МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1 ШИФР 15-012

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$.

3. Найдите количество 17-значных чисел, содержащих только цифры "0", "7" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "8" ровно семь, и они идут подряд.

4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1, ω_2 и ω_3, причём ω_1 касается сторон AD и DC, ω_2 касается сторон DC и CB, а ω_3 касается сторон CB, BA и AD.

   а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 12$.

   б) Найдите угол AOB, где O – центр окружности ω_3.

   в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 58$. Найдите AB.

5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geqslant 1$.

6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 2 : 5$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q; площади треугольников BQL и BAC относятся как $5 : 12$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC, если расстояние от точки Q до прямой AC равно 6.

7. Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 45]$, $[46; 90]$, $[91; 135]$, $[136; 180]$, $[181; 225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое наименьшее значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-012

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

т.к. парабола $y=2x^2$ пересекает $y=98$, $y=18$, $y=a$, то найдем точки пересеч

$2x^2=98$ $\quad$ $2x^2=18$

$x^2=49$ $\quad$ $x^2=9$

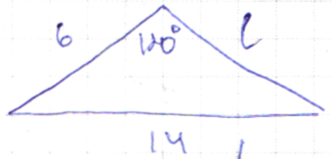
$x=\pm 7$ $\quad$ $x=\pm 3$

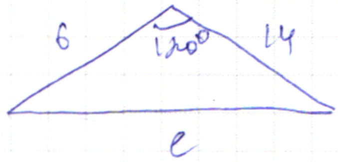
⇓ $\quad$ ⇓

~~то~~ длина отрезка=14 $\quad$ длина отрезка=6

~~Оч~~ очевидно, что против $\angle=120^\circ$ лежит наибольшая сторона. Тогда это может быть либо отрезок=14, либо $=l$, где l длина отр. высекаемого от $y=a$

тогда





↓ по т косинусов

$196=36+l^2+\cancel{*}6l$

$l^2+6l-160=0$

$l=10$ $\quad$ $l=-16$

↓ не подх. т.к. длина стороны

тогда x пересеч $=\frac{\pm 10}{2}=\pm 5$

$2x^2=a$ при $x=5$

$a=50$

$l^2=196+36+84$

$l^2=316$

$l=\sqrt{316}$ $\quad$ $l=-\sqrt{316}$ – не подх

$x=\pm\frac{\sqrt{316}}{2}$

$2x^2=a$ при $x=\pm\frac{\sqrt{316}}{2}$

$a=158$

Ответ: $a=50$ или $a=158$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1

(Нумеровать только чистовики)

№2

Есть 2 случая расположения восьмерок: либо с ~~наи~~ наивысшего разряда, либо - нет.

Если они стоят с наивысшего разряда, тогда для 7 и 0 есть еще 9 разрядов то есть 2^9 вариантов, однако мы должны вычесть 2 вар, при которых все семерки или все нули 2^9-2.

Если же восьмерки идут не с max. разряда, тогда для него есть вариант только 7, т.к. 0 первой цифрой быть нельзя может, тогда вариантов 2^8, однако мы должны учитывать вариант со всеми 7, тогда 2^8-1, всего таких вариантов 9

Итого общее кол-во вариантов $= 2^9-2+(2^8-1)\cdot 9 =$ 2805

Ответ: 2805

№5

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4) \geq 1$ ОДЗ $x>-4$; $\sqrt{x+7}>x$ $\sqrt{x+7}-x \neq 1$

Из условия следует, что $\sqrt{x+7}-x \leq x+4$

$\sqrt{x+7} \leq 2x+4$ → $x \geq -7$

→ $x \geq -2$, т.к. $\sqrt{x+7} \geq 0$

тогда возведем обе ч. в квадрат

$4x^2+15x+9 \geq 0$

$x_1 = -\frac{3}{4}$ $x_2 = -3$

$x \in (-\infty; -3] \cup [-\frac{3}{4}; +\infty)$

Осталось отобрать корни по ОДЗ

$\sqrt{x+7} > x$ Очевидно, что все отриц $x \geq -7$ нам подх

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

тогда будем рассматривать $x>0$

$x+7>x^2$

$x^2-x-7<0$

$x=\frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$ $\sqrt{29}>1$

тоесть нам подх $x\in[-7;\frac{1+\sqrt{29}}{2})$

$\sqrt{x+7}-x\neq1$

$\sqrt{x+7}\neq x+1$ если $x+1<0$, очевидно что это выполн., тогда

$x+7\neq x^2+2x+1$

$x^2+x-6\neq0$

$x\neq-3$ $x\neq2$

Исходя из всех указанных выше ограничений на x
$x\in[-\frac{3}{4};2)\cup(2;\frac{1+\sqrt{29}}{2})$

Ответ: $[-\frac{3}{4};2)\cup(2;\frac{1+\sqrt{29}}{2})$

№7

чтобы разность всех чисел была $\not\vdots\,45$ остатки от деления на 45 у них должны быть разные и тогда все числа выбранные из каждого промеж. имеют общ. вид. $a_1+k^{\leftarrow ост}$, где a_1 - min промежутка, а $k\in[0;44]$. все остатки разные

тогда сумма $=6\cdot1+k_1+k_2\ldots+k_6+6\cdot46+k_7+\ldots+k_{12}+6\cdot91+k_{13}+\ldots+k_{18}+\ldots+6\cdot181+k_{25}+\ldots+k_{30}$ тогда их сумма $=6\cdot(1+46+91+136+181)+k_1+\ldots+k_{30}=455+k_1+\ldots+k_{30}$

тогда наим сумма будет достигаться при наим

$\sum_{1}^{30} k = 29 \cdot 15 = 435$ т.к. $k \in [0; 44]$

Тогда $S_{min} = 455 + 435 = 890$

Ответ: 890

№2

$g(x) = \sin 3x \cdot \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

$g(x) = -\sin^2 5x - \sin^2 x + \sin 3x \cdot \sin 7x + 5$

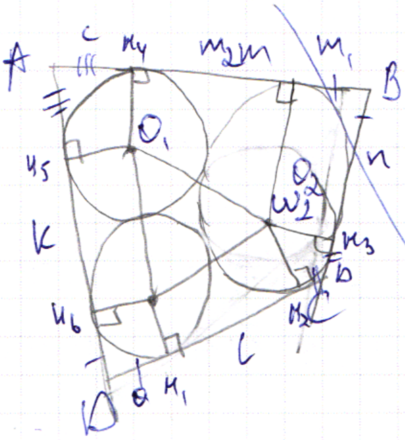
$g(x) = \cos^2 5x + \cos^2 x + \frac{\cos(10x) - \cos(4x)}{2} + 3$

$g(x) = 2\cos^2 5x - \cos^2 2x + \cos^2 x + 2$

Тогда наибольшее знач ф-ции $= 5$, при $2\cos^2 5x$, $\cos^2 x = 1$, а $\cos^2 2x = 0$, а наименьшее $=$ 3, т.к. $5x$ и x имеют одну четность

Ответ: $g_{max} = 5$, $g_{min} = 3$

№4



Обозначим равные отрезки касательных

тогда $c + k + a + n + b - (a + l + b + c + m) = 12$

$-n + m = 12$

Из соображений симметрии очевидно, что ω_2 касается и стороны AB. Тогда $m = m_1 + m_2$, тогда $m_2 =$

$O_1 O_2 = 2R$ $2R = 12$ $R = 6$ Ответ: 6

☐ черновик ☒ чистовик Страница №4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

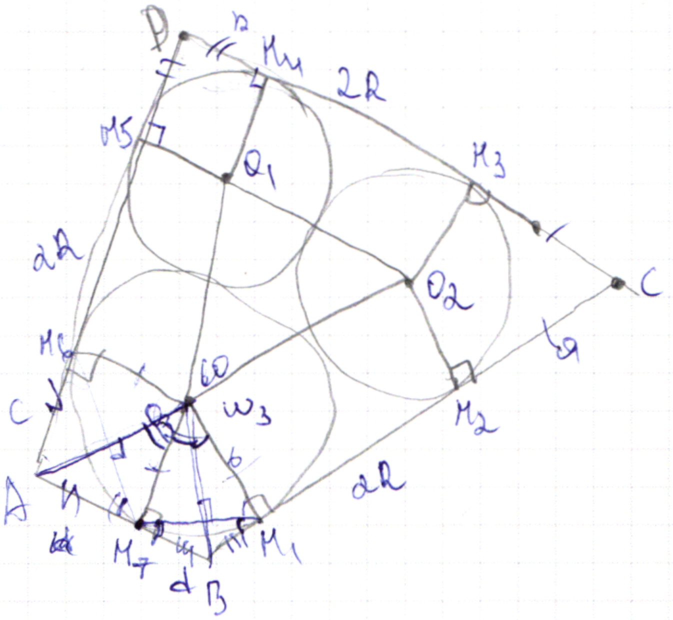
15-012

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



а) $M_1M_2 = M_3M_4 = M_5M_6 = 2R$ т.к. $O_1O_2 = O_2O_3 = O_1O_3 = 2R$ (л. центров) и $O_1M_5M_6O_3$ – прямоугольник

тогда отметим равные стороны и запишем равенство через них

$c + 2R + b + d + 2R + a - b - 2R - a - c - d = 12$

$2R = 12$

$R = 6$ Ответ: 6

б) $\angle M_7M_1B = \angle \underline{M_7O_3M_1}$ как угол между кас. и хордой из симметрии (или как диагональ дельтоида) $\angle M_7M_1B = \angle BO_3M_7$, Аналогично $\angle AM_7M_6 = \angle AO_3M_7$

тогда $\angle AOB = \angle AM_7M_6 + \angle M_1M_7B$, тогда $\angle AOB = 60°$

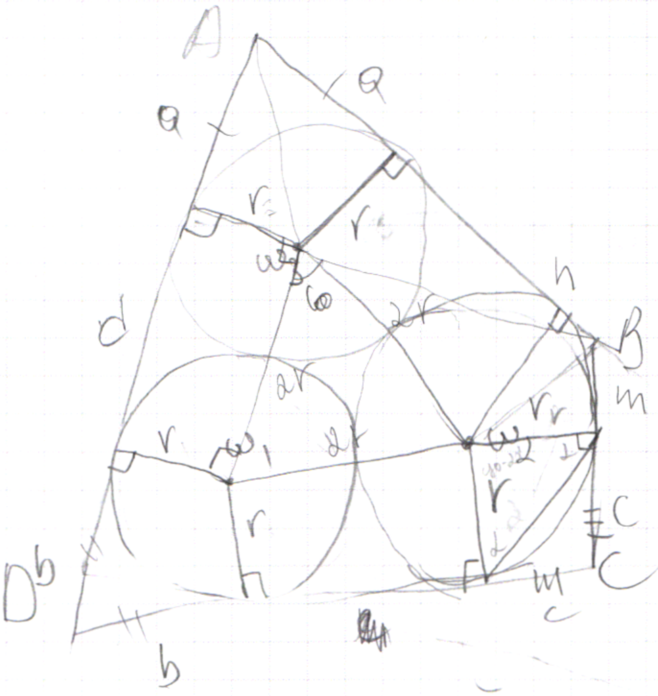
Ответ: $60°$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №5

(Нумеровать только чистовики)



$AD+BC-12=AB+DC$

$\cancel{a}+d+\cancel{b}+m+\cancel{c}-12=\cancel{a}+n+\cancel{b}+e+\cancel{c}$

$d+m-12=n+e$

$m-n=12$

$\log_{\sqrt{x+7}-x}(x+4)\geq 1$

$x+4>0 \quad x>-4$

$\sqrt{x+7}-x>0 \quad \neq 1 \; x\neq 2$

$\underline{x+4}\geq \underline{\sqrt{x+7}-x}$

$2x+4\geq\sqrt{x+7}$

$x>-2$

$4x^2+16x+16\geq x+7$

$4x^2+15x+9\geq 0$

$225-144$

$\frac{144}{81} \quad \sqrt{D}=9$

$\frac{-15\pm 9}{8}= \quad x=-\frac{3}{4} \quad x=-3$

$\sqrt{x+7}-x>0$

$x<\sqrt{x+7}$

$x<\sqrt{x+7}$

$2\sqrt{x+7}+4\geq\sqrt{x+7}$

$\left[-\frac{3}{4};\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$

$\left[-\frac{3}{4};+\infty\right)$

$x^2-x-7<0$

$D=29$

$\frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

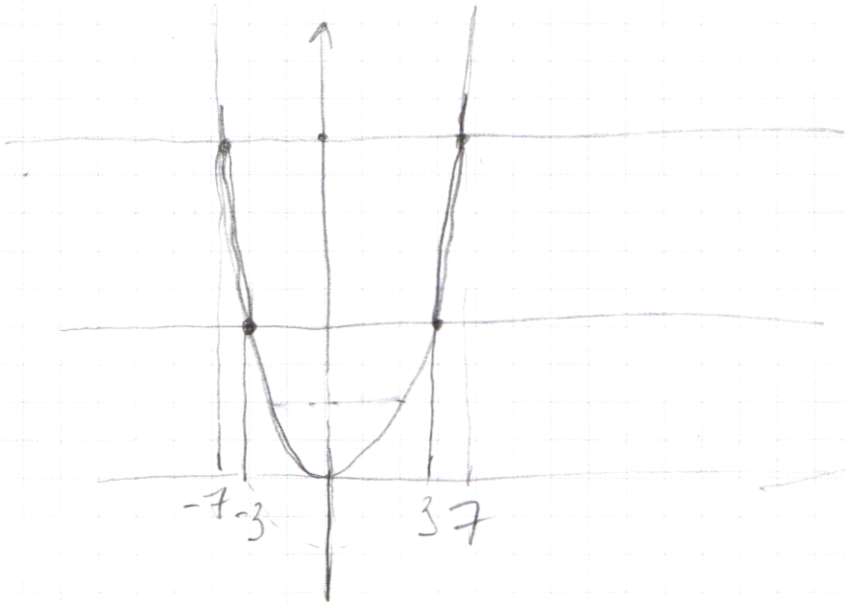
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-012

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$2x^2 = 98$

$2x^2 - 98 = 0$

$x^2 - 49 = 0$

$x = \pm 7$

6 14

14

$g(x) = \sin 3x \sin 7x - \sin^2 x + \cos^2 5x + 4$

№3

1 | 2 3 4 5 6 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |

1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 −2

$2^9 - 2$

$(2^8 - 1) \cdot 9$

$\begin{array}{r} \times\, 255 \\ 9 \\ \hline 2295 \\ +\, 510 \\ \hline 2805 \end{array}$

$510 + 255 \cdot 9$

676

$\begin{array}{r} \times\, 26 \\ 26 \\ \hline 156 \\ 52 \end{array}$

$\frac{-6 \pm 26}{2}$ $l = 10$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(\cancel{x+2x})\cdot\sin(\cancel{3x+2x})$

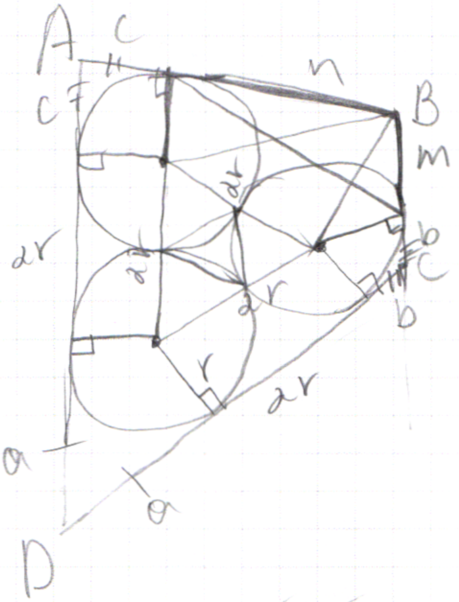
$\sin 3x\cdot\cos 2x+\sin 2x\cdot\cos 3x$

$\cos(5x\cdot 2)$

$\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2}$ $\quad 2\cos^2 x-1$

$2\cos^2 x-1$

$\frac{\cos(10x)-\cos(4x)}{2}$



$\frac{r\cdot m}{2}=S_1 \qquad \frac{r\cdot n}{2}=S_2$

$\cancel{c}+\cancel{2r}+\cancel{a}+m+\cancel{b}-\cancel{c}-n-\cancel{a}-\cancel{2r}-\cancel{b}=12$

$m-n=12$

$\cos^2 5x+\sin 3x\cdot\sin 7x-\sin^2 x+4=g(x)$

$1-\sin^2 5x+\sin 3x\cdot\sin 7x-\sin^2 x+4=g(x$

$-\sin^2 5x-\sin^2 x+5=g(x)$ $+\sin 3x\cdot\sin 7x$

$\sin 3x\cdot\sin 7x=\sin^2 5x\cdot\cos^2 2x\ \cancel{+5}$

$$\begin{array}{r} 181 \\ +136 \\ \hline 317 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 317 \\ +91 \\ \hline 408 \\ +46 \\ \hline 454 \\ +1 \\ \hline 455 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 29 \\ \times 15 \\ \hline 145 \\ 29 \\ \hline 435 \end{array}$$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

15-012

ШИФР

(заполняется секретарём)

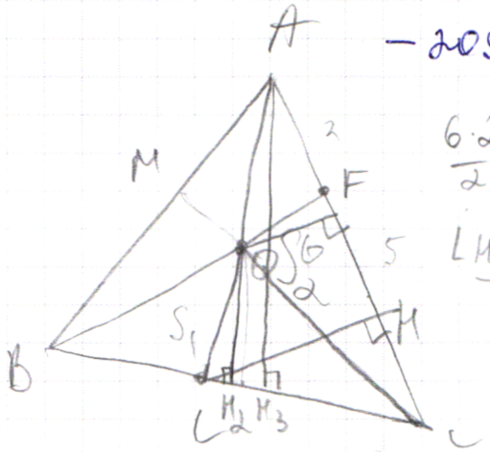
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 2 3 4 5 6

$5\cdot 2\cdot 2\cdot -\sin 5x + 4\sin 2x - 2\sin x + 2$

$\cos\alpha\cdot\cos\beta =$

$-20\sin 5x + 4\sin 2x - 2\sin x + 2$



$\frac{6\cdot 2k}{2} = S\ AFQ$

$\frac{LH_1\cdot 7k}{2} = S\ ALS$

$\frac{S\ BQL}{S_{QLC}} = \frac{BL}{LC}$

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{5}{12}$

$\frac{2}{5}\cdot\frac{CL}{BL}\cdot\frac{BM}{MA} = 1$

$\frac{S\ BQL}{S\ BQC} = \frac{BL}{BC}$

$\frac{S\ BQC}{S\ BAC} = \frac{QH_2}{\cancel{A}H_3}$

$-\sin\alpha\cdot\sin\beta + \cos\alpha\cdot\cos\beta\ \cos(\alpha+\beta)$

$\frac{S_{BQL}\cdot \cancel{A}H_3}{S_{BAC}\cdot QH_2} = \frac{BL}{BC}$

$\cos 7x\cdot\cos 3x - \cos 10x + \cos^2 x - 1 + \cos^2 5x + 4$

$2\cos^2 x - 1$

$+1 - 2\cos^2 5x + \cos^2 5x + 4 + \cos^2 x$

$\frac{QH_2\cdot BL}{AH_3\cdot BC} = \frac{5}{12}$

$-\cos^2 5x \overset{+\cos^2 x}{+} \cos 7x\cdot\cos 3x + 4 = g(x)$

$\cos\alpha\cdot\cos\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$-\cos^2 5x + \cancel{2}\cdot\cos 5x + \cos 2x + 4$

$\cos 5x = t$

$-t^2 + 2\cos 2x\, t + 4 = 0$

$\frac{4ac - b^2}{4a}$

$\frac{-16 - 4\cos^2 2x}{-4} = 4 + \cos^2 2x = 5$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)