МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР 5-017

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120°?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-017
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $y=2x^2$ - парабола
$y=98$; $y=18$; $y=a$ - прямые, парал. оси x.
Найдём точки пересечения первых двух прямых с параболой

1) $2x^2=98$ 2) $2x^2=18$
$x^2=49$ $x^2=9$
$x=\pm7$ $x=\pm3$

Значит ~~отрез~~ начало отр. 1 имеет коор. $(-7;98)$, конец $(7;98)$, где $(x;y)$
Аналогично отр. 2. имеет коор. начало $(-3;18)$, конец $(3;18)$
Найдём длины отрезков
$l_1 = 7+7=14$ - длина 1 отр.
$l_2 = 3+3=6$ - длина 2 отр.
$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$
тогда по т. cos:
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos 120°$
Рассмотрим все возможные перестановки отрезков. Обозначим неизвестный отрезок за x. Против наиб. угла лежит наиб. сторона, тогда против этого угла может лежать 1-ый или неизвестный отрезок.

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

1) Пусть против угла лежит 1-ый отрезок, тогда ~~l_3~~ $l_3 < l_1$, где l_3 - длина неизв. отрезка.

по т. cos:

$14^2 = 6^2 + x^2 + 2 \cdot 6 \cdot x \cdot |\overset{\frac{1}{2}}{\cos 120°}|$

$196 = 36 + x^2 + 6x$, решаем кв. ур-ие.

$x^2 + 6x - 160 = 0$

$\frac{D}{4} = 9 + 160 = 169$

$x_1 = \frac{-3+13}{1} = 10$ - не подх., т.к. $l_3 > l_1$, а должно $l_3 < l_1$

$x_2 = -\frac{3-13}{1} = -16$ - не подх., т.к. длина отрезка не может быть отр.

2) Пусть против угла лежит 3-ий отрезок, тогда $l_3 > l_1$, по т. cos:

$x^2 = 14^2 + 6^2 + 2 \cdot 6 \cdot 14 \cdot |\cos 120°|$

$x^2 = 196 + 36 + 84 = 316$

$x = \sqrt{316} = 2\sqrt{79}$, тогда

т.к. $y = 2x^2$ - симметр. отн. оси y, то т.к. $l_3 = 2\sqrt{79}$, то $x_{min} = -\sqrt{79}$; (коорд. по x миним.)

$x_{max} = \sqrt{79}$ (коорд. по x макс.).

$y = (2x^2) = 2 \cdot 79 = 158$, тогда $y = a$ перес. $y = 2x^2$ в точке $a = 158$.

Ответ: $a = 158$.

$\begin{array}{r} 6 \\ \times 14 \\ \hline 24 \\ 6 \\ \hline 84 \end{array}$ $\begin{array}{r} 120 \\ +196 \\ \hline 316 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 316 & 4 \\ 28 & 79 \\ \hline 36 & \\ 36 & \\ \hline 0 & \end{array}$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

5-017
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$g'(x) = 3\cos 3x \cdot \sin 7x + 7\cos 7x \cdot \sin 3x - 2\sin x - 10\cos 5x \sin 5x$

$\sin 7x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin 2x)$

$\sin 3x \cdot \cos 7x = \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin(-2x)) = \frac{1}{2}(\sin 5x - \sin 2x)$

$\cos 5x \cdot \sin 5x = \frac{1}{2}\sin 10x$

$g'(x) = \frac{3}{2}(\sin 5x + \sin 2x) + \frac{7}{2}(\sin 5x - \sin 2x) - 2\sin x - 5\sin 10x = \frac{3}{2}\sin 5x + \frac{3}{2}\sin 2x + \frac{7}{2}\sin 5x - \frac{7}{2}\sin 2x - 2\sin x - 5\sin 10x = 5\sin 5x - 2\sin 2x - 2\sin x - 5\sin 10x =$

$= 5(\sin 5x - 2\sin 5x\cos 5x) - 2(2\sin x\cos x + \sin x) =$

$= 5\sin 5x(1 - 2\cos 5x) - 2\sin x(2\cos x + 1)$

~~Максимум ф-ии достигается~~ Точки максимума и минимума можно найти, приравняв произв. ф-ии к 0.

$5\sin 5x(1 - 2\cos 5x) - 2\sin(2\cos x + 1) = 0$

$5\sin 5x(1 - 2\cos 5x) = 2\sin x(2\cos x + 1)$

$\sin 3x \cdot \sin 7x = \frac{1}{2}(\cos 5x - \cos 2x) = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 5x$

$g(x) = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 5x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$g'(x) = -\sin 2x + \frac{5}{2}\cos 5x - 2\sin x\cos x - 10\cos 5x\sin 5x =$

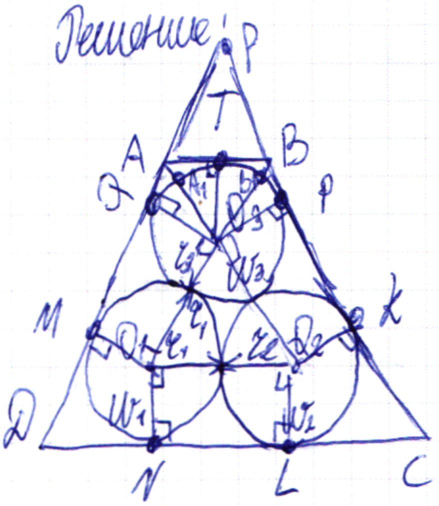
$= -\sin 2x + \frac{5}{2}\cos 5x - \sin 2x - 10\cos 5x \sin 5x =$

$= -3\sin 2x + 5\cos 5x\left(\frac{1}{2} - 2\sin 5x\right)$

№4 Дано:
ABCD: окр.
$r_1 = r_2 = r_3$
w_1, w_2, w_3 попарно
кас. друг друга;
w_1 кас. AD и DC;
w_2 кас. DC и CB;
w_3 кас. CB, BA, AD

a) r_1, r_2, r_3 - ? если
$AD + BC - AB - CD = 12$
б) $\angle AO_3B$ - ? O_3 - центр w_3
в) AB - ? $AO_3 \cdot O_3B = 58$

Решение:



а) $DM = DN$, $LC = CK$, $TB = BP$, $AT = AQ$, т.к. касат., пров. к окр. из одной точки равны. (1)
$AD + BC - AB - CD = AQ + QM + MD + BP + PK + KC - AT - TB - DN - LN - LC$. Из (1)
$QM + PK - NL = 12$, $NL = r_1 + r_2 = 2r$,
т.к. $r_1 = r_2$ по усл. и эти окр. кас. одной стороны (получаем прямоугольник)
$QM + PK - 2r = 12$. Т.к. O_1M и O_3Q - касат, то $\angle O_1MQ = \angle O_3QM = 90°$, $O_1M = O_3Q$, т.к это радиусы, значит

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

O_1MQO_3 - прямоугольник, значит $O_1O_3 = MQ = r_1 + r_3 = 2r$
Аналогично KO_2O_3P - прямоуг., $PK = O_2O_3 = r_3 + r_2 = 2r$,
значит $QM + PK - 2r = 12$; $2r + 2r - 2r = 12$; $r = 6$,
то есть $r_1 = r_2 = r_3 = 6$.

д) ~~Отр~~ Так как у $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ одинаковые радиусы, окружности попарно кас. друг друга, то $AB \parallel DC$, т.к. в противном случае окружности не будут попарно кас. друг друга. Таким образом $ABCD$ - трапеция с осн AB и DC, притом трапеция равнобокая. Достроим $DABC$ до прав. треуг. DPC, ~~так~~ Это возможно сделать, так ~~$AD, BP < DM$ и потому что~~ $\triangle O_1O_2O_3$ ~~также~~ правильный, и $O_3O_1 \parallel AD$, $O_1O_2 \parallel DC$, $O_2O_3 \parallel BC$.
$\angle P = 60°$; $\angle PAB = \angle PBA = 60°$; $\angle QAB = \angle ABP = 120°$ как смежные с $\angle PAB$ и $\angle PBA$ соотв.

Рассм. O_3QAT: $QO_3 = TO_3 = r = 6$, $QA = AT$, значит $\triangle O_3QA = \triangle O_3TA$ по 2 равным и одной общей стороне.
T - середина AB, т.к. трап. $ABCD$ равноб., ω_3 кас. бок. стор. и AB, AB соотв. в середине из-за рав-ва бок. стор. $\triangle AO_3B$ равност. т.к. трап. равноб., значит O_3T - мед., бис., высота $\angle AO_3B$. $\angle TAO_3 = \frac{1}{2}\angle TAQ$ из-за рав-ва $\triangle O_3QA$ и $\triangle O_3TA$. $\angle TAO_3 = \frac{120°}{2} = 60°$.
Аналогично $\angle TBO_3 = 60°$ ~~и $\angle O_3AB$ равноб. с осн. AB~~, сумма углов треуг. равна $180°$, тогда $\angle AO_3B = 60°$,

в печатном условии этот угол назывался $AOB = 60°$.

в) Рассмотрим O_3A, O_3B, пусть они перес. окр в т. A_1 и B_1 соотв.

$O_3A = r + A_1A$, $O_3B = r + BB_1$, значит $AA_1 = BB_1 = x$

по т. cos для $\triangle O_3AB$.

$AB^2 = O_3A^2 + O_3B^2 - 2\, O_3A \cdot O_3B \cdot \cos 60°$

$O_3A_1 = r + x = 6 + x = O_3B_1$

~~$O_3B_1 = 6+x$~~ $O_3A_1 \cdot O_3B = 36 + 2x + x^2 = 58$ по усл.

$x^2 + 2x - 22 = 0$

$D = 4 + 88 = 92$

$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{92}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{23}}{2} = \sqrt{23} - 1$

$x_2 = \frac{-2 - \sqrt{92}}{2} < 0$, что невозможно из-за условия кас. окр. стороны и т.к. длина отр. ≥ 0

$AB^2 = (\sqrt{23}+5)^2 + (\sqrt{23}+5)^2 - 2 \cdot (\sqrt{23}+5)^2 \cdot \overset{\frac{1}{2}}{\cos 60°} = (\sqrt{23}+5)^2$

$AB = \sqrt{23} + 5$

Ответ: $r_1 = r_2 = r_3 = 6$; $\angle AO_3B = \angle AOB = 60°$; $AB = \sqrt{23} + 5$.

№5 $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

ОДЗ: $\begin{cases} \sqrt{x+7} - x > 0 \\ \sqrt{x+7} - x \neq 1 \\ x+4 > 0 \Leftrightarrow x > -4 \\ x \geq -7 \end{cases}$

$\sqrt{x+7} - x > 0 \Leftrightarrow$ при $x \in [-7; 0)$ выполняется, решим для $x > 0$:

$\sqrt{x+7} = x$; $x + 7 = x^2$; $x^2 - x - 7 = 0$ $D = 1 + 28 = 29$ $x_1 = \frac{1+\sqrt{29}}{2}$ $x_2 = \frac{1-\sqrt{29}}{2} < 0$

дополнительно $\left(0; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$;

$\sqrt{x+7} - x = 1$; $x + 7 = (1+x)^2$ при $x \geq -1$

$x + 7 = 1 + 2x + x^2$; $x^2 + x - 6 = 0$ $D = 25$; $x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$ $x_2 = -3$ у нас $x \geq -1$

Итого ОДЗ: $x \in (-4; 0) \cup (0; 2) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$.

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$\log_{\sqrt{x+7}-x} \geq 0$~~ $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq \log_{\sqrt{x+7}-x}\sqrt{x+7}-x$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}\dfrac{(x+4)}{\sqrt{x+7}-x} \geq 0$

Знак этого выражения по принципу рационализации сравним со знаком

$(\sqrt{x+7}-x-1)\left(\dfrac{x+4}{\sqrt{x+7}-x}-1\right) \geq 0$

$\sqrt{x+7}-x-1=0$, единственный корень $x=2$, решал при подсчёте ОДЗ.

$+ \quad + \quad - \quad -$ для 1 скобки знаки отн. $x=2$

$- \quad + \quad + \quad \frac{1+\sqrt{29}}{2} \quad -$ для 2 скобки знаки отн. $x=-0{,}75$

$-0{,}75 \quad 2 \quad x$

$\dfrac{x+4}{\sqrt{x+7}-x}-1=0$ $\begin{cases} x+4-\sqrt{x+7}+x=0 \\ \sqrt{x+7}-x\neq 0 \quad x\neq \frac{1+\sqrt{29}}{2} \end{cases}$

$x+4-\sqrt{x+7}+x=0$

$2x+4=\sqrt{x+7}$, $x \geq -2$

$4x^2+16x+16=x+7$, $4x^2+15x+9=0$

$D=225-144=81$

$x_1=\dfrac{-15+9}{8}=-0{,}75$ $x_2=-3$ ← не подх. т.к. $x \geq -2$

С учётом ОДЗ: $x \in [-0{,}75;0) \cup (0;2)$.

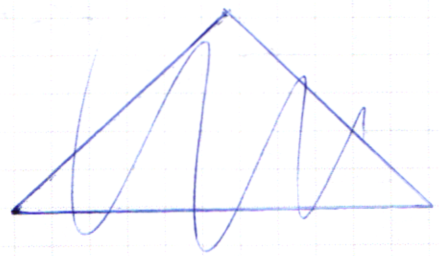
Ответ: $x \in [-0{,}75;0) \cup (0;2)$.

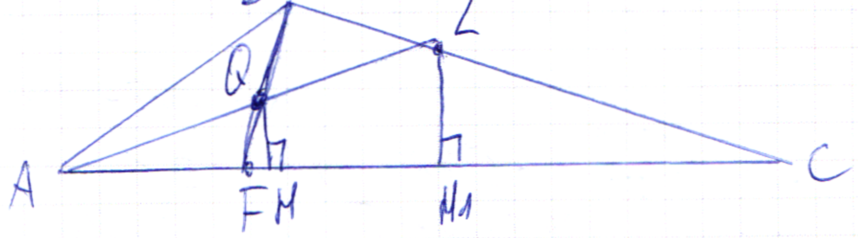
№3 Если число 17-ти значное, число 8 в нём встречается 7 раз, то цифры 0 и 7 суммарно встречаются 10 раз.
По сути имеем перед собой 10-ти значное число в двоичной системе счисления, где 0 – встреча 0, 1 – встреча 7 на данной позиции. Для 10-ти значного числа различных расстановок может быть 2^9, но так каждое число встречается минимум раз, то варианты все 0 и все 1 нам не подходят, получаем $512-2=510$ возможных перестановок.
Последовательность из восьмёрок может начинаться в 10 ~~мест первых восьми~~ наибольших разрядах 17-ти значного числа, то есть может разбивать наше число из „0" и „7" в 10 местах, итого получаем $510 \cdot 10 = 5100$ таких 17-ти значных чисел.
Ответ: 5100.

№6 Дано:
$F \in AC$; $L \in BC$;
$\frac{AF}{FC} = \frac{2}{3}$; $BF \cap AL = Q$;
$S_{BQL} : S_{BAC} = \frac{5}{12}$;
$QH = 6$;

LH_1 - ?

Решение:





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7 Чтобы разность ни одной пары выбранных чисел не делилась на 45, необходимо, чтобы у каждого из 30 выбранных чисел остаток от деления на 45 был ~~минимален~~ различен.

Для каждого промежутка мы берём 6 чисел, их сумма равна $6\cdot 45\cdot(n-1) + a$ ~~mod 45 +6~~, ~~mod~~ где n - номер промежутка, a - ~~число~~ сумма остатков от деления на 45 всех выбранных на этом пр-ке чисел. Заметим, что для каждого промежутка мы ~~возьмём $6\cdot 45\cdot(n-1)+6$~~ внезависимости от выбранных чисел будем брать величину $6\cdot 45(n-1)+6$, надо лишь выбрать числа так, чтобы их суммарный остаток от деления был минимален, это достижимо, если мы будем брать числа с остатком от деления $m \in [0; 29]$, так как чисел всего 30.

Тогда наименьшая сумма равна
$A+B$, где A – ~~по~~ сумма постоянных величин для каждого пр-ка; B – суммарных остатков от деления чисел

$A = 30 + 0 \cdot 6 \cdot 45 + 2 \cdot 6 \cdot 45 + 3 \cdot 6 \cdot 45 + 4 \cdot 6 \cdot 45 = 10 \cdot 6 \cdot 45 + 30 =$
$= 30(90+1) = 30 \cdot 91 = 2730$

$B = \frac{0+29}{2} \cdot 30 = 29 \cdot 15 = 435$ (по формуле арифм. прогр.)

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times\ 15 \\ \hline 145 \\ 29\ \ \\ \hline 435 \end{array}$$

$A+B = 3165$

$$\begin{array}{r} 435 \\ +\ 2730 \\ \hline 3165 \end{array}$$

Ответ: 3165.

№2 $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$g'(x) = 3\cos 3x \sin 7x + 7\cos 7x \sin 3x - 2\sin x \cos x - 10\sin 5x \cos 5x =$
$= \frac{3}{2}(\sin 5x + \sin 2x) + \frac{7}{2}(\sin 5x - \sin 2x) - \sin 2x - 5\sin 10x =$
$= 5\sin 5x - 2\sin 2x - \sin 2x - 5\sin 10x = 5\sin 5x(1 - 2\cos 5x) - 3\sin 2x$, приравняем производную к 0.

$5\sin 5x(1-2\cos 5x) - 3\sin 2x = 0$
$5\sin 5x(1-2\cos 5x) = 3\sin 2x$

Рассмотрим случаи:

1) $5\sin 5x = 0$, $3\sin 2x = 0$
$x = \frac{\pi k}{5}, k \in Z$; $x = \frac{\pi m}{2}, m \in Z$ $\Rightarrow$ $x_{об.} = \frac{\pi n}{1}, n \in Z$

2) $1 - 2\cos 5x = 0$; $3\sin 2x = 0$
$\cos 5x = \frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi k}{5}; k \in Z$; $x = \frac{\pi m}{2}; m \in Z$

общих корней нету.

$g(2\pi n; n \in Z) = 0 - 0 + 1 + 4 = 5$; $g(\pi + \pi n; n \in Z) = 5$

Ответ: $g_{наиб} = 5$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)