МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

БИЛЕТ 4 ШИФР 11-010

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 3x^2 - 4x + 2$ пересекает прямые $y = 17$, $y = 1$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?

2. Найдите количество 20-значных чисел, содержащих только цифры “1”, “5” и “6” (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр “5” ровно десять, и они идут подряд.

3. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 38$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

4. При каких значениях параметра a решением неравенства $|ax - a| \leqslant \sqrt{x-2}$ является отрезок длины 1?

5. Несколько рабочих выполняют работу за 21 день. Если бы их было на 2 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день дольше, то они выполнили бы эту работу за 15 дней. Если бы их было ещё на 4 человека больше и они работали бы ещё на 1 час в день дольше, они выполнили бы эту же работу за 10 дней. Сколько было рабочих? (Производительность всех рабочих одинакова.)

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 7$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $8 : 21$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 13.

7. Пиноккио выбрал по 7 целых чисел из каждого промежутка $[1; 50]$, $[51; 100]$, $[101; 150]$, $[151; 200]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 50. Какое **наибольшее** значение может принимать сумма двадцати восьми выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №1

Пусть парабола пересекает прямую $y=17$ в точках $(b_1;17)$, $(b_2;17)$. Тогда:

$17=3b_{1,2}^2-4b_{1,2}+2$; $3b_{1,2}^2-4b_{1,2}-15=0$;

$\frac{D}{4}=4+45=49$;

$b_1=\frac{2+7}{3}=3$; $b_2=\frac{2-7}{3}=-1\frac{2}{3}$; Тогда длина высекаемого отрезка $l_1=4\frac{2}{3}$;

Пусть парабола пересекает прямую $y=1$ в точках $(c_1;1)$, $(c_2;1)$. Тогда:

$1=3c_{1,2}^2-4c_{1,2}+2$; $3c_{1,2}^2-4c_{1,2}+1=0$;

$\frac{D}{4}=4-3=1$;

$c_1=\frac{2+1}{3}=1$; $c_2=\frac{2-1}{3}=\frac{1}{3}$; Тогда длина высекаемого отрезка $l_2=\frac{2}{3}$;

Пусть парабола пересекает прямую $y=a$ в точках $(d_1;a)$, $(d_2;a)$. Тогда:

$a=3d_{1,2}^2-4d_{1,2}+2$; $3d_{1,2}^2-4d_{1,2}+(2-a)=0$;

$\frac{D}{4}=4-3(2-a)=3a-2$;

$d_1=\frac{2+\sqrt{3a-2}}{3}$; $d_2=\frac{2-\sqrt{3a-2}}{3}$. Тогда длина высекаемого отрезка $l_3=\frac{2\sqrt{3a-2}}{3}$.

Отрезок d_1d_2 может быть как и катетом так и гипотенузой.

В первом случае: $l_3=\sqrt{l_1^2-l_2^2}=\sqrt{\frac{64}{3}}=\frac{8}{\sqrt{3}}$; И тогда:

$\frac{2\sqrt{3a-2}}{3}=\frac{8}{\sqrt{3}}$; $\sqrt{3a-2}=4\sqrt{3}$; $(a\geq\frac{2}{3})$

$3a-2=48$; $3a=50$; $a=\frac{50}{3}$;

Во втором случае: $l_3=\sqrt{l_1^2+l_2^2}=\sqrt{\frac{200}{9}}=\frac{10\sqrt{2}}{3}$; И тогда:

$\frac{2\sqrt{3a-2}}{3}=\frac{10\sqrt{2}}{3}$; $\sqrt{3a-2}=5\sqrt{2}$; $(a\geq\frac{2}{3})$

$3a-2=50$; $3a=52$; $a=\frac{52}{3}$;

Ответ: Из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник при двух значениях a. $a_1=\frac{50}{3}=16\frac{2}{3}$; $a_2=\frac{52}{3}=17\frac{1}{3}$;

Задание №2

Непрерывную строку из 10-ти 5-ок можно поместить в 20-ти значное число 11-ю различными способами: $\underbrace{0000000000}_{10}\overbrace{\otimes\otimes\otimes\otimes\otimes\otimes\otimes\otimes\otimes\otimes}^{10}$.

Далее нам нужно заполнить оставшиеся 10 позиций только цифрами „1" и „6". Таких способов всего $2^{10}=1024$, за исключением случая когда все цифры „1" и когда все цифры „6": $2^{10}-2=1022$; Тогда общее количество таких ~~цифр~~ чисел:

$11\cdot(2^{10}-2)=11242$;

Ответ: Есть всего 11242 таких числа.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №5

Пусть всего было x рабочих и в день они работали по y часов, и для выполнения работы требуется z - человеко-часов. Тогда:

$$\begin{cases} 21xy = z; \\ 15(x+2)(y+1) = z; \\ 10(x+6)(y+2) = z; \end{cases}$$

$15xy + 15x + 30y + 30 = 21xy;$

$6xy - 30y = 15x + 30;$

$y = \frac{15x+30}{6x-30};$

$10xy + 20x + 60y + 120 = 21xy;$

$11xy - 60y = 20x + 120;$

$y = \frac{20x+120}{11x-60};$

$\frac{15x+30}{6x-30} = \frac{20x+120}{11x-60};$ $\frac{3x+6}{6x-30} = \frac{4x+24}{11x-60};$

$(3x+6)(11x-60) = (6x-30)(4x+24);$

$33x^2 - 180x + 66x - 360 = 24x^2 + 144x - 120x - 720;$

$9x^2 - 138x + 360 = 0;$ $3x^2 - 46x + 120 = 0;$

$\frac{D}{4} = 529 - 360 = 169;$ $\sqrt{\frac{D}{4}} = 13;$

$x = \frac{23 \pm 13}{3};$ $x_1 = 12;$ $x_2 = \frac{10}{3};$ Т.к. количество рабочих должно быть целым, то корень x_2 отбрасываем.

Ответ: Всего было 12 рабочих.

Задание №7

$[1;50]$ $[51;100]$ $[101;150]$ $[151;200]$

$a_1 \dots a_7$ $b_1 \dots b_7$ $c_1 \dots c_7$ $d_1 \dots d_7$

$S = a_1 + \dots + a_7 + b_1 + \dots + b_7 + c_1 + \dots + c_7 + d_1 + \dots + d_7;$

$S = 7 \cdot 0 + a_1' + \dots + a_7' + 7 \cdot 50 + b_1' + \dots + b_7' + 7 \cdot 100 + c_1' + \dots + c_7' +$
$+ 7 \cdot 150 + d_1' + \dots + d_7';$ где $a_i', b_i', c_i', d_i' \in [1;50]$.

Тогда сумма будет максимальна при максимальной S':

$S' = a_1' + \dots + a_7' + b_1' + \dots + b_7' + c_1' + \dots + c_7' + d_1' + \dots + d_7';$

При этом:

$a_1' > a_2' > a_3' > a_4' > a_5' > a_6' > a_7'$
$\neq \ \neq \ \neq \ \neq \ \neq \ \neq \ \neq$
$b_1' > b_2' > b_3' > b_4' > b_5' > b_6' > b_7'$
$\neq \ \neq \ \neq \ \neq \ \neq \ \neq \ \neq$
$c_1' > c_2' > c_3' > c_4' > c_5' > c_6' > c_7'$
$\neq \ \neq \ \neq \ \neq \ \neq \ \neq \ \neq$
$d_1' > d_2' > d_3' > d_4' > d_5' > d_6' > d_7'$

При этом получается сумма 28 различных чисел, и все числа принадлежат $[1;50]$, тогда:

$S'_{max} = 50 + 49 + 48 + \dots + 23 = 1022$, тогда:

$S_{max} = 7 \cdot 0 + 7 \cdot 50 + 7 \cdot 100 + 7 \cdot 150 + S'_{max} = 2100 + 1022 =$
$= 3122;$

Ответ: Сумма 28 чисел выбранных Пиноккио может достигать наибольшего значения $S_{max} = 3122;$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №4

$|ax-a| \le \sqrt{x-2}$; $(x \ge 2)$;

$(ax-a)^2 \le x-2$;

$a^2x^2-2a^2x+a^2 \le x-2$;

$a^2x^2-(2a^2+1)x+a^2+2 \le 0$;

$D=(2a^2+1)^2-4a^2(a^2+2)=4a^4+4a^2+1-4a^4-8a^2=1-4a^2$;

$x_1=\frac{(2a^2+1)+\sqrt{1-4a^2}}{2a^2}$; $x_2=\frac{(2a^2+1)-\sqrt{1-4a^2}}{2a^2}$;

$(x-x_1)(x-x_2) \le 0$;

$+ \quad x_2 \quad - \quad x_1 \quad + \quad x$

Тогда длина отрезка решений $l=\frac{\sqrt{1-4a^2}}{a^2}$ $(a \in [-0,5;0,5])$;

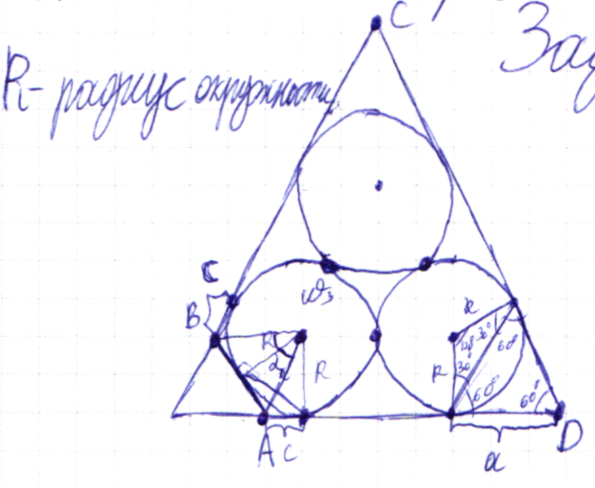
$1=\frac{\sqrt{1-4a^2}}{a^2}$; $a^4=1-4a^2$; $a^4+4a^2-1=0$;

$b=a^2$;

$b^2+4b-1=0$; $\frac{D}{4}=4+1=5$; $b=-2\pm\sqrt{5}$; т.к. $b \ge 0$, то

$b=\sqrt{5}-2$; $a=\pm\sqrt{\sqrt{5}-2}$, т.к. $|a|<0,5$ и $x(a)>2$, то

Ответ: $l=1$ при $a=\pm\sqrt{\sqrt{5}-2}$.



Задание №3

$AD+BC-AB-CD=38$;

$a^2=2R^2-2R^2\cos 120°$;

$a=R\sqrt{3}$;

$\frac{R}{\sin 120°}=\frac{C}{\sin 30°}$; $C=\frac{R}{\sqrt{3}}$;

$AD + BC - AB - CD = 38;$

$2R + \cancel{R\sqrt{3}} + R\sqrt{2} + \cancel{2R} + \cancel{R\sqrt{3}} + \frac{R}{\sqrt{2}} - R\sqrt{3} + \frac{R}{\sqrt{2}} - \cancel{2R} - \cancel{2R\sqrt{3}} = 38.$

$2R + \frac{3R}{\sqrt{2}} - R\sqrt{3} = 38;$

$R(2 + \frac{3}{\sqrt{2}} - \sqrt{3}) = 38;$

$R = \frac{38\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 3 - \sqrt{6}};$

а) Ответ: $R = \frac{38\sqrt{2}}{2\sqrt{2} + 3 - \sqrt{6}}.$

б) $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{R\sqrt{3} - \frac{R}{\sqrt{2}}}{2R};$

$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - 1}{2\sqrt{2}}.$

$\alpha = 2\,arctg\,\frac{\sqrt{6} - 1}{2\sqrt{2}} + 2\pi k;$

Ответ: $\alpha = 2\,arctg\,\frac{\sqrt{6} - 1}{2\sqrt{2}} + 2\pi k;$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

11-010

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|ax-a| \le \sqrt{x-2}$

$a^2x^2-2a^2x+a^2 \le x-2;$

$a^2x^2-(2a^2+1)x+a^2+2 \le 0;$

$D=(2a^2+1)^2-4(a^2+2)a^2 = 4a^4+4a^2+1-4a^4-8a^2 = 1-4a^2$

$x = \frac{2a^2+1 \pm \sqrt{1-4a^2}}{2a^2} = 1 + \frac{1 \pm \sqrt{1-4a^2}}{2a^2}.$

$(x-x_1)(x-x_2) \le 0;$ $+$ x_1 $-$ x_2 $+$ x

$\sqrt{\sqrt{5}-2} < 0,5$

$\sqrt{5}-2 < 0,25$

$\sqrt{5} < 2,25$

$$\begin{array}{r} 225 \\ \times 225 \\ \hline 1125 \\ +450 \\ 450 \\ \hline 50625 \end{array}$$

$\frac{2\sqrt{5}-4+1-\sqrt{1-4\sqrt{5}+8}}{2\sqrt{5}-4} = 1 + \frac{1-\sqrt{1-4\sqrt{5}+8}}{2\sqrt{5}-4}.$

$\frac{1-\sqrt{9-4\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}-4} \ge 1;$

$1-\sqrt{9-4\sqrt{5}} \ge 2\sqrt{5}-4$

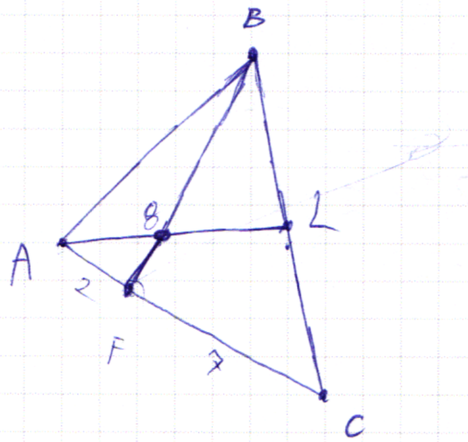
$9-4\sqrt{5} \ge (2\sqrt{5}-5)^2$

$9-4\sqrt{5} \ge 20-20\sqrt{5}+25$

$16\sqrt{5} \ge 36$

$8\sqrt{5} \ge 18$

$4\sqrt{5} \ge 9;$ $\sqrt{5} \ge 2,5$

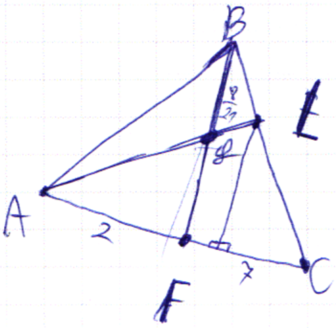


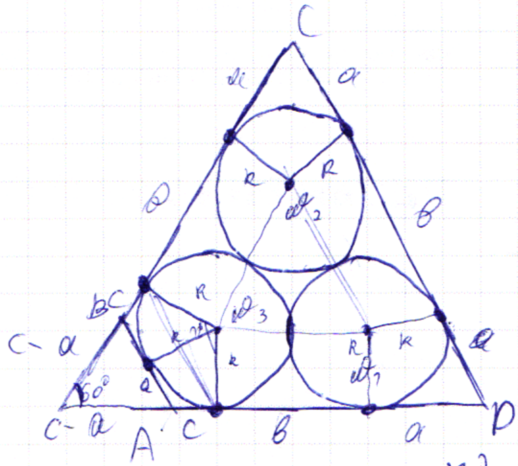
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)





$AD+BC=2b+2a+2c;$

$ACD=2a+b$

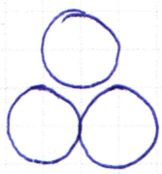
$AD+BC-CD=b+2c \quad AB=a-a \quad a+b$

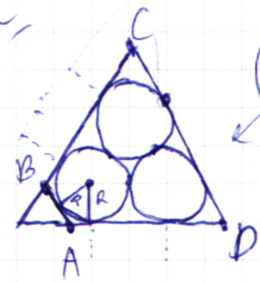
$\cancel{b+c-a=38} \quad b+3c-a$

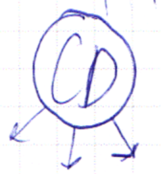
$2R^2+R^2;$

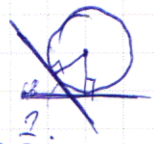
$R\sqrt{3} \quad \frac{3R}{\sqrt{2}} \quad -R\sqrt{3}+2R$

$A^{B}C \quad \Delta ABC;$

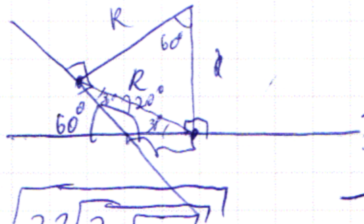








$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$



$$\begin{array}{r} 256 \\ \times 128 \\ \hline 2048 \\ +512 \\ 256 \\ \hline 32768 \end{array}$$

$\frac{R}{\sin 120^\circ} = \frac{C}{\sin 30^\circ}; \quad C=\frac{R}{\sqrt{2}};$

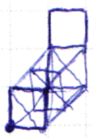
$2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}$

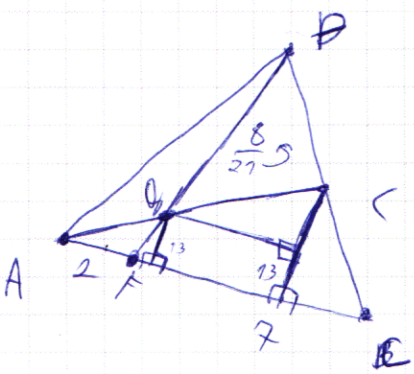
$2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt[4]{8}}}$

$2\sqrt{2\sqrt[8]{128}}$

$2\sqrt[16]{32768}$

7368735





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

11-010

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y = 3x^2 - 4x + 2$; $17 = 3a^2 - 4a + 2$; $y = x(3x-4)+2$;

$3a^2 - 4a - 15 = 0$; $\frac{D}{4} = 4 + 45 = 49$;

$a = \frac{2 \pm 7}{3}$;

$a = 3x^2 - 4x + 2$; $3x^2 - 4x + (2-a) = 0$;

$\frac{D}{4} = 4 - 6 + 3a$; $\frac{D}{4} = 3a - 2$; $2^{10} - 2 = 1022$

$x_1 = \frac{2 + \sqrt{3a-2}}{3}$; $x_2 = \frac{2 - \sqrt{3a-2}}{3}$. 0000000000

$l = 2\sqrt{\ }$

$\frac{14}{3}$; $\frac{2}{3}$.

$\times \begin{array}{r} 14 \\ 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$

$\frac{196}{9} - \frac{4}{9} = l_3$, $\frac{192}{9} = \frac{64}{3} =$

$|ax - a| \le \sqrt{x-2}$

00000000000 10-5 1 и 6.

$x \ge 2$;

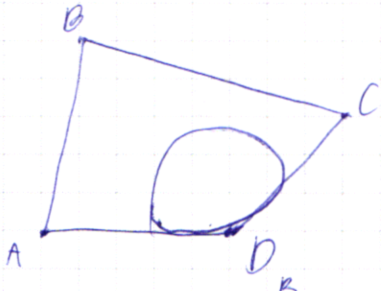
11.

$(ax-a)^2 \le x-2$;

$a^2x^2 - 2a^2x + a^2 \le x-2$;

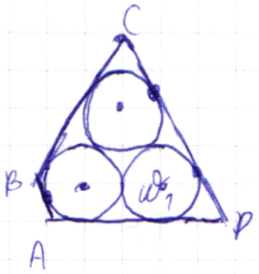
$a^2x^2 - (2a^2-1)x + a^2 + 2 \le 0$;

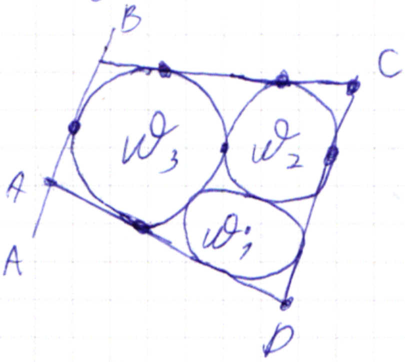
$\times \begin{array}{r} 1022 \\ 11 \\ \hline 1022 \\ 1022 \\ \hline 11242 \end{array}$



1275

$\times \begin{array}{r} 23 \\ 11 \\ \hline 23 \\ 23 \\ \hline 253 \end{array}$





1022

$\frac{50 \cdot 51}{2}$

$\times \begin{array}{r} 51 \\ 25 \\ \hline 255 \\ 102 \\ \hline 1275 \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$|ax - a| \le \sqrt{x-2}$

~~200~~ $350 + 700 + 1050$

x - раб; V - произв; z - общ. раб.

x_1

$xV \cdot 21 = z$; (z) - часов работы

x - раб. $y(1)$

$a+1 \quad a \quad a-1$

$$\begin{cases} xy \cdot 21 = z; \\ (x+2)(y+1) \cdot 15 = z; \\ (x+6)(y+2) \cdot 10 = z; \end{cases}$$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7

$15xy + 15x + 30y + 30 = 21xy$;

$6xy - 15x - 30y - 30 = 0$;

$y(6x-30) = 15x + 30$; $y = \frac{15x+30}{6x-30}$;

$10xy + 20x + 60y + 120 = 21xy$;

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ +46 \\ \hline 529 \end{array}$$

$11xy - 20x - 60y - 120 = 0$;

$y(11x - 60) = 20x + 120$; $y = \frac{20x+120}{11x-60}$;

$\frac{15x+30}{6x-30} = \frac{20x+120}{11x-60}$

200   149

199   147

$\frac{3x+6}{6x-30} = \frac{4x+24}{11x-60}$

$(3x+6)(11x-60) = (4x+24)(6x-30)$;

$33x^2 - 180x + 66x - 360 = 24x^2 - 120x + 144x - 720$;

$-114x \quad 24x$

$9x^2 - 138x + 360 = 0$;

$3x^2 - 46x + 120 = 0$, $\frac{D}{4} = 529 - 360 = 169$;

$x = \frac{23 \pm 13}{3}$;

$S = a_1 + \ldots + a_7 + b_1 + \ldots + b_7 + c_1 + \ldots + c_7 + d_1 + \ldots + d_7$

$S = 7 \cdot 0 + a_1' + \ldots + a_7' + 7 \cdot 50$

200

199

198

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)