

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР

5-001

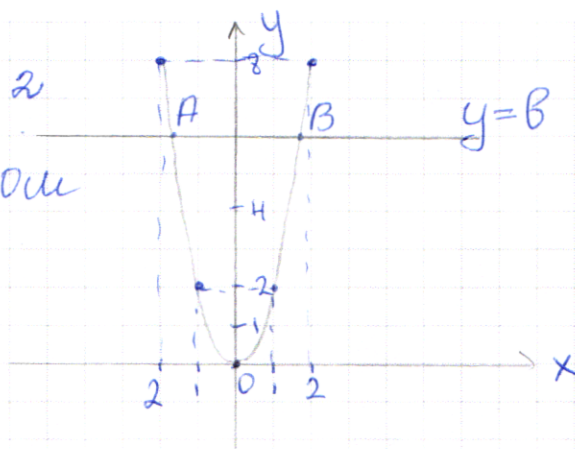
Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.
3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.
7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

1. Изобразим параболу $y = 2x^2$.
Теперь произвольным образом
изобразим прямую
 $y = b$, $b \in \mathbb{R}$. Она
отсекает на параболе



отрезок AB . Его длина определяется по формуле
и $AB = |x_1 - x_2|$, где x_1 и x_2 корни уравнения
 $2x^2 = b$.

2. Пусть $b = 98$. Получим: $y = 98$ и $y = 2x^2$
 $2x^2 = 98$
 $x^2 = 49$
 $x = \pm 7$

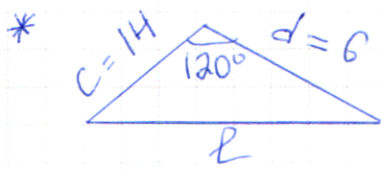
$x_1 = 7$ $x_2 = -7 \Rightarrow$ длина отрезка
(назовем его c) равна $c = |7 - (-7)| = 14$

3. Пусть $b = 18$. Получим $y = 18$ и $y = 2x^2$
 $2x^2 = 18$
 $x^2 = 9$

$x_1 = 3$ $x_2 = -3 \Rightarrow$ длина отрезка,
который отсекается этой прямой $y = 18$ (назовем его
 d) равна $d = |3 - (-3)| = 6$

4. Пусть длина отрезка, которой парабола
высекает на прямой $y = a$ равна l .

Тогда изобразим треугольник со сторонами c, d, l и углом 120° . Рассмотрим все возможные случаи.



По теореме косинусов

$$l^2 = d^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos 120^\circ, \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$l^2 = 196 + 36 + 84$$

$$l^2 = 316$$

$$l = 2\sqrt{79}$$

Заметим, что уравнение вида $2x^2 = b$ имеет два корня, таких, что $x_1 = -x_2$. Значит

$$l = |x_1 - x_2| = |-x_2 - x_2| = |2x_2|$$

$$2|-x_2| = l$$

$$2|-x_2| = 2\sqrt{79}$$

$$|-x_2| = \sqrt{79}$$

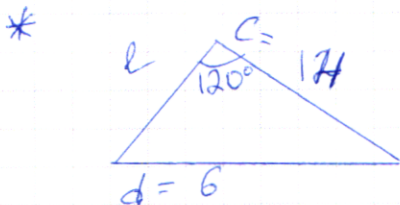
$$x_2 = \sqrt{79} \text{ или } x_2 = -\sqrt{79} \Rightarrow$$

$$x_1 = -\sqrt{79} \text{ или } \sqrt{79}$$

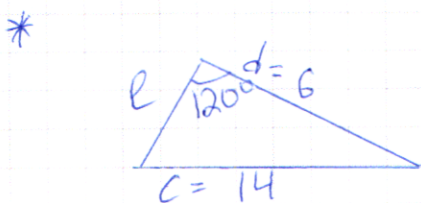
Чтобы найти a подставим x_1 или x_2 в уравнение

$$2x^2 = a$$

$$a = 2(\sqrt{79})^2 = 2 \cdot 79 = 158$$



Такой вариант невозможен, т.к. напротив большего угла должна лежать большая сторона



По т. косинусов

$$c^2 = l^2 + d^2 - 2 \cdot l \cdot d \cdot \cos 120^\circ, \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$c^2 = l^2 + d^2 + l \cdot d$$

$$196 = l^2 + 36 + 6 \cdot l$$

$$l^2 + 6l - 160 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

по теореме Виета:

$x_1 = -16$ — не подходит по условию.

$$x_2 = 10$$

По условию:

$$r = 2|x_1| \Rightarrow |x_1| = 5$$

$$x_1 = \pm 5$$

$$y = 2x^2 + a \quad y = a$$

$$2x^2 = a$$

$$a = 2(5)^2 = 50$$

Ответ: при $a = 50$ и $a = 158$

№2

Преобразуем выражение $\sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 =$

$$= \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos 10x) - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4 = \frac{1}{2} (\cos 4x -$$

$$- (2\cos^2 5x - 1)) - \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) + \cos^2 5x + 4 =$$

$$= \frac{\cos 4x}{2} - \cos^2 5x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + \cos^2 5x + 4 =$$

$$= \frac{\cos 4x}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + 4 = \frac{2\cos^2 2x - 1}{2} + \frac{\cos 2x}{2} + 4 =$$

$$= \frac{2\cos^2 2x + \cos 2x + 7}{2}$$

Получим функцию

$$y = \frac{2\cos^2 2x + \cos 2x + 7}{2}$$

исследуем ее.

Пусть $\cos 2x = t$, $t \in [-1; 1]$

Функция примет вид $y = \frac{2t^2 + t + 7}{2}$. Исследуем ее на промежутке от $[-1; 1]$.

$$y' = \frac{1}{2}(4t + 1) = 2t + \frac{1}{2}$$

$$y' = 0$$
$$2t + \frac{1}{2} = 0$$

$$t = -\frac{1}{4}$$

Найдем значения y -и при $t = -1; 1$ и $-\frac{1}{4}$.

$$y(-1) = \frac{2 \cdot (-1)^2 - 1 + 7}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y(1) = \frac{2 \cdot (1)^2 + 1 + 7}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ — максимальное значение}$$

$$y\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} + 7}{2} = \frac{55}{16} = 3\frac{7}{16} \text{ — минимальное значение}$$

Ответ: $y_{\max} = 5$
 $y_{\min} = 3\frac{7}{16}$

№ 5

$$\log_{\sqrt{x+7}-x} (x+4) \geq 1$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - x > 0 \\ \sqrt{x+7} - x \neq 1 \\ x+4 > 0 \\ x+7 \geq 0 \end{cases}$$

• $\sqrt{x+7} - x > 0$

$$\sqrt{x+7} > x$$

$$x \leq 0$$

$$x+7 \geq 0$$

или

$$\begin{cases} x > 0 \\ x+7 > x^2 \end{cases}$$

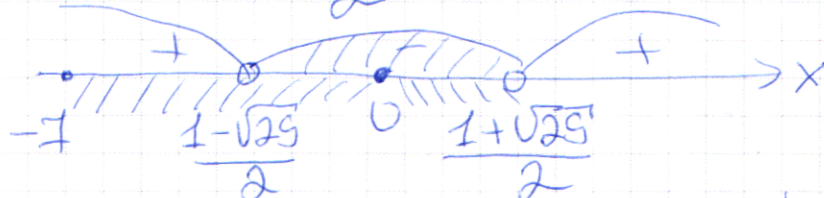
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq -7 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x - 7 < 0 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 7 < 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot (-7) = 29$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$$



$$x \in \left[-7; \frac{1-\sqrt{29}}{2} \right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2} \right)$$

$$\sqrt{x+7} = x+1, \quad x+1 \geq 0$$

$$x+7 = x^2 + 2x + 1, \quad x \geq -1$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

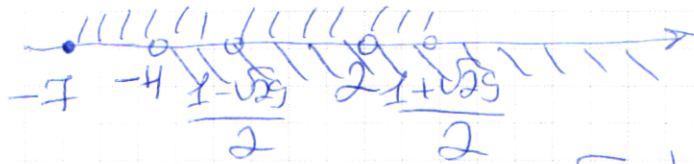
$$x_1 = -3, \quad x_2 = 2 \Rightarrow x \neq 2$$

не подходит
по области определения
 $x \geq -1$

$$\begin{cases} x+4 > 0 \\ x > -4 \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{cases} x \in \left[-7; \frac{1-\sqrt{29}}{2} \right) \cup \left(\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2} \right) \\ x \neq 2 \\ x > -4 \\ x \geq -7 \end{cases}$$



ODЗ: $x \in (-4; \frac{1-\sqrt{29}}{2}) \cup (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$

$$\sqrt{x+7} - x \leq x+4$$

$$x+4 \geq \sqrt{x+7} - x$$

$$2x+4 \geq \sqrt{x+7}$$

~~2x+4 < 0~~

$$\sqrt{x+7} \leq 2x+4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x+4 \geq 0 \\ x+7 \geq 0 \\ x+7 \leq (2x+4)^2 \end{array} \right.$$

$$x+7 \geq 0$$

$$x+7 \leq (2x+4)^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq -2 \\ x \geq -7 \\ x+7 \leq 4x^2+16x+16 \end{array} \right.$$

$$x \geq -7$$

$$x+7 \leq 4x^2+16x+16$$

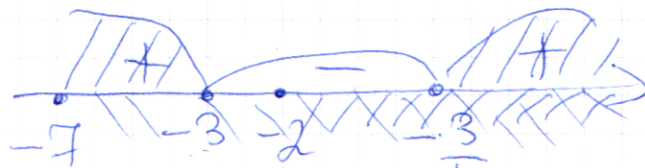
$$4x^2+15x+9 \geq 0$$

$$4x^2+15x+9=0$$

по обобщенной теореме Виета:

$$x^2+15x+36=0$$

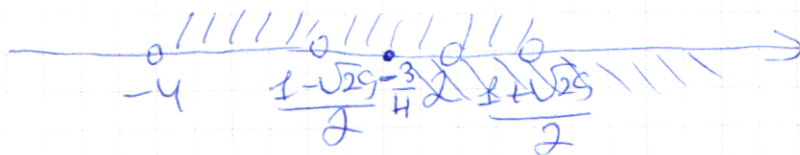
$$x_1 = \frac{-12}{4} = -3 \quad x_2 = \frac{-3}{4}$$



получим $x \in [-\frac{3}{4}; +\infty)$

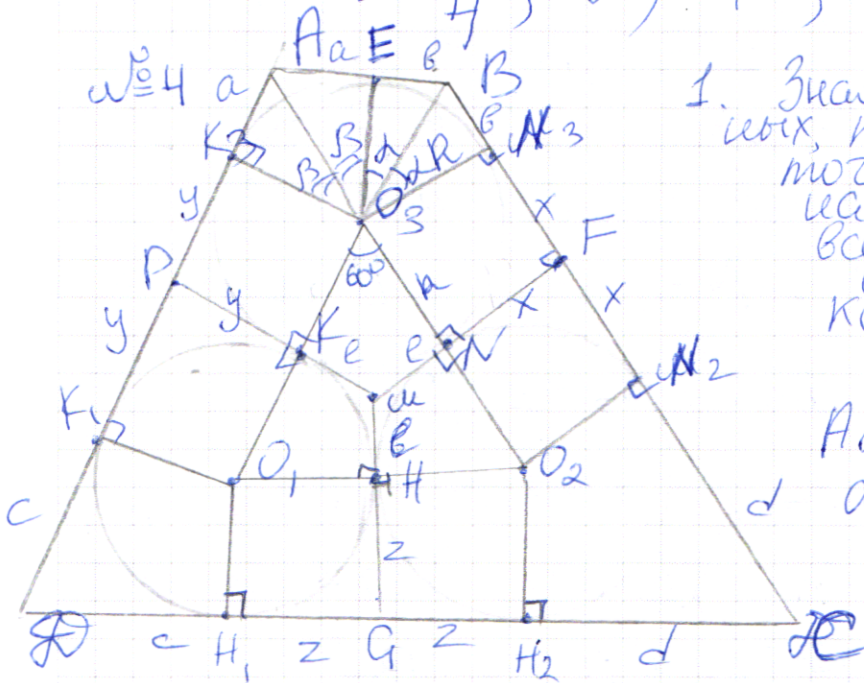
Объединим ОДЗ и полученное интервал

получим: $x \in [-\frac{3}{4}; 2) \cup (2; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $1) \left[-\frac{3}{4}; 2\right) \cup \left(2; \frac{1+\sqrt{25}}{2}\right)$



1. Зная что отрезки касательных, проведенных из одной точки равны, введем на рисунке обозначения всех отрезков. А также из точки M проведем касательные ко всем трем окружностям.

$$AD + BC - AB - CD = 12$$

$$a + 2y + c + b + 2x + d -$$

$$a - b - c - d - 2z =$$

$$= 2y + 2x - 2z = 12$$

$$x + y - z = 6$$

2. Проведем O_1H_1 , и O_1H_2 , и O_1H и O_2H .

Это будут перпендикуляры, т.к. радиус перпендикулярен касательной в точке касания.

Рассмотрим четырехугольник $O_1H_1H_2O_2$.

O_1H_1 и O_2H_2 равны и параллельны ($\angle O_1H_1H_2 + \angle O_2H_2H_1 = 180^\circ$). $\Rightarrow O_1H_1H_2O_2$ -

параллелограмм и прямоугольник

т.к. все углы по 90° градусов $\Rightarrow 2R = 2z \Rightarrow$

$z = R$. Аналогично доказывается

для $O_3K_3K_1O_1$ и $O_3N_3N_2O_2$. Получим

$$R = x = y = z. \Rightarrow R + R - R = 6$$

$$R = 6$$

2. $\Delta O_1O_2O_3$ - равносторонний, т.к. все стороны равны $2R \Rightarrow \angle O_1O_3O_2 = 60^\circ$

Четырёхугольник N_3O_3NF - квадрат, т.к. все стороны равны R и два угла равны $90^\circ \Rightarrow$ и все углы будут по 90° .
Поэтому угол $\angle N_3O_3N = 90^\circ$.

Аналогично для K_3O_3KP , где $\angle K_3O_3P$ также получится равным 90° .

$$\angle O_1O_3O_2 + \angle N_3O_3N + \angle K_3O_3P + \angle K_3O_3N_3 = 360^\circ$$

$$\angle K_3O_3N_3 = 120^\circ$$

Пусть $\angle BOE = \angle BON = \alpha$ / $\angle BOE = \angle BON$, т.к. $\Delta BOE = \Delta BON$ по катету и гипотенузе)

Аналогично $\angle AOE = \angle AOK = \beta$.

$$\angle AOB = \alpha + \beta$$

$$2\alpha + 2\beta = \angle K_3O_3N_3 = 120^\circ$$

$$\alpha + \beta = 60^\circ$$

3. По теореме Пифагора: $AO_3 = \sqrt{a^2 + R^2}$

$$BO_3 = \sqrt{b^2 + R^2}$$

$$AB = a + b$$

По т. косинусов:

$$AB^2 = AO_3^2 + BO_3^2 - 2 \cdot AO_3 \cdot BO_3 \cdot \cos 60^\circ, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + R^2 + b^2 + R^2 - 58$$

$$a^2 + b^2 + 2ab = b^2 + a^2 + R^2 + R^2 - 58$$

$$2ab = 36 + 36 - 58$$

$$ab = 7 \Rightarrow b = \frac{7}{a}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$AO_3BO_3 = 58 = \sqrt{(a^2 + R^2)(b^2 + R^2)} = \sqrt{\left(\frac{4g}{a^2} + R^2\right)(a^2 + R^2)}$$

$$58 = \sqrt{\left(\frac{4g}{a^2} + 36\right)(a^2 + 36)}$$

Ответ: $R = 6$; $\angle AOB = 60^\circ$
(радиус)

№ 3.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17

Количество способов расставить семь цифр "8" подряд = 11 (на 1-ой - 11-ой позиции может стоять первая из этих цифр).
Способы расставить цифры "0" и "7" в зависимости от количества

каждых:	"0"	"7"
всего остается	1	9
10 свободных	9	1
позиций	2	8
	8	2
	3	7
	7	3
	4	6
	6	4
	5	5

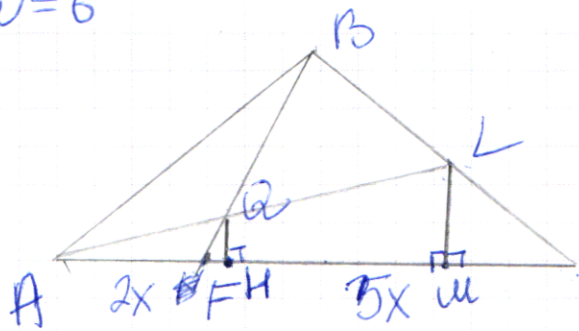
} 9 способов

Внутри каждого способа перестановки. Количество равно $10!$ возможных перестановок

Получим: $11.9.10^1 = 359251200$

Ответ: 359251200 17-значных
чисел.

$n=6$



$$\frac{S_{ABC}}{S_{KBC}} = \frac{5}{7}, \text{ т.к.}$$

у них общая высота,
но разная длина
оснований.

$$S_{ABC} = \frac{7 S_{KBC}}{5}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BKL}} = \frac{12}{5} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{S_{BKL} \cdot 12}{5}$$

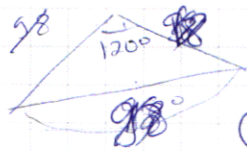
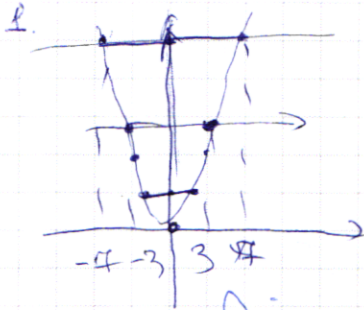
$$\frac{7 S_{KBC}}{5} = \frac{S_{BKL} \cdot 12}{5}$$

$$S_{BKL} = \frac{7 S_{KBC}}{12}$$

$$\frac{S_{BKL}}{S_{KBC}} = \frac{7}{12} = \frac{BK \cdot BL}{BN \cdot BC}$$

$$\frac{S_{KBC}}{S_{ABC}} = \frac{5}{7} \neq \frac{BK \cdot BC}{BN \cdot BC}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$x = \pm 7$

$\begin{matrix} \times 14 & 5 & \\ \hline 16 & 6 & \\ \hline 84 & & \\ + 36 & & \\ \hline 120 & & \end{matrix}$

$\begin{matrix} + 120 \\ \hline 196 \\ \hline 316 \\ + 156 \\ \hline 472 \\ + 240 \\ \hline 712 \end{matrix}$

$AB^2 = 296 + 144 + 24 \cdot 12 = 712$
 $196 = 144 + x^2 + 12x$
 $x^2 + 12x - 52 = 0$

$\sin 3x \cdot \sin 7x = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x)$
 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
 $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x)$
 $\frac{1}{2} = \cos 4x - \cos 10x$

$2x^2 = x^2 + 12x - 52 = 0$
 $x_1 = \pm x_2 = \dots$

$2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{7}{12} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{7}{12} = \frac{1-2+14}{8} = \frac{13}{8}$

$a = 158$
 $a = \sqrt{79}$
 $316 = 196 + 36 + 84$
 $196 = 100 + 36 + 60$

$2\sqrt{79} \times 79 = 316$

2. $\sin 3x \cdot \sin 7x = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 10x)$ $\sin \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$

$\cos 4x = 1 - 2\cos^2 2x$
 $\frac{1}{2} = \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1 - (1 - 2\cos^2 2x)}{2} = \frac{2\cos^2 2x}{2} = \cos^2 2x$
 $\cos 2x = \pm 1$
 $2\cos^2 2x - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} = 2\cos^2 2x$

$$\sqrt{x+7} - x \geq 0$$

$$\sqrt{x+7} > x$$

$$x+7 > -7$$

$$[-7, 0]$$

$$x \geq 0$$

$$x+7 > x^2$$

$$x < 0$$

$$x^2 - x - 7 < 0$$

$$D = 29$$

$$\sqrt{x+7} > x$$

$$x+7 > x^2$$

$$x^2 - x - 7 < 0$$

$$D = 1 + 28 = 29$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$\sqrt{x+4} \geq x \geq x+4$$

$$\sqrt{58} \cdot 4$$

$$+ 58 \cdot 4$$

$$\frac{464}{290}$$

$$\frac{290}{3364}$$

$$58 \cdot 58 =$$

$$11 \cdot 9 \cdot 10!$$

$$\frac{49}{a^2} + 36 \mid (a^2 + 36)$$

$$\geq 36$$

$$17 - 7 = 10$$

$$\geq 36$$

$$2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{296}$$

$$58 \cdot 58 = 49 + \frac{49 \cdot 36}{a^2} + 36a^2 + 36 \cdot 36$$

$$a^2 \cdot 58 \cdot 58 = 49a^2 + 49 \cdot 36 + 36a^4 + 36 \cdot 36 \cdot a^2$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ + 49 \\ \hline 85 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ + 44 \\ \hline 368 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ \hline 1764 \end{array}$$

$$36a^4$$

$$a^2 (36 \cdot 36 - 49 - 58 \cdot 58)$$

$$2117$$

$$\begin{array}{r} 2117 \\ - 2117 \\ \hline 441 \end{array}$$

$$49 \cdot 36 = 1764$$

$$\begin{array}{r} 1764 \\ + 36 \\ \hline 1800 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

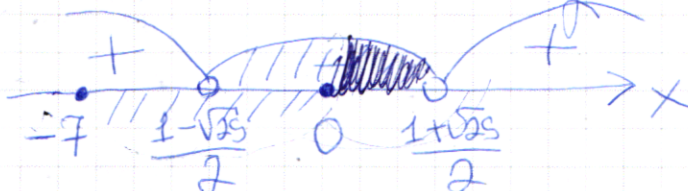
$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x - 7 < 0 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 7 < 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot (-7) = 29$$

$$x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$$



Получим: $x \in [-7; \frac{1-\sqrt{29}}{2}) \cup (\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$

• $\sqrt{x+7} - x \neq 1$

$$x+7 = x^2 + 1 + 2x$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x \neq 2$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$x \neq 2 = \frac{R \cdot R}{\sqrt{a^2+R^2} \sqrt{b^2+R^2}} - \frac{b}{R^2 - ab}$$

• $x+4 > 0$

$$x > -4$$

Получим:

$$x \in [-4; \frac{1-\sqrt{29}}{2}) \cup (\frac{1-\sqrt{29}}{2}; \frac{1+\sqrt{29}}{2})$$

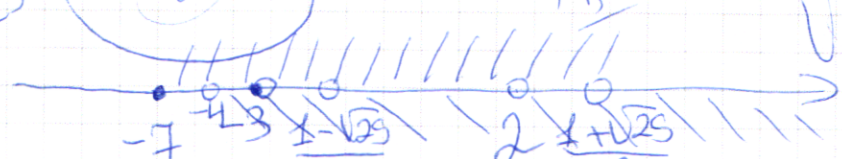
$$x \neq 2$$

$$x > -4$$

$$x \geq -7$$

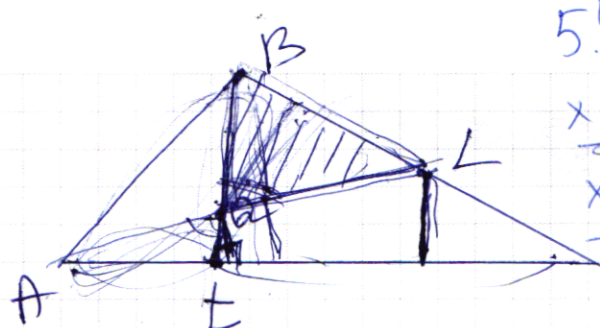
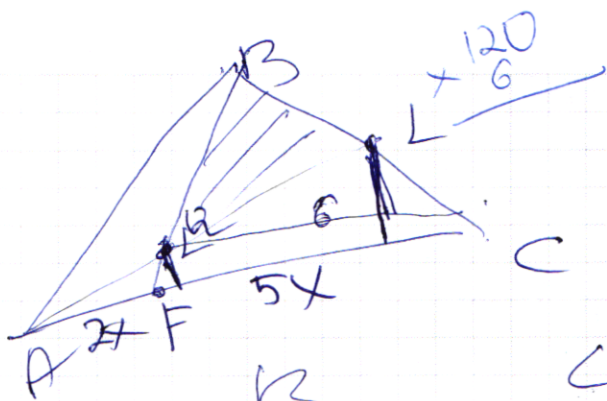
Handwritten calculations: $\frac{49}{6} + R^2 = 58$, $\frac{49}{6} = 8$, $29 \cdot 2$

Handwritten circled text: $29 \cdot 2$



Handwritten calculations: $\sqrt{(a^2+R^2)(b^2+R^2)} = 58$, $\sqrt{(\frac{49}{6}+R^2)(b^2+R^2)} = 58$, $b^2+R^2 = 29$, $\frac{49}{6} + R^2 = 4$

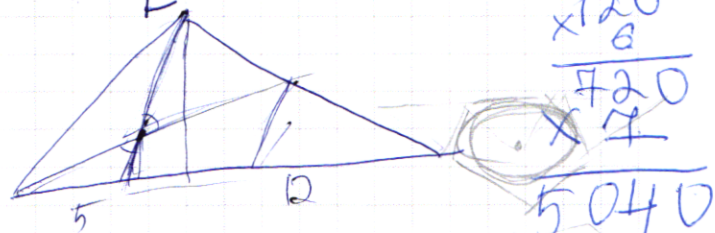
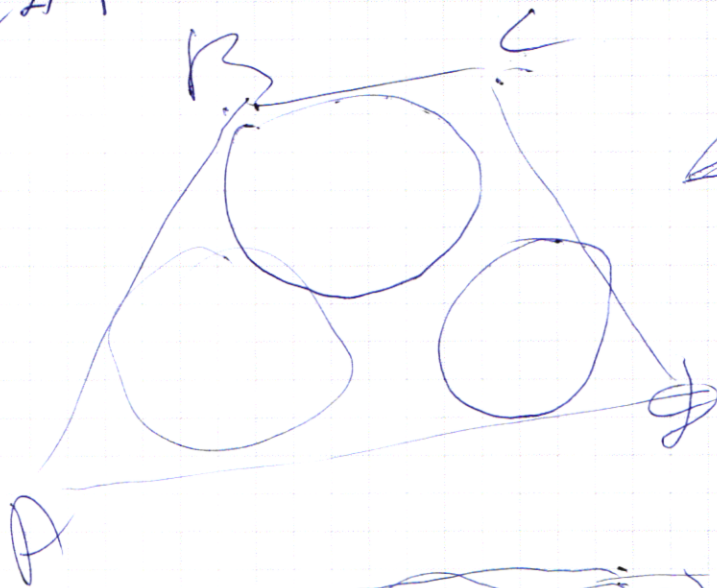
OP3: $x \in (-4; -3) \cup (-3; \frac{1-\sqrt{29}}{2}) \cup (\frac{1-\sqrt{29}}{2}; 2) \cup (2;$



$$5! = 120$$

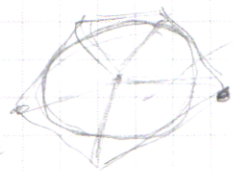
$$\times \frac{120}{6}$$

$$\hline 720$$



$$\times \frac{120}{6}$$

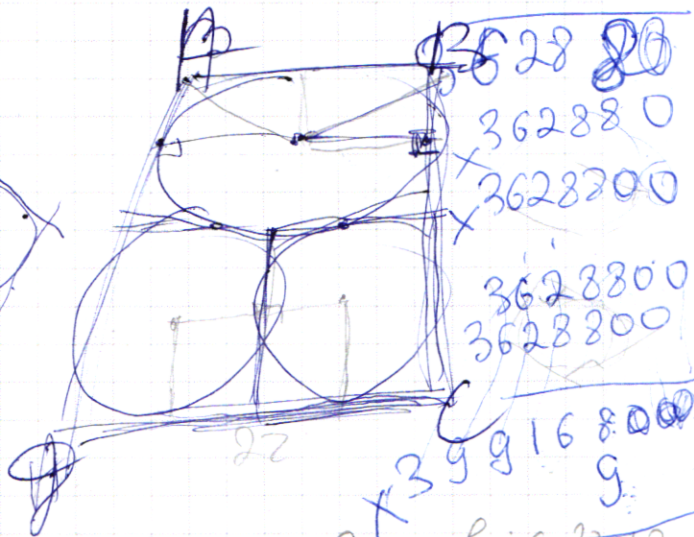
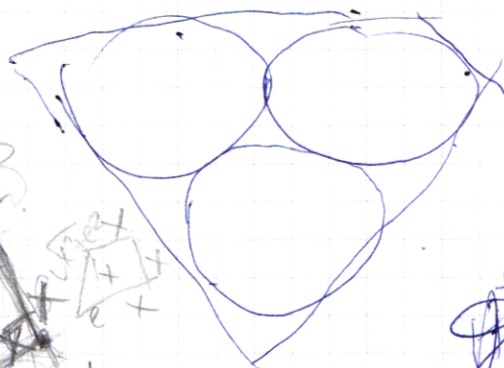
$$\hline 720$$



$$\times 5040$$

$$\times 8$$

$$\hline 40320$$



$$\times 362880$$

$$\times 362880$$

$$\hline 3628800$$

$$\times 3628800$$

$$\hline 36288000$$

$$\times 36288000$$

$$\hline 398168000$$

$$a + 2y + b + a + 2x + c - 2a - b - c = 2$$

$$2y + 2x - 2 = 2$$

$$x + y - 2 = 6$$

$$y = x - 2$$

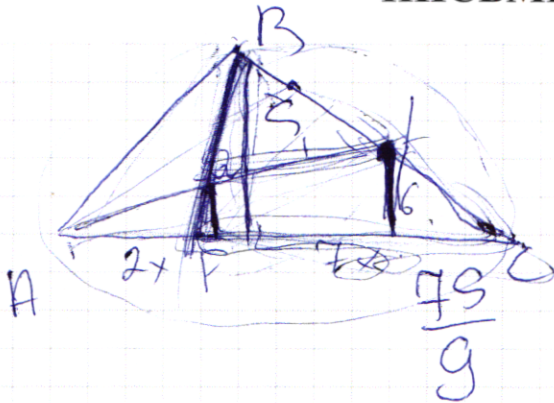
$$x + e + 2 + c = x + c + e + 2$$

$$(2 = 6)$$

$$58 = \sqrt{\quad}$$

120

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{S_{ABE}}{S_{FBC}} =$$

$$S = \frac{1 \cdot 12}{5} = \frac{9S_2}{7}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{9 \cdot 5}{7 \cdot 24} = \frac{5}{28}$$

$$a-b = 9m+n$$

$$9m+n = 5k+n$$

$$\frac{28}{8}$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)