel{2\cos^2 x} - \cancel{2\cos^2 x} =$
$= 2\cos^2 7x + \cos 7x - 9 = 2t^2 + t - 9$, где $t \in [-1; 1]$. Наименьшее значение достигается в вершине, т.к. ветви параболы вверх.

$x_0 = \frac{-1}{2} \Rightarrow 2g(x_0) = 2\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 9 = \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} - 9 = -9 \Rightarrow g(x_0) = \underline{g_{наим.} = -4,5}$

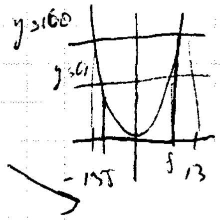
Вершина ближе к -1 $\Rightarrow$ наибольшее значение будет в 1.

$2g(1) = 2\cdot1^2 + 1 - 9 = -6 \Rightarrow g(1) = \underline{g_{наиб.} = -3}$.

Ответ: $\underline{g_{наиб.} = -3}$; $\underline{g_{наим.} = -4,5}$.

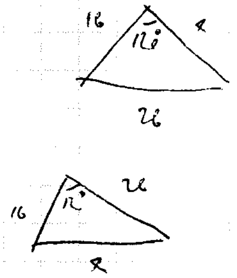
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

I



16

26



3

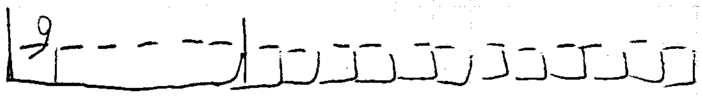
$26 \cdot 16 = 156 + 26 = 416$

$22 \cdot 22 = 44 + 44 = 484$

$16 \cdot 16 = 96 + 16 = 256$

$26 \cdot 26 = 156 + 52 = 676$

III



$(2^{12}-1)+12\cdot(12^{11}-1)$

$676 - 256 = 420$

$676 + 256 = 932$

1348 | 4 = 337

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

$x+5>0 \Rightarrow x>-5$

$x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$

$\sqrt{x+3}-x>0$

$\sqrt{x+3}-x \neq 1$

$\sqrt{x+3} > x$

$x+3 > x^2$

$x^2-x-3<0$

$D = 1+4\cdot 3 = 13$

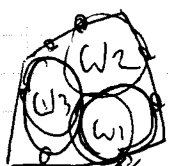
$\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$x \neq 0$

$175 \cdot 2 = 350$

$14 \cdot 14 = 56 + 14 = 196$

$22 \cdot 16 = 132 + 22 = 352$



$-\frac{11}{4}$

$\sqrt{x+3}$

$2x+5 \geq 0$

$4x^2+22x+19$

$4x^2+19x+22 \geq 0$

$361 - 4\cdot 4 \cdot 22$

$19 \cdot 19 = 361$

$361 - 352 = 9$

$x \geq -1$

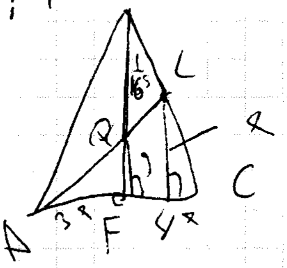
-2

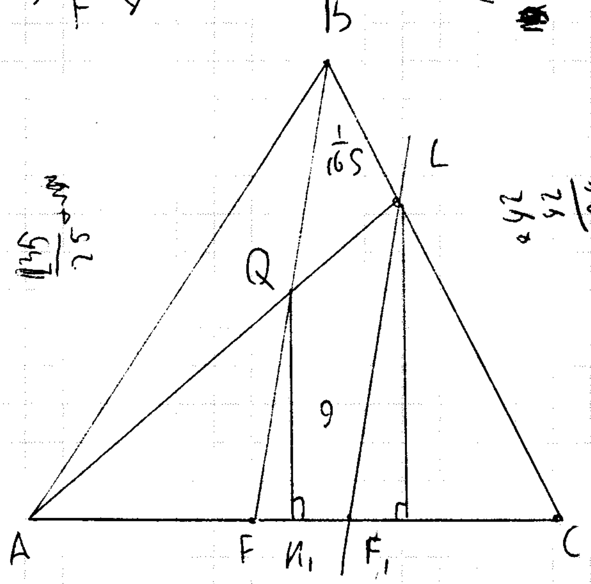
V

$D; -1$

$2047 \cdot 14 = 8188$

2047





35; 70; 105; 140; 350

1 2 3 4 5

6 7 8 9 10

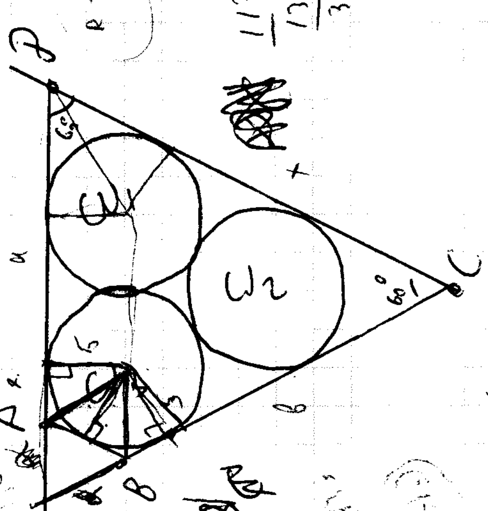
11 12 13 14 15

16 17 18 19 20

21 22 23 24 25

26·12 +13

25·12



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

12-005

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 7x \cos 9x - \sin 7 - \cos x - 3$ $\quad \sin 7x \quad \cos 7x$

$(\cos 7x + \cos 9x) = 2\cos^2 9x \quad 2\cos^2 x - 8$

$\cos 2x - 2\cos^2 x = \cos 9x + 2\cos^2 7x - 8$

$(\sqrt{2}\cos^2 9x)^2 = 2\sqrt{2}\cos 9x \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{8}$

$\left(\sqrt{2}\cos x + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{63}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)