МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 15-017

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка [1; 35], [36; 70], [71; 105], [106; 140], [141; 175]. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

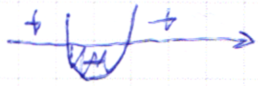
Найдем ОДЗ: $\begin{cases} x+5>0 \\ \sqrt{x+3}-x>0 \\ \sqrt{x+3}-x\neq 1 \\ x+3\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-5 \\ \sqrt{x+3}>x \\ \sqrt{x+3}\neq x+1 \\ x\geq -3 \end{cases}$

1) Рассмотрим $\sqrt{x+3}>x$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ x+3\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\geq 0 \\ x+3>x^2 \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<0 \\ x\geq -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x\geq 0 \\ x^2-x-3<0 \end{cases} \end{array}\right.$

$D = 1+12 = 13$

$x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$



$\left[\begin{array}{l} -3\leq x<0 \\ \begin{cases} \frac{1-\sqrt{13}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x\geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow x\in\left[-3;\ \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

2) Рассмотрим $\sqrt{x+3}\neq x+1$

$\begin{cases} x+1\geq 0 \\ x+3\neq x^2+2x+1 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -1 \\ x^2+x-2\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\geq -1 \\ (x+2)(x-1)\neq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad x\neq 1$

ОДЗ: $\begin{cases} x\geq -3 \\ x\in\left[-3;\ \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \\ x\neq 1 \end{cases} \Rightarrow x\in[-3;1)\cup\left(1;\ \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5)\geq 1$

$(\sqrt{x+3}-x-1)\cdot(x+5-\sqrt{x+3}+x)\geq 0$

Н.н.ф.: $\sqrt{x+3}-x-1=0$ $\quad$ $x+5-\sqrt{x+3}+x=0$

$x+3=x^2+2x+1$ $\quad$ $2x+5=\sqrt{x+3}$

$x^2+x-2=0$ $\quad$ $4x^2+20x+25=x+3$

$(x+2)(x-1)=0$ $\quad$ $4x^2+19x+22=0$ $\quad$ $\frac{3}{4}$

$D=361-352=9$

$x_{1,2}=\frac{-19\pm 3}{8}$ $\quad$ $x_1=-2\frac{6}{8}$ $\quad$ $x_2=-2$

$(x+2,75)(x+2)=0$

$(x+2)(x-1)\cdot(x+2,75)\cdot(x+2)\geq 0$

~~x~~ $x\in(-\infty;-2,75]\cup\{-2\}\cup[1;+\infty)$

с учетом ОДЗ: $x\in[-3;-2,75]\cup\{-2\}\cup(1;\frac{1+\sqrt{13}}{2})$

Ответ: $[-3;-2,75]\cup\{-2\}\cup(1;\frac{1+\sqrt{13}}{2})$.

№4

Дано: ABCD — четырехугольник

3 сферы с ц. в т. ω_1, ω_2, ω_3

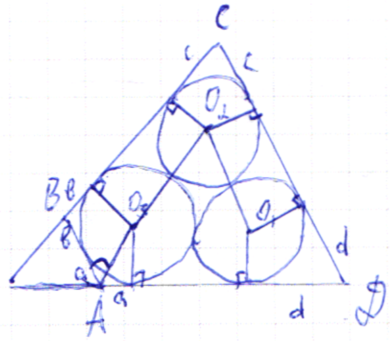
а) $AD+BC-AB-CD=10$

б) ω_3 — это т. O_3

в) $AO\cdot BO=42$

а) $r_1=r_2=r_3=-?$

б) $\angle AO_3B-?$ $\quad$ в) $AB-?$



Решение: 1) раз окружности касаются сторон и друг друга попарно, значит проведем

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(продолжение №4)

прямые через центры окружностей и точки касания со сторонами ABCD. В каждом случае получаются прямоугольники (т.к. ~~угол~~ радиус перпендик. к ~~касающ.~~ касающимся). Стороны таких прямоуг. равны ~~r~~ r и ~~2r~~ 2r (т.к. два радиуса проведены в т. кас. окр.).

Выразим стороны через радиусы и переменные (по св-ву касающ. из 1 точки к окр.). Из точки A касающ. длины равны a, из B b, из C c, из D d.

$AD = a + d + 2r$; $AB = a + b$; $BC = b + c + 2r$; $CD = c + d + 2r$

Значит, $a + d + 2r + b + c + 2r - a - b - c - d - 2r = 10$

$2r = 10 \Leftrightarrow \underline{r = 5}$. $\quad 2^9 - 2 + 10 \cdot 2^8 = 3070$

№3

1) Шесть цифр „5" должно идти подряд ⇒ „5" всегда будет в числе. $18 - 6 + 1 = 13$ способами можно поставить такой ряд.

2) Остались цифры ~~0,5~~ 0, 9

На первом месте может быть 5 или 9.

а) если 5 стоять с первого места по шестое, то рассматр. 0 ~~и~~ и 9, то $2^{18-6} = 2^{12}$ способов.

~~б) если перв. не 5~~ Однако по условию каждая цифра должна быть задействована. Значит $2^{12} - 2$ способов

б) если перв. место не занимает ~~ряд~~ 5, значит первое знач. занимает фикс. число, к тому же ряд может ~~их~~ вставляться в разные промежутки $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{11} \cdot 11$ способов

$2^{12} - 2 + 11 \cdot 2^{11} = 4096 - 2 + 22528 = 26622$ (способа)

Ответ: 26622.

№1

1) длина отрезка гр. $y = 169$

$x^2 = 169 \quad x = \pm 13$

длина $= 26$

2) длина отрезка гр. $y = 64$

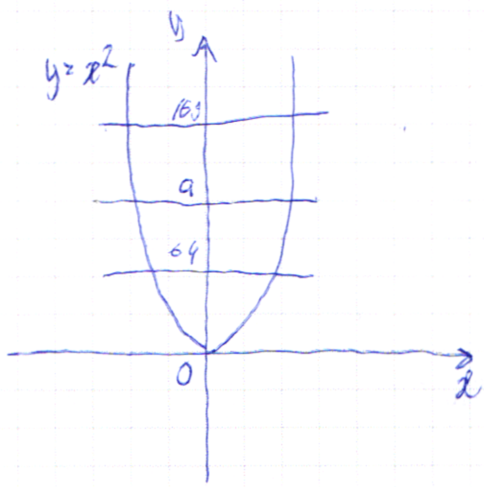
$x^2 = 64 \quad x = \pm 8$

длина $= 16$

3) длина отрезка гр $y = a$

$x^2 = a \quad x = \pm\sqrt{a}$

длина $= \boxed{2\sqrt{a}}$

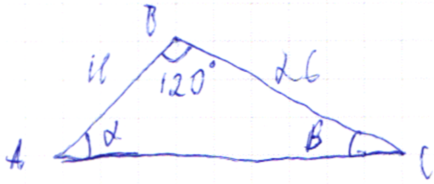


~~cos ( ) = ( )~~

Теорема косинусов

$c^2 = 576 + 256 - 416 \cdot 2(-\frac{1}{2})$

$c^2 = 576 + 256 + 416$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$\sin 5x \cdot \sin 9x = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 14x)$

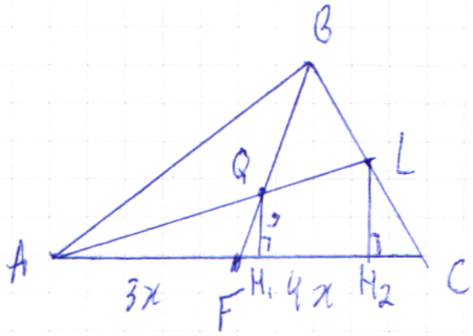
$g'(x) = -\frac{1}{2}(14\sin 14x - 4\sin 4x) - 14\cos 7x + 2\sin x$

$g'(x) = -7\sin 14x + 2\sin 4x - 14\cos 7x + 2\sin x$

$g'(x) = -14\sin 7x\cos 7x + 4\sin 2x\cos 2x + 2\sin x - 14\cos 7x$

$g'(x) = -14\cos 7x(\sin 7x + 1)$

№6



$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$

$QH_1 = 6$

1) $\triangle AQH_1 \sim \triangle ALH_2$

$\frac{QH_1}{LH_2} = \frac{6}{LH_2} = \frac{AQ}{AL}$

2) $\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

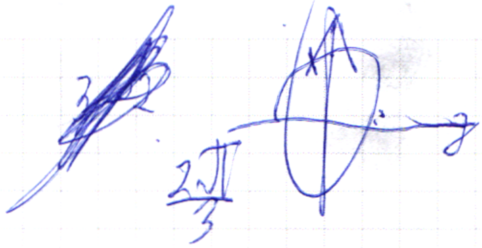
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-017

ШИФР

(заполняется секретарём)

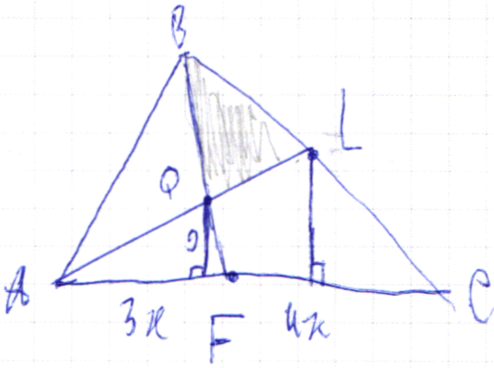
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№5

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

Найдем ОДЗ: $\begin{cases} x+5>0 \\ \sqrt{x+3}-x>0 \\ \sqrt{x+3} \neq 1+x \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-5 \\ \sqrt{x+3}>x \\ x+3 \neq x^2+2x+1 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow$



$\Leftrightarrow$

26^2

$\times\begin{array}{r} 26 \\ 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$

3,5

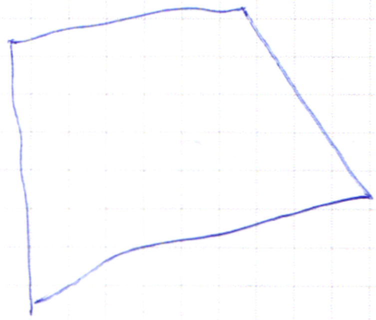
$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ \hline 96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$

2

-1,5

2,5

$\begin{array}{r} 26 \\ 16 \\ \hline 156 \\ 26 \\ \hline 416 \end{array}$

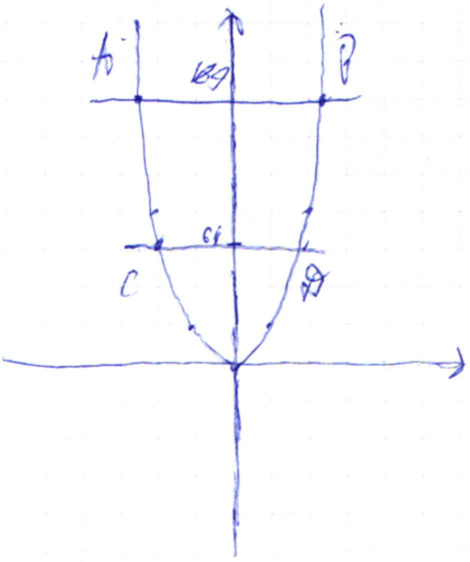


☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$y = x^2$

$x^2 = 169 \quad x_{12} = \pm 13 \quad AB = 26$

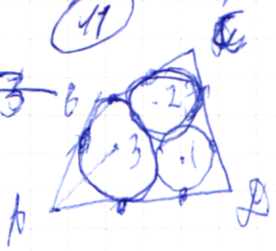
$x^2 = 64 \quad x_{12} = \pm 8 \quad CD = 16$

№3

~~2~~1.

$\boxed{5^6 \cdot 3^{12} + 11 \cdot (2 \cdot 5^6 \cdot 3)^{11}}$ ~~3 3 3 3~~

11 $\quad$ 5·7



№2

$g'(x) = 5\cos 5x \cdot \sin 9x + 9\sin 5x \cos 9x - 14\sin 7x \cdot \cos 7x + 2\cos x \cdot \sin x$

$- 7\sin 14x + \sin 2x$

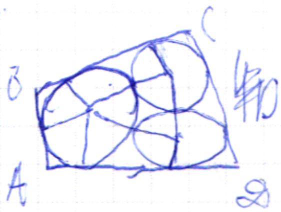
$AD + BC - AB - CD = 10$

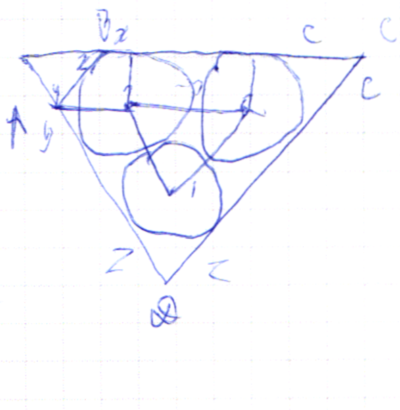
$y + \cancel{x} + 2r + x + \cancel{r} + \cancel{2r} + y + x - \cancel{x} - \cancel{y} - \cancel{2r} = 10$

$2y + 2x + 2r = 10$

$y + x + r = 5$

$y + \cancel{x} + 2r + x + r + 2r - y - x - r - 7 - 2r$





$\frac{\sqrt{3}}{2} = 16$

$\frac{26}{16}$

$\frac{13}{8}$

$1024 \cdot 4 = 4096$

4094

$2048 \cdot 11$: 2048 + 20480 = 22528

22528 + 4094 = 26622

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15 - 017

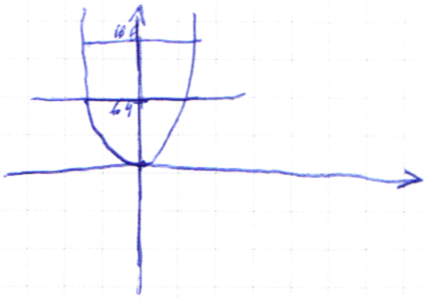
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$y = x^2$



$$22 \cdot 16 = 352$$

$$19 \cdot 19 = 361$$

№5

~~МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ~~

19^2

$$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$$

ОДЗ: $x > -5$, $x \geq -3$

$\sqrt{x+3} - x > 0$

$\sqrt{x+3} - x \neq 1$

$\sqrt{x+3} \neq 1 - x$

$x + 3 \neq 1 - 2x + x^2$

$x^2 - 3x - 2 \neq 0$

$D = 9 + 8 = 17$

$\boxed{x_{12} \neq \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}}$

$(\sqrt{x+3} - x - 1)(x + 5 - \sqrt{x+3} + x) \geq 0$

$x + 3 = x^2 + 2x + 1$

$x^2 + x - 2 = 0$

$D = 1 + 8 = 3^2$

$x_{12} = \frac{-1 \pm 3}{2}$

$(x+2)(x-1) = 0$

$-3; 1 \vee 1;$

$2x + 5 = \sqrt{x+3}$

$4x^2 + 20x + 25 = x + 3$

$4x^2 + 19x + 22 = 0$

$D =$

$\sqrt{x+3} > x$

если $-3 \leq x \leq 0$

если $x \geq 0$

$x^2 - x - 3 \leq 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)