МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2 ШИФР 1-010

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.

3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.

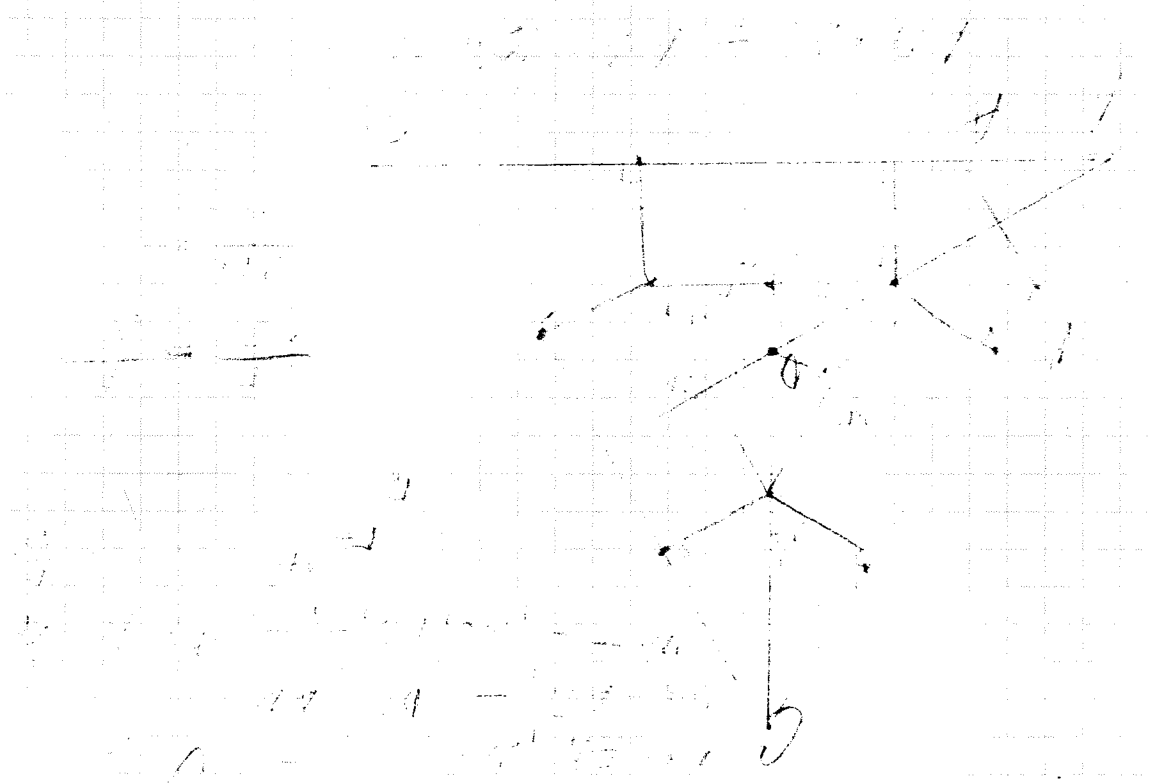
   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x + 5) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.

7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$2^{\cdot} - 1$ $\sqrt{a}$ -8

-105 $\frac{5}{21}$

$2\cos 2x \cdot \cancel{2} + \frac{1}{2}\sin 2x$

$2t = \frac{1}{2}$

$t = \frac{1}{4}$

$8 \cdot 26$ $11 - 4 = 7$

$64 +$

$+\begin{array}{r}169\\64\\\hline 233\end{array}$ $-\frac{8}{2} = -4$

$\begin{array}{r}13\\ \times 8\\\hline 104\\ +233\\\hline 337\end{array}$

$17 - 289$

$x > -1$

$x + 3 < x^2 + 2x + 1$

$\frac{1}{16} - \frac{2}{16} - \frac{8 \cdot 9}{16}$

$-\frac{1}{16}$

$x + 3$

$1 +$

$2\sqrt{337}$ 26 $2^2 \cdot 13^2$

$\frac{1}{-3}$

$4 \cdot 337$ 26^2 26

$4 \cdot 13$

$x + 1 < x + \sqrt{3} < 2x + 5$

$1 < \sqrt{3} < x + 5$

$D = 1 + 4 \cdot 3$ $-\frac{73}{16} = 4$ $64 + 9$ 73

$-\frac{10}{2} =$

-19

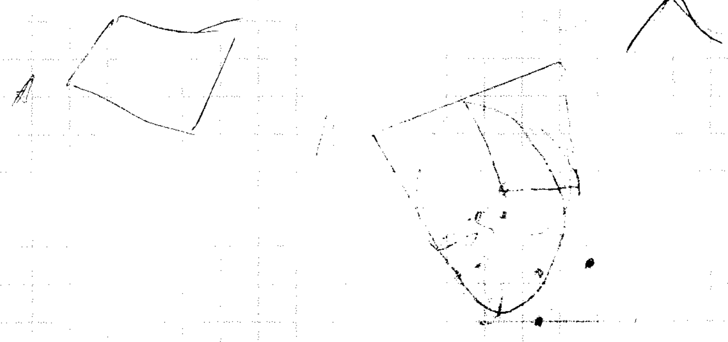
$x^2 + x - 2$ $22 \cdot 4$ 88 $-8 \cdot -11$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

1-010

№4



$17 + \overset{40}{16 + 24} + 32$

$51 + 32 = 83$

$$\begin{array}{r} 83 \\ \times\ 25 \\ \hline 415 \\ 166\ \ \\ \hline 2075 \end{array}$$

№5

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1 = \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x)$

$\sqrt{x+3} - x > 0$

$\sqrt{x+3} - x \neq 1$

$x+5 > 0$

$x+3 \geq 0$

$(\sqrt{x+3} - x - 1)(x+5-\sqrt{x+3}+x) \geq 0$

$80 \mid \frac{5}{16}$

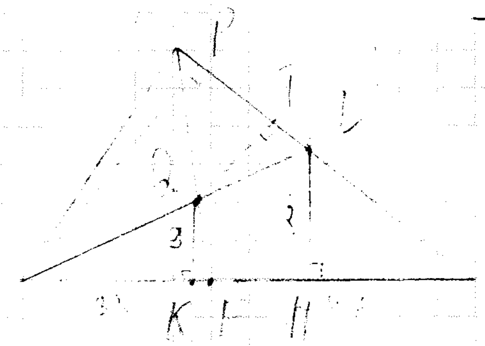
№6 X

$\frac{S_{BQL}}{S_{BAC}} = \frac{1}{16}$

$LM - ?$

$120 - 10 = 20 \mid \frac{5}{24}$

$160 - 16 = 20 \mid \frac{5}{32}$



$\frac{QT}{AP} =$

$S_{BQL} = \frac{1}{2} QT \cdot BL$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AP \cdot BC$

$\frac{QT \cdot BL}{AP \cdot BC} = \frac{1}{16}$

$116 - 41 = 75$

39-5

35   35   №7

по 5 из: [1; 35], [36; 70], [71; 105] [106; 140], [141; 176]

$16 + 36 = 51$ $85 + 36 = 121$

$x - y$ $\vdots\ 35$ $\neq 35, 70, 105, 140, 175$

1, 2, 3, 4, 5   36, 37, 38, 39, 40   71, 72, 73, 74, 75   106, 107, 108, 109, 110   141, 142, 143, 144, 145

$125 + 36 = 161$

$\cancel{x - y \vdots 35}$ $\cancel{x \vdots 35}$ 35

$x > y$, $x - y$

$x - y \vdots 35$

1) $x \vdots 35$, $y \vdots 35$

2) $x : 35$, $y \not\vdots 35$

3) $75 + 36 = 1$

85+36=121

121, 122, 123, 124, 125   161, 162, 163, 164, 165

~~116, 117, 118, 119, 120~~   ~~156, 157, 158, 159, 160~~

110

1, 2, 3, 4, 5   41, 42, 43, 44, 45   81, 82, 83, 84, 85   ~~111, 112, 113, 114, 115~~   ~~151, 152, 153, 154, 155~~

ост. 1, 2, 3, 4, 5   6, 7, 8, 9, 10   ост. 11, 12, 13, 14, 15 ~~16, 7, 8, 9, 10~~   16, 17, 18, 19, 20   21, 22, 23, 24, 25

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

26 $y=169$

16 $y=64$

$y=a$

$64=x^2$ $x=\pm 8$

$x^2=a$ $x=\pm a$

$x^2=169$

$x=\pm 13$

$y=x^2$

16 120 a 26

26 120° 16 a

$26+16>a$ $a+16>26$

$a<42$ $a>10$

$10<a<42$

$26 \cdot 26 = 156 + 52 = 676$

$26^2=16^2+a^2-32a\cos 120°$

$a^2=26^2+16^2-2\cdot 16\cdot 26\cos 120°$

$\cos^2 2x - \sin^2 2x$ $(1-\cos^2 2x)$

№ 2

$g(x)=\sin 5x \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$

$\sin 5x\cdot \sin 9x = \frac{1}{2}(\cos(5x-9x)-\cos(5x+9x)) = \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 14x) - \frac{1-\cos 14x}{2} -$

$-\frac{1+\cos 2x}{2} - 3 = \frac{1}{2}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 14x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 14x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x - 3 =$

$= \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 2x) - 1 - 3 = -4 + \frac{1}{2}\cdot(-2)\sin 3x \sin x = -4 - \sin 3x \sin x$

$\frac{1}{2}(2\cos^2 2x - 1 - \cos 2x) - 4 = \cos^2 2x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2} - 4$

18 значное число № 3 всех 3 цифр ≥ 1 5×6 (подряд)

0,5 9

1 1

4

19

5

12 1

5 5 5 5 5 5

5

$5\cdot 21$ 105

$\sqrt{a}<13+8$

$5<\sqrt{a}<21$

$a^2>25$

$a<21^2$

$21\cdot 21 = 441$

$2^2\cdot 13^2$

$2^2\cdot 8^2$

$-\frac{1}{2}-4=$

$-0,5-4$

$\cos 120 = \cos(90+30) = \sin 30$

☑ черновик ☐ чистовик

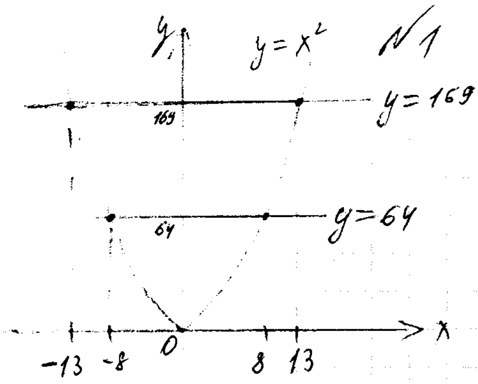
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1



$\begin{cases} y=169 \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow x=\pm 13$

$\begin{cases} y=64 \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow x=\pm 8$

$\begin{cases} y=a \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow x=\pm\sqrt{a}$, где $a>0$

При $a\le 0$ нельзя составить треугольник

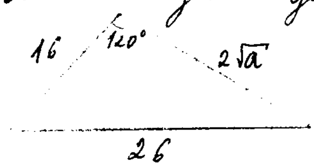
Получаем треугольник со сторонами $26;\ 16;\ 2\sqrt{a}$

По неравенству треугольника: $\begin{cases} 26+16>2\sqrt{a} \\ 16+2\sqrt{a}>26 \\ 26+2\sqrt{a}>16 \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{a}<21 \\ \sqrt{a}>5 \end{cases} \Rightarrow 25<a<21^2=441$

$10<2\sqrt{a}<42$

Напротив тупого угла должна лежать наибольшая сторона треуг-ка.

1)



$26^2=16^2+4a-32\cdot 2\sqrt{a}\cos 120^\circ \ |:2^2$

$13^2=8^2+a+16\sqrt{a}\cdot\frac{1}{2}$

$(13-8)(13+8)=a+8\sqrt{a}$

$a+8\sqrt{a}-105=0$

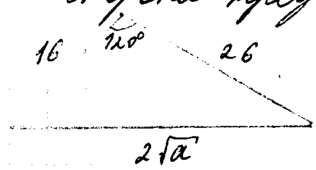
$D_1=16+105=121$

$\sqrt{a}=\frac{-4\pm 11}{1}$

$\sqrt{a}=7$

$a=49$ ~~$a=...$~~ (удовл. всем условиям)

2)



$4a=16^2+26^2-2\cdot 16\cdot 26\cos 120^\circ \ |:2^2$

$a=8^2+13^2+8\cdot 26\cdot\frac{1}{2}$

$a=233+104$

$a=337<441$

$2\sqrt{337}>26$

$4\cdot 337>4\cdot 169$

$a=337$

$\boxed{\text{Ответ: } a=49,\ a=337}$

№2

$g(x)=\sin 5x\cdot\sin 9x-\sin^2 7x-\cos^2 x-3=\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 14x)-$
$-\frac{1-\cos 14x}{2}-\frac{1+\cos 2x}{2}-3=\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 14x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 14x-$
$-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x-3=\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 2x)-4=\frac{1}{2}(2\cos^2 2x-\cos 2x-1)-4=$
$=\cos^2 2x-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{9}{2}$

$\cos 2x=t\in[-1;1]$

$g(t)=t^2-\frac{1}{2}t-\frac{9}{2}$

$g'(t)=2t-\frac{1}{2}=0$

$t=\frac{1}{4}$

$g(-1)=1+\frac{1}{2}-\frac{9}{2}=-3$

$g(\frac{1}{4})=\frac{1}{16}-\frac{1}{8}-\frac{9}{2}=\frac{1-2-72}{16}=-\frac{73}{16}=-4\frac{9}{16}$

$g(1)=1-\frac{1}{2}-\frac{9}{2}=-4$

Ответ: наибольшее значение — $\boxed{-3}$

наименьшее — $\boxed{-4\frac{9}{16}}$

№3

Рассмотрю все возможные ~~ра~~ положения „5":

| |, где кол-во клеток = кол-во цифр

(*) Первую из шести „5" пятерок нельзя поставить на последние 5 клеток (~~для того~~ это условие необходимо для выполнения — шесть „5" подряд)

На первой клетке — „5" или „9"

1) на первой позиции — „5", тогда на оставшихся 12 клетках „0" или „9".
Кол-во таких чисел $=2^{12}$. Ещё необходимо исключить 2 числа, где все цифры состоят только из „5" и „9" или только из „5" и „0".
Итого $2^{12}-2$

2) на первой позиции — „9", на 6 клетках подряд — „5"
Кол-во ~~таких~~ чисел $=12(2^{11}-1)$ (отнимаем 1, т.к. есть число состоящее только из „9" и „5", умножаем на 12, т.к. есть условие (*))

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Кол-во чисел $= 2^{12}-2+12(2^{11}-1) = 2^{12}-2+3\cdot 2^{13}-12 = 7\cdot 2^{12}-14$

Ответ: $\boxed{7\cdot 2^{12}-14}$

№5

$\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 & (1) \\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 & (2) \\ \sqrt{x+3}-x > 0 & (3) \\ x+5>0 & (4) \\ \log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq \log_{\sqrt{x+3}-x}(\sqrt{x+3}-x) & (5) \end{cases}$$

(1) $x \geq -3$

(2) $\sqrt{x+3} \neq 1+x$, $x \geq -1$

$x+3 \neq 1+2x+x^2$

$x^2+x-2 \neq 0$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \neq 1 \\ x \neq -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \boxed{x \neq 1} \\ x \geq -1 \end{cases}$$

~~$x=-2$ решение~~

$x=-2$ — решение

$1 \geq 1$

(3) $\sqrt{x+3} > x$

1) $x<0$ — подходит

2) $x \geq 0$

$x+3 > x^2$

$x^2-x-3<0$

$D = 1+12 = 13$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$

$x \in [0; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$

(4) $x>-5$

$$(*) = \begin{cases} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \neq 1 \\ x \in (-\infty; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \\ x>-5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-3;1) \cup (1, \frac{1+\sqrt{13}}{2})$$

(5) $(\sqrt{x+3}-x-1)(x+5-\sqrt{x+3}+x) \geq 0$

$(\sqrt{x+3} - x - 1)(2x + 5 - \sqrt{x+3}) \geq 0$

$\sqrt{x+3} - x - 1 \geq 0$ $\quad$ 1) $\sqrt{x+3} = x+1$, $x \geq -1$

$-\sqrt{x+3} + 2x + 5 \geq 0$ $\quad$ $\left[\begin{array}{l} x \neq 1 \\ x \neq -2 \end{array}\right.$ $\varnothing$

2) $2x+5 = \sqrt{x+3}$, $x \geq -\frac{5}{2}$

$4x^2+20x+25 = x+3$

$4x^2 + 19x + 22 = 0$

$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = -8 \\ x = -11 \end{array}\right. \quad \varnothing \\ x \geq -\frac{5}{2} \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{x+3} > x+1 \ (a) \\ 2x+5 > \sqrt{x+3} \ (б) \end{array}\right. \Rightarrow x+1 < \sqrt{x+3} < 2x+5$

(a) $x < -1$ — подходит

$x \geq -1$

$x+3 > x^2+2x+1$

$\left\{\begin{array}{l} x \in (-2; -1) \\ x \geq -1 \end{array}\right.$ $\varnothing$

(б) $2x+5 > \sqrt{x+3}$

$x > -\frac{5}{2}$

$4x^2+20x+25 > x+3$

$\left\{\begin{array}{l} x \in (-\infty; -11) \cup (-8; +\infty) \\ x > -\frac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\frac{5}{2}; +\infty)$

$A = \left\{\begin{array}{l} (a) \\ (б) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in (-\infty; -1) \\ x \in (-\frac{5}{2}; +\infty) \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{x \in (-\frac{5}{2}; -1)}$

4) $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{x+3} < x+1 \ (в) \\ 2x+5 < \sqrt{x+3} \ (г) \end{array}\right.$ $\quad$ (в) $\left\{\begin{array}{l} x > -1 \\ x \in (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty) \end{array}\right. \Rightarrow x \in (-1; +\infty)$

(г) $x < -\frac{5}{2}$ — подходит

$\left\{\begin{array}{l} x \geq \frac{5}{2} \\ x \in (-11; -8) \end{array}\right.$ $\varnothing$

$\left\{\begin{array}{l} (в) \\ (г) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in (-1; +\infty) \\ x < -\frac{5}{2} \end{array}\right.$ $\varnothing$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Итого получаем $\begin{cases} * \\ A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-3;-1) \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2}) \\ x \in (-\frac{5}{2}; -1) \end{cases} \Rightarrow x \in (-2{,}5; -1)$

Ответ: $x \in (-2{,}5; -1)$

№7

I Из промежутка $[1;35]$ возьму 5 наименьших чисел: 1, 2, 3, 4, 5

II Из $[36;70]$ возьму: 41, 42, 43, 44, 45 (если взять от 36 до 40, то, например, получим: $40-5=35$)

III Из $[71;105]$ возьму: 81, 82, 83, 84, 85 (если взять меньше: $80-45=35$)

IV Из $[106;140]$ возьму: 121, 122, 123, 124, 125 ($120-85=35$)

V Из $[141;175]$ возьму: 161, 162, 163, 164, 165 ($160-125=35$)

Теперь докажу, что разность любых двух выбранных чисел не делится на 35

Рассмотрю остатки чисел при делении на 35:

I) 1, 2, 3, 4, 5 III) 11, 12, 13, 14, 15 V) 21, 22, 23, 24, 25

II) 6, 7, 8, 9, 10 IV) 16, 17, 18, 19, 20

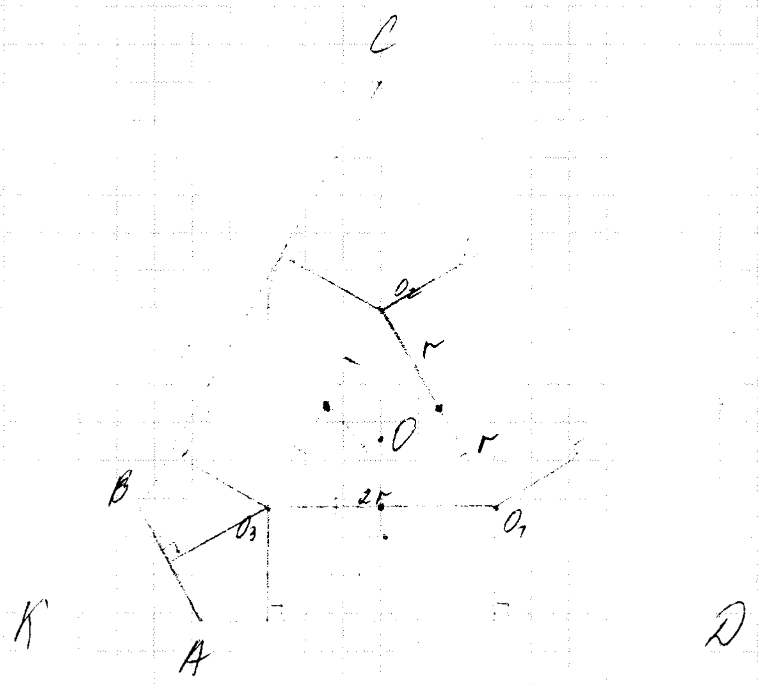
Разность любых двух этих остатков не равно $0 \Rightarrow$ ~~чис~~ разность любых двух выбранных чисел не дел-ся на 35

$S_{min} = \overset{15}{(1+2+3+4+5)} + \overset{15}{(1+2+3+4+5)} + 40\cdot5 + 80\cdot5 + 15 + 120\cdot5 + 15 + 160\cdot5 + 15 =$

$= 15\cdot5 + 40\cdot5 + 80\cdot5 + 120\cdot5 + 160\cdot5 = 25(3+8+16+24+32) = 25\cdot83 = 2075$

Ответ: $S_{min} = 2075$

№4



$\Delta O_1O_2O_3$ и ΔKCD гомотетичны, $\Delta O_1O_2O_3$ – равностор. $\Rightarrow \Delta KCD$ – равностор.

центр вписанной окружности O_0 ΔKDC лежит на пересечении биссектрис KO_3, CO_2 и DO_1; r_0 – радиус впис. окр. ΔKDC

$$\frac{2r}{CD} = \frac{r_0 - r}{r_0}$$

$$r_0 = \frac{S_{KDC}}{p_{KDC}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot CD^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}CD} = \frac{\sqrt{3}\,CD\cdot 2}{4\cdot 3} = \frac{\sqrt{3}\,CD}{6}$$