

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ


11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР

15-054

Заполняется ответственным секретарем

- ✓1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
- ✓2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
- ✓3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
- а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$. ✓
- б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 . ✓
- в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB . 
- ✓5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое наименьшее значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

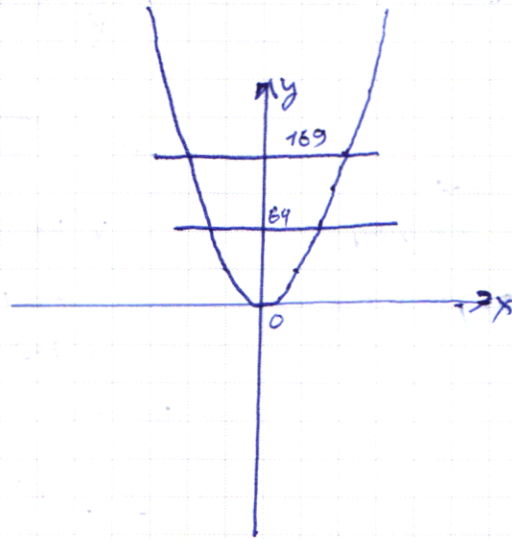
W1

$$y = x^2$$

$$y = 169$$

$$y = 64$$

$$y = 4$$



Для первого отрезка

$$y = 64 \quad x^2 = 64 \quad x = \pm 8, \text{ следовательно его}$$

$$\text{длина будет равна } \underline{l_1 = 2 \cdot 8 = 16}$$

Для второго отрезка

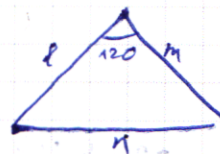
$$y = 169 \quad x^2 = 169 \quad x = \pm 13, \text{ следовательно его}$$

$$\text{длина будет равна } \underline{l_2 = 2 \cdot 13 = 26}$$

Аналогично $l_3 = 2\sqrt{a}$

Для треугольника с углом 120°
верно равенство

$$n^2 = l^2 + m^2 - 2lm \cdot \cos 120^\circ$$



$$n^2 = l^2 + m^2 + lm$$

$$1) l_3^2 = l_1^2 + l_2^2 + l_1 \cdot l_2$$

$$2) l_2^2 = l_1^2 + l_3^2 + l_1 \cdot l_3$$

$$3) l_1^2 = l_2^2 + l_3^2 + l_2 \cdot l_3$$

№5

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) - \log_{\sqrt{x+3}-x} (\sqrt{x+3}-x) \geq 0$$

Рассмотрим два случая.

1) $\sqrt{x+3}-x < 1$, $x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$, тогда оба логарифма
ввиду убывающего, следовательно

$$x+5 - \sqrt{x+3}-x \leq 0$$

$$\sqrt{x+3} \geq 5$$

$$x \geq 22$$

$$x \in [22; +\infty)$$

2) $\sqrt{x+3}-x > 1$; $x \in (-2; 1)$, тогда
оба логарифма возрастающие и

$$x+5 - \sqrt{x+3}-x \geq 0$$

$$x \leq 22$$

$$x \in (-2; 1)$$

Объединим оба случая с учетом О.Д.З.

$$\text{Ответ: } x \in (-2; 1)$$

О.Д.З.

$$x \geq -3$$

$$x^2 - x - 3 < 0$$

$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$$

$$x^2 - \sqrt{x+3} - x \neq 1$$

$$x^2 + x - 2 \neq 0$$

$$x \neq -1$$

$$x \neq 2$$

$$x \in [-3; -2) \cup (-2; 1) \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

w2

$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$g(x) = \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos 14x) - (1 - \cos^2 7x) - \cos^2 x - 3$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 14x + \cos^2 7x - \cos^2 x - 4$$

$$g'(x) = -2 \sin 4x + 7 \overset{\sin}{\cos} 14x - 7 \sin 14x + 2 \sin 2x$$

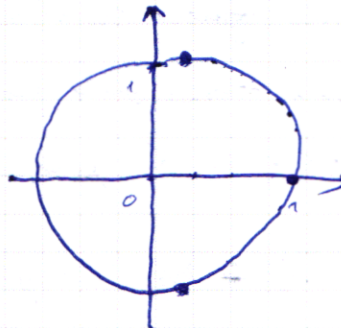
$$g'(x) = \sin 2x - 2 \sin 4x = 0$$

Пусть $t = 2x$, тогда

$$\sin t - 2 \sin 2t = 0$$

$$\sin t - 4 \sin t \cdot \cos t = 0$$

$$\sin t (1 - 4 \cos t) = 0$$



1) $\sin t = 0$ $t = \pm \pi n, n \in \mathbb{Z}$

2) $1 - 4 \cos t = 0$

$$\cos t = \frac{1}{4} \quad t = \pm \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{то } \begin{cases} x = 2\pi n \\ x = \pm 2 \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + 4\pi n \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$

П.к. $g(x)$ - периодическая, возьмем $n=0$ и
представим π

$$g_1 = g(0) = -4$$

$$g_2 = g(2 \arccos(\frac{1}{4})) =$$

W3

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_{18}$$

Трансформируем условие. Необходимо найти кол-во
способов расставить 3 символа „0“, „9“ и „55555“ (будет
считаться 6 пэтерок одним символом) так, чтобы
„0“ и „9“ встречались хотя бы 1 раз, „0“ не стоял на
первой позиции, „55555“ встречался ровно 1 раз.

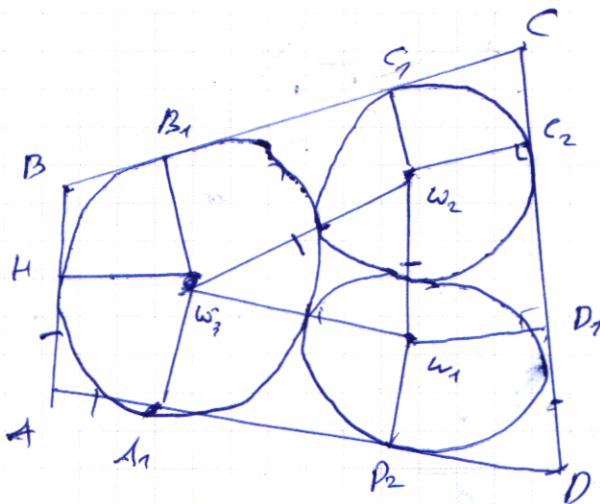
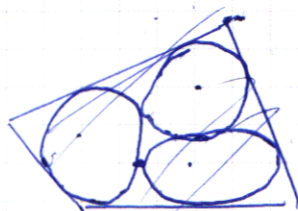
$$S = \overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2}^{13} \div \text{Кол-во случаев, когда 1 из символов не встречается.}$$

$$S = 2^{12}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

или
Дано: а) $AD + BC - AB - CD = 10$

б)



Найти:

- а) R - ?
б) $\angle ACB$

1) $C_1C = C_2C$, $DP_1 = DP_2$ и т.к. $R_{\omega_1} = R_{\omega_2}$
и ω_1 касается ω_2 , и ω_1, ω_2 касаются $CD \Rightarrow C_1C = C_2C$.

$\omega_1 \omega_2 \parallel C_2P_1 \Rightarrow \omega_1 \omega_2 C_2 P_1$ - прямоугольник, т.к.

$R_{\omega_1} = R_{\omega_2}$ и обе окружности касаются CD . Аналогично для другой стороны

$$CC_1 = CC_2; DP_1 = DP_2, AA_1 = AH, HB = BB_1$$

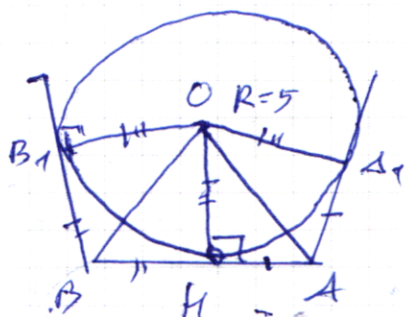
Тогда

$$AA_1 + 2R + D_2D + BB_1 + C_1C - CC_1 - 2R - D_2D - BB_1 - AA_1 = 10$$

$$2R = 10$$

$$R = 5$$

д)



$$OB = \sqrt{BB_1^2 + AB_1^2}$$

Пусть $OB_1 = R$,
 $BB_1 = x$
 $HA = y$

$$BO = \sqrt{R^2 + x^2}$$

$$OA = \sqrt{R^2 + y^2}$$

$$(x+y)^2 = R^2 + x^2 + R^2 + y^2 - 2\sqrt{(R^2+x^2)(R^2+y^2)} \cdot \cos AOB$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

$a_1 a_2 a_3 \dots a_{25}$

~~100~~ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(100)$

5 10 15 20

$\frac{a_n - a_k}{35} \quad n > k$

35

~~$c_n - a_k = 35$~~

1 2 3 4 5

41 42 43 44 45

81 82 83 84 85

~~100~~ $a_n = \overline{b_1 b_2 b_3} \quad a_k = \overline{c_1 c_2 c_3}$

~~$10b_1 + b_2 - 10c_1 - c_2 = f$~~

25

~~$10(b_1 - c_1) + (b_2 - c_2) = f$~~

$100(b_1 - c_1) + 10(b_2 - c_2) + (b_3 - c_3) = f$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \quad n = 5$

$5(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + 35 \cdot 50$

$35n + a_1 \quad 35n + a_2 \quad 35n + a_3 \quad 35n + a_4 \quad 35n + a_5 \quad n = 7$

$$g(x) = \sin(5x) \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$g'(x) = \cancel{5 \cos(5x) \cdot \sin(9x) + 9 \cos(9x) \cdot \sin(5x) - 7 \sin(14x) + \sin 2x - 3 = 0}$$

ИИП

$$\frac{a+b}{2} = 5$$

$$a+b = 10$$

$$\frac{a-b}{2} = 4 \quad a+b = 10$$

$$a = 14$$

$$b = 4$$

$$g(x) = \frac{1}{2} (\cos 14x - \cos 4x) - \sin^2 7x - (1 - \sin^2 x) - 3$$

$$= (1 - \sin^2 7x) - \cos^2 x - 3$$

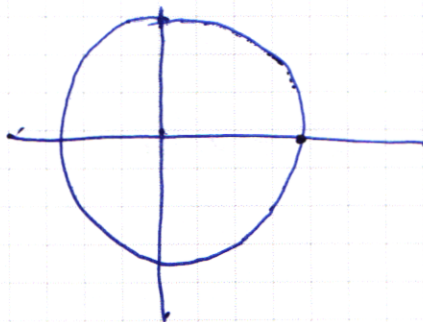
$$g(x) = \frac{1}{2} \cos 14x - \frac{1}{2} \cos 4x + \cos^2 7x - \cos^2 x - 4$$

$$g'(x) = \cancel{14 \sin 14x} - 7 \sin 14x + 2 \cos 4x + 7 \sin 14x + \cos 2x - 4$$

$$2 \cos 4x + 2 \cos 2x - 4 = 0$$

$\sin 10\pi$

$$x+3 > x^2+2x+1$$



~~x^2+x~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$$

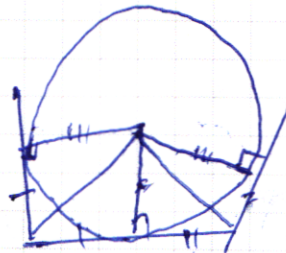
~~$$y'(x) = 5 \cos 5x \cdot \sin 9x + 9 \sin 5x \cdot \cos 9x - 2 \cos 7x \cdot 7 - 2 \cos x \cdot (-1)$$~~

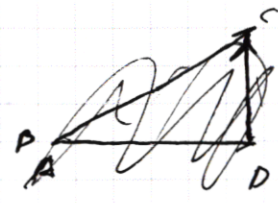
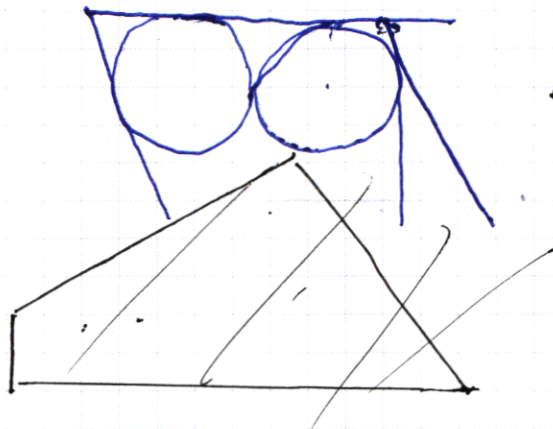
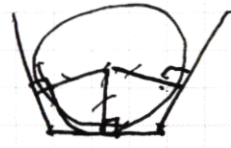
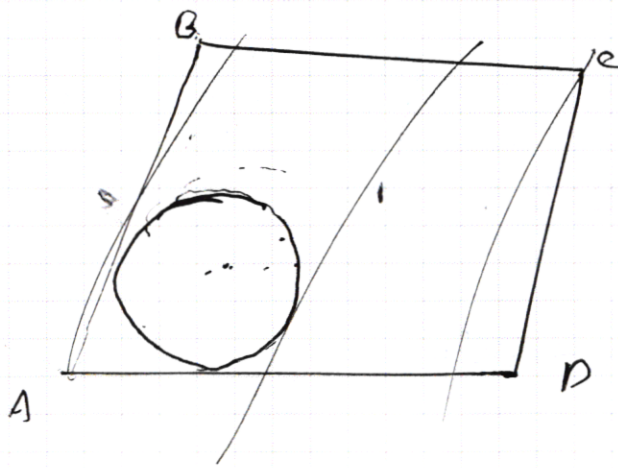
$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}$$

$$\begin{matrix} \text{555555} \\ \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \quad \vee \\ a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{12} \end{matrix}$$

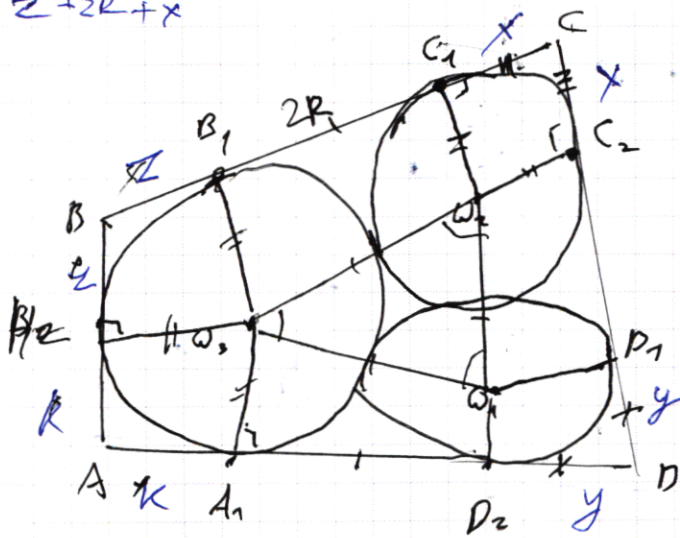
1. 10/23

1.





$$k + 2R + y + z + 2R + x$$

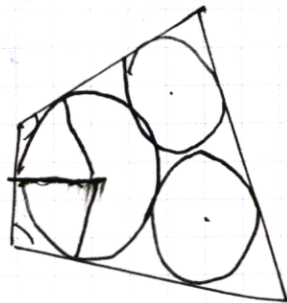


$$AD \neq BC - AB - CD = 10$$

2AA₁

$$x + D + y + x_1$$

$$AA_1 + B_1 + 2R + z$$



$$\begin{aligned} & x + B + y + \\ & + x + B + z - z - \end{aligned}$$

$$D - x - y = 10$$

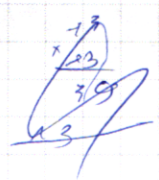
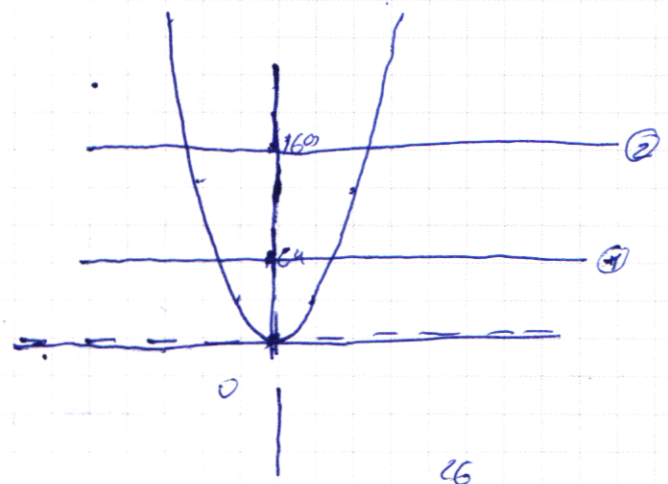
$$R = 5$$

$$y = x^2$$

$$y = 169$$

$$y = 64$$

$$y = 0$$



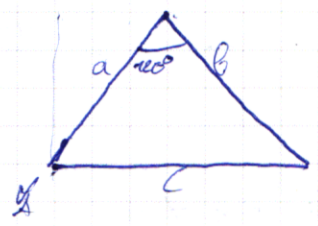
$$\textcircled{1} x = \pm 8$$

$$\textcircled{2} x = \pm 13$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array} \quad \begin{array}{r} 26 \\ 26 \\ \hline 30 \end{array}$$

$$f_1 = 2 \cdot 8 \quad f_2 = 2 \cdot 13 \quad f_3 = 2 \sqrt{a}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 26 \\ \hline 126 \\ 32 \\ \hline 448 \end{array}$$



$$a^2 + b^2 + 2ab \cos 120 = c^2$$

$$22 \cdot 6 \left(\frac{4}{5} \right)$$

$$a^2 + b^2 + ab = c^2$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ 42 \\ \hline 84 \\ 168 \\ \hline 1764 \end{array}$$

$$4a = 22c + 96 + 128$$

$$a = 4 \cdot 16 +$$

$$16^2 + 26^2 + 16 \cdot 26 = c^2$$

$$1318$$

$$(16+26)^2 = c^2 + 16 \cdot 26$$

$$4a = 22c +$$

$$a^2 + c^2 + ac = b^2$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 16 \\ \hline 32 \\ 16 \\ \hline 728 \end{array}$$

$$b^2 + ac + a^2 + b^2 = 0$$

$$a^2 = \frac{4(a^2 + b^2)}{a}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\log_{\sqrt{x+3}} - x(x+5) \geq 1$$

$$\log_{\sqrt{x+3}} - x(x+5) - \log_{\sqrt{x+3}-x} (\sqrt{x+3}-x) \geq 0$$

1) $\sqrt{x+3}-x < 1$
 $x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

$$x+5 - \sqrt{x+3} - x \geq 0$$

$$\sqrt{x+3} \leq 5$$

$$x+3 \leq 25$$

$$x \leq 22$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (2; 22]$$

2) $\sqrt{x+3}-x > 1$

$$x \in (-1; 2)$$

$$x+5 - \sqrt{x+3} - x \leq 0$$

$$x \geq 22$$

$$x \in \emptyset$$

$$D \subseteq \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$$

$$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

$$2 < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

$$\frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

$$49 < 169$$

$$\sqrt{x+3} - x \geq 0$$

$$x+3 \geq x^2$$

$$x^2 - x - 3 \leq 0$$

$$x > \frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

$$x > 1-\sqrt{13}$$

$$x > -\sqrt{13}$$

0.0.3.

$$\sqrt{x+3} \geq 0$$

$$x \geq -3$$

$$x+3 \geq x^2$$

$$\sqrt{x+3} - x \geq 0$$

$$x+3 \geq x^2$$

$$x^2 - x - 3 \leq 0$$

$$x \neq \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\sqrt{x+3} - x \neq 1$$

$$x+3 \neq 1+2x+x^2$$

$$x^2+x-2 \neq 0$$

$$x \neq -1$$

$$x \neq 2$$

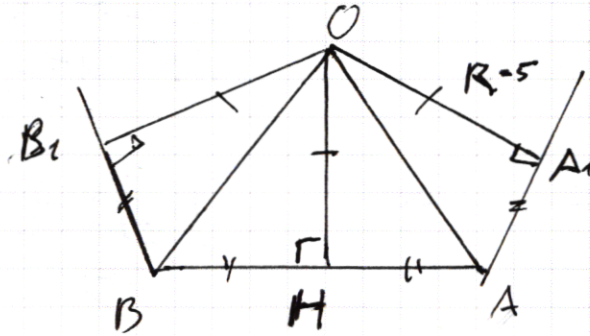
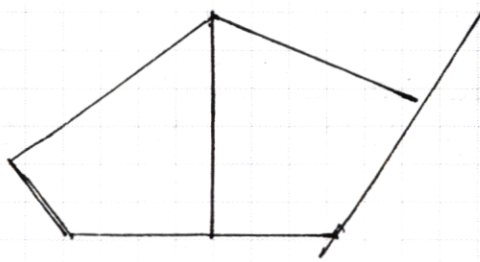
$$x \geq -3$$

$$x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$$

$$x \neq -1$$

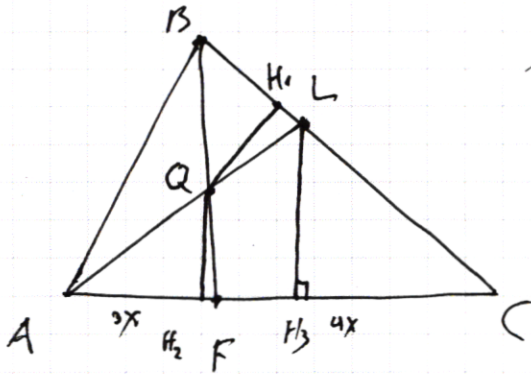
$$x \neq 2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



W6

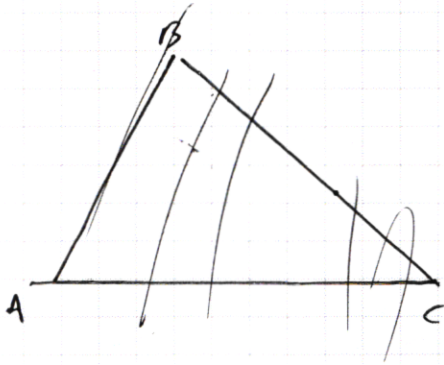
$$QH_2 = 9$$



$$\frac{S_{BQL}}{S_{AQCF}} = \frac{1}{16}$$

$$S_{BQL} = \frac{1}{2} BL \cdot QH_1$$

$$S_{AQCF} = \frac{1}{2} AF \cdot QH_2$$



$$\frac{BL \cdot QH_1}{AF \cdot QH_2} = \frac{1}{16}$$

~~$$\frac{BL \cdot QH_1}{AF \cdot QH_2} = \frac{1}{16}$$~~



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-054

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)