

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 6

ШИФР

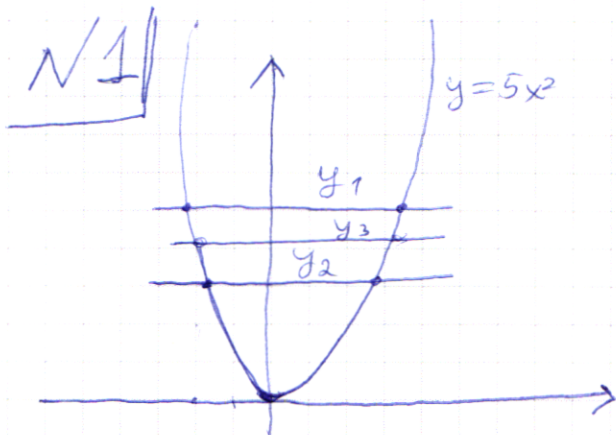
11-015

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола  $y = 5x^2$  пересекает прямые  $y = 125$ ,  $y = 80$  и  $y = a$ , высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра  $a$  из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?
2. Дан четырёхугольник  $ABCD$ . Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , причём  $\omega_1$  касается сторон  $AD$  и  $DC$ ,  $\omega_2$  касается сторон  $DC$  и  $CB$ , а  $\omega_3$  касается сторон  $CB$ ,  $BA$  и  $AD$ . Найдите радиусы окружностей, если известно, что  $AD + BC - AB - CD = 28$ .
3. Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 15 марок на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 17 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 22 марки, то у него станет ровно 900 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)
4. При каких значениях параметра  $a$  решением неравенства  $|ax - a| \leq \sqrt{x - 3}$  является отрезок длины 2?
5. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "3", "5" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "3" ровно шесть, и они идут подряд.
6. Точки  $F$  и  $L$  лежат на сторонах  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  соответственно, причём  $AF : FC = 4 : 5$ . Отрезки  $BF$  и  $AL$  пересекаются в точке  $Q$ ; площади треугольников  $BQL$  и  $BAC$  относятся как 1 : 25. Найдите расстояние от точки  $L$  до прямой  $AC$ , если расстояние от точки  $Q$  до прямой  $AC$  равно 12.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка  $[1; 40]$ ,  $[41; 80]$ ,  $[81; 120]$ ,  $[121; 160]$ . Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 40. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$y_1 = 125$$

$$y_2 = 80$$

$$y_3 = a$$

Сначала найдём  
точки пересечения  
графиков этих функций

$$1) y = y_1$$

$$5x^2 = 125$$

$$x = \pm 5$$

$$2) y = y_2$$

$$5x^2 = 80$$

$$x = \pm 4$$

Теперь найдём длину отрезков  $l_1$  и  $l_2$   
которые высекает параболой  $y = 5x^2$  на этих  
прямых :

$$l_1 = |5 - (-5)| = 10$$

$$l_2 = |4 - (-4)| = 8$$

I случай  $a$  (параметр) - катет.

тогда  $8^2 + a^2 = 10^2$

$$a = 6$$

II случай  $a$  - гипотенуза

тогда  $8^2 + 10^2 = a^2$

$$a = 2\sqrt{41}$$

Ответ:  $6, 2\sqrt{41}$

№3 Пусть  $x$  - количество страниц,  
 $y$  - количество марок.

Тогда:  $22x + y = 900$

По условию:

$$x - 1 \geq \frac{y}{17}$$

$$\frac{y}{15} > x$$

Средствительно:

$$900 = 22x + y > 37x$$

$$900 = 22x + y \leq 39x - 17$$

$$39x - 17 \geq 900 > 37x$$

$$\left\lfloor \frac{900}{37} \right\rfloor \geq x > \left\lceil \frac{917}{39} \right\rceil$$

$$24 \geq x \geq 24 \Rightarrow x = 24$$

$$y = 900 - 22 \cdot 24 = 372$$

Ответ: 372 марки.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

Так как разность любых двух выбранных чисел не дел. на 40, то все числа (выбранные) дают разные остатки при дел. на 40.

П.к. нам нужна наименьшая сумма, то тогда эти остатки 1, 2, ..., 24.

П.к. в каждом промеж. по 40 чисел, то S-сумма всех выбранных чисел равна:

$$S = (0 \cdot 6 + r_1 + \dots + r_6) + (40 \cdot 6 + r_7 + \dots + r_{12}) + (80 \cdot 6 + r_{13} + \dots + r_{18}) + (120 \cdot 6 + r_{19} + \dots + r_{24}),$$

где  $r_i$  - остатки при дел. на 40, выбранных чисел.

$$\text{Т.к. } \sum_{i=1}^{24} r_i = \sum_{i=1}^{24} i = 300, \text{ то } S = 300 + 6 \cdot (40 + 80 + 120) = 1740$$

Ответ: 1740

№5. Каждой разряд назовём "клеткой".  
Сначала найдём кол-во способов расстав.  
цифры "3":  $18-8+1=13$ .

Теперь найдём кол-во способов в ост. 12 кл.  
расстав. цифры "5" и "8":

Пусть  $k_8$  - кол-во "8"-рок,  $1 \leq k_8 \leq 11$   
и Пусть  $k_8 = k$ , ( $1 \leq k \leq 11$ ) тогда остав.  
(12-k) клеток заполним "5"-ками. Тогда  
кол-во способов будет равно  $C_{11}^k$

а общее кол-во способов:

$$13 \cdot \sum_{k=1}^{11} C_{11}^k = 27599$$

Ответ: 27599

№4.

$$|ax-a| \leq \sqrt{x-3}$$

$$a^2(x-1)^2 \leq x-3$$

$$a^2x^2 - 2a^2x - x + a^2 + 3 \leq 0$$

$$D = (2a^2+1)^2 - 4a^2(a^2+3) = 1 - 8a^2 < 0$$

⇒ нет решений

Ответ: нет решений.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Решение

$S_{\text{вал}} = S = \frac{BC \cdot h_2}{2}$   
 $\frac{BC}{BC} = \frac{12}{h_1}$   
 $\frac{9x \cdot h_1}{2}$

$S_{ABC} = \frac{BC \cdot h_2}{2} + 54x + S_1$

$\frac{4x \cdot 12}{2} = 24x$   
 $\frac{24x}{24x + S_1} = \frac{16}{3h_1} S_{ABC} = \frac{9x \cdot h_1}{2} + S + S_1$   
 $24x \cdot 3h_1 = 16(24x + S_1)$   
 $72xh_1 = 384x + 16S_1$   
 $16S_1 = 72xh_1 - 384x$   
 $S_1 = \frac{4.5xh_1 - 24x}{1}$   
 $25S = S_1 + 54x + \frac{BC \cdot h_2}{2}$   
 $S = 54x + \frac{BC \cdot h_2}{2} - \frac{9xh_1}{2}$

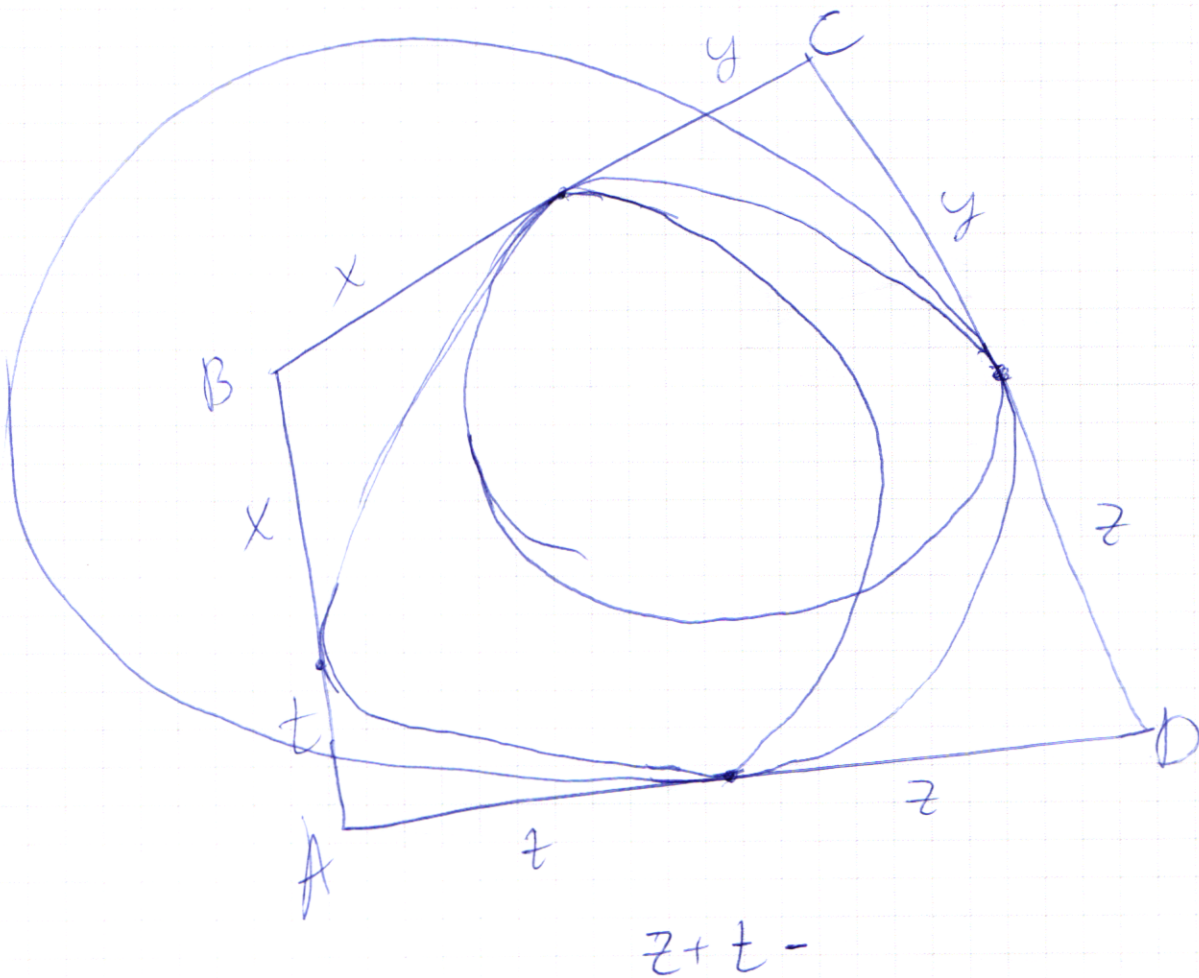
$\frac{S}{S + S_1 + \frac{9xh_1}{2}} = \frac{1}{25}$   
 $24S = S_1 + \frac{9xh_1}{2}$   
 $\frac{S}{S_1 + 54x + \frac{BC \cdot h_2}{2}} = \frac{1}{25}$



$$a^2(x-1)^2 \leq x-3.$$

$$a^2x^2 - 2a^2x + a^2 \leq x - 3.$$

$$a^2x^2 - x(2a^2+1) + a^2+3 \leq 0$$





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$24 \cdot \frac{1+24}{2} \cdot 24 = 300 + 40 \cdot 6 + 80 \cdot 6 + 120 \cdot 6$$

$$125 = 5x^2$$

$$x = \pm 5$$

$$80 = 5x^2$$

$$x = \pm 4$$

$$22x + y = 900$$

$$17x - 17 \geq y > 15x$$

$$17 \cdot (x-1) \geq y$$

$$17x \geq y + 17 \geq 15x + 17$$

$$y < 17x - 17 \leq 578$$

$$x - 1 \geq \frac{y}{17}$$

$$x < \frac{y}{15}$$

$$\begin{array}{r} 899 \\ -127 \\ \hline 772 \end{array}$$

$$10 \quad 8$$

$$a = 6$$

$$\begin{array}{r} 900 \\ -127 \\ \hline 773 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 773 \\ -66 \\ \hline 707 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 707 \\ -110 \\ \hline 597 \end{array}$$

$$|ax - a| \leq \sqrt{x - 3}$$

$$\frac{y}{15} + x - 1 \geq \frac{y}{17} + x$$

$$22x + 127 < 900$$

$$x \leq 35$$

$$(a(x-1))^2 \leq x-3$$

$$17(y-15) > 15y$$

$$2y > 17 \cdot 15 =$$

$$= 255$$

$$y > 127$$

$$a^2(x-1)^2 \leq x-3$$

$$a^2x^2 - 2a^2x + x + a^2 - 3 \leq 0$$

$$a^2x^2 - x \cdot (2a^2 + 1) + a^2 + 3 \leq 0$$

$$(2a^2 + 1)^2 - 4a^2(a^2 + 3) = 4a^4 + 4a^2 + 1 - 4a^4 -$$

$$-12a^2 =$$

$$= 1 - 8a^2$$

$$\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = 2$$

$$\frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = 2$$

$$\frac{\sqrt{D}}{a} = 2$$

$$x_1 = \frac{2a^2 + \sqrt{8a^2 + 1}}{2a^2} \quad 4a^4 - 4a^2 + 1 - 4a^4 + 12a^2 =$$

$$= 1 + 8a^2$$

$$a^2 = y$$

$$4a^4 - 8a^2 - 1 = 0$$

$$D = 64 + 16 = 80$$

$$4y^2 - 8y - 1 = 0$$

$$1 + 8a^2 = 4a^4 \quad |x_1 - x_2|$$

$$a^2 - 1$$

$$39x - 177 > 22x + y > 37x$$

$$39x - 177 > 900 > 37x$$

$$\begin{array}{r} 917 \overline{) 39} \\ \underline{78} \phantom{23} \\ 137 \\ \underline{117} \\ 20 \end{array}$$

$$247x > 23$$

$$x = 24$$

$$\begin{array}{r} 900 \overline{) 37} \\ \underline{74} \phantom{24} \\ 160 \\ \underline{148} \\ 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 24 \\ 22 \\ \hline + 48 \\ 48 \\ \hline 528 \end{array}$$

$$23 \cdot 177 > 900$$

$$\begin{array}{r} \phantom{2} \phantom{1} \\ \times 193 \\ \hline \phantom{2} 143 \\ 772 \\ \hline 193 \phantom{0} \end{array}$$

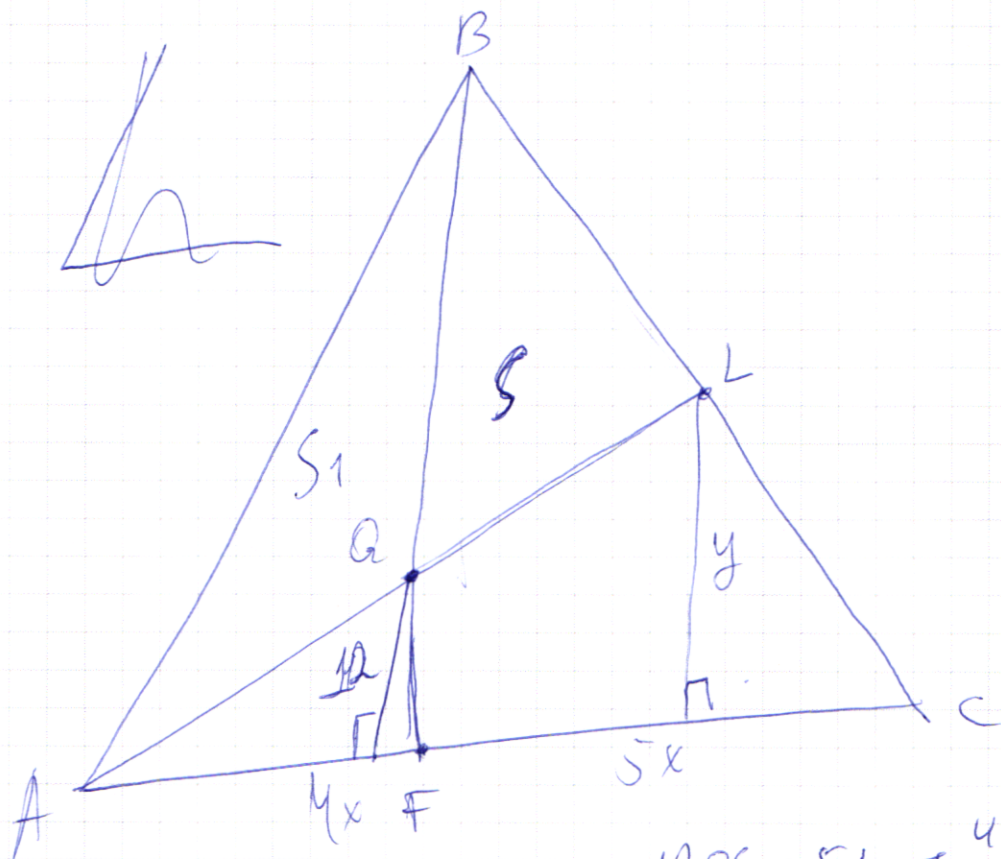
- 1 ✓
- 2
- 3 ✓
- 4
- 5
- 6
- 7 ✓



$$2 \cdot 7599$$

$$\begin{aligned} \frac{9 \cdot 10 \cdot 11}{6} &= 13 \cdot \binom{11}{k} = \frac{8 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 9}{24} = \sum_{k=1}^{12} \binom{11}{k} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 1}{7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11} = \frac{220}{22 \cdot 11} \\ &= 3 \cdot 5 \cdot 11 \\ &= 2(\binom{11}{1} + \binom{11}{2} + \binom{11}{3} + \binom{11}{4} + \binom{11}{5}) + 11 = \\ &= 2(11 + 55 + 165 + 330 + 462) + 11 = \\ &= 11(3 + 10 + 30 + 66 + 84) = \underline{11 \cdot 193} \end{aligned}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$120S = 5S_1 + \frac{45xy}{2}$$

$$\frac{S}{5 + S_1 + \frac{9xy}{2}} = \frac{1}{25}$$

$$24S = S_1 + \frac{9xy}{2}$$

$$\frac{S + \frac{9xy}{2} - 24x}{24x + S_1} = \frac{5}{4}$$

$$4S + 18xy - 96x = 120x + 5S_1$$

$$S = x$$

$$\frac{S_1}{6} + \frac{xy}{4} + 18xy - 96x = 216x + 5S_1$$

$$116S - 18xy + 96x = \frac{45xy}{2} - 120x$$

$$116 + 216x = \frac{81xy}{2}$$

$$y = \frac{664}{81}$$





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)