

ОЛИМПИАДА ФИЗТЕХ-ИНТЕРНЕШНЛ ПО
МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

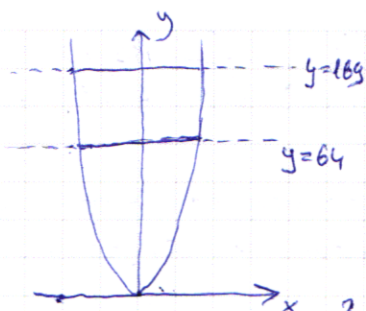
ШИФР

4-006

Заполняется ответственным секретарем

1. Парабола $y = x^2$ пересекает прямые $y = 169$, $y = 64$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом 120° ?
2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3$.
3. Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "0", "5" и "9" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "5" ровно шесть, и они идут подряд.
4. Дан четырёхугольник $ABCD$. Внутри него расположены три попарно касающиеся окружности одинакового радиуса ω_1 , ω_2 и ω_3 , причём ω_1 касается сторон AD и DC , ω_2 касается сторон DC и CB , а ω_3 касается сторон CB , BA и AD .
 - а) Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AD + BC - AB - CD = 10$.
 - б) Найдите угол AOB , где O – центр окружности ω_3 .
 - в) Пусть дополнительно известно, что $AO \cdot BO = 42$. Найдите AB .
5. Решите неравенство $\log_{\sqrt{x+3}-x}(x+5) \geq 1$.
6. Точки F и L лежат на сторонах AC и BC треугольника ABC соответственно, причём $AF : FC = 3 : 4$. Отрезки BF и AL пересекаются в точке Q ; площади треугольников BQL и BAC относятся как $1 : 16$. Найдите расстояние от точки L до прямой AC , если расстояние от точки Q до прямой AC равно 9.
7. Пиноккио выбрал по 5 целых чисел из каждого промежутка $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 35. Какое **наименьшее** значение может принимать сумма двадцати пяти выбранных Пиноккио чисел?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



N1
Т.к. $y=a$ пересекает параболу, а $E(y) \geq 0$, то $a \geq 0$.
Парабола пересекает прямую $y=64$ в точках:

$$x^2 = 64$$

$$x = \pm 8$$

А прямую $y=169$ соответственно в точках $y = \pm 13$
Значит, первый высеженный отрезок равен $8 - (-8) = 16$
второй = $13 - (-13) = 26$. Соответственно третий отрезок будет равен $2\sqrt{a}$.

Против тупого угла 110° всегда лежит наибольшая сторона, значит, необходимо рассмотреть 2 случая: 1) 26 - наибольшая сторона; 2) $2\sqrt{a}$ - наибольшая сторона

1) Применим теорему косинусов:

$$26^2 = 16^2 + 4a - 2 \cdot 16 \cdot 2\sqrt{a} \cdot \cos 110^\circ$$

$$676 = 256 + 4a + 32\sqrt{a}$$

$$a + 8\sqrt{a} - 105 = 0 \quad \text{т.к. } a \geq 0, a = b^2, b > 0$$

$$b^2 + 8b - 105 = 0$$

$$D = 64 + 420 = 484 = 22^2$$

$$b = \frac{-8 \pm 22}{2} = 7, \text{ тогда } a = 49$$

$$b = \frac{-8 - 22}{2} = -15, \text{ не подходит}$$

$$a = 49$$

$$2) 4a = 16^2 + 26^2 - 2 \cdot 16 \cdot 26 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$a = 64 + 169 + 4 \cdot 26 = 337$$

Ответ: 49; 337

N2

$$g(x) = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = P$$

$$P = \sin 5x \cdot \sin 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 = \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos 14x) - \frac{1 - \cos 14x}{2} - \cos^2 x - 3 =$$

$$= \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 14x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 14x - \cos^2 x - 3 = \frac{1}{2} \cos 4x - \cos^2 x - 3,5 = \frac{1}{2} (2 \cos^2 2x - 1) -$$

$$- \frac{1 + \cos 2x}{2} - 3,5 = \cos^2 2x - \frac{1}{2} \cos 2x - 4,5 = \left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right)^2 - 4,75$$

$$\text{т.к. } \cos 2x \leq 1, \text{ то } -\frac{3}{2} \leq \cos 2x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

Т.е. $g(x)_{\min} = -4,75$ достигается при $x = \frac{\pm \pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$0 \leq \left(\cos 2x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}$$

$$g(x)_{\max} = \frac{9}{4} - 4,75 = 2,25 - 4,75 = -2,5, \text{ достигается при } x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: наибольшее значение $g(x) = -2,5$ (при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$)
 наименьшее значение $g(x) = -4,75$ (при $x = \pm \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$)

N3

Первая пятерка может стоять на местах 1, 2, 3, ..., 13.
 Рассмотрим случай, когда 5 нах. на 1-м месте. Тогда в каждом из 12 незаконных пятерками мест можно поставить 0 или 9, т.е. возможных случаев: $2^{12} = 4096$.

2) когда ^{первая} 5 стоит на 2-13 месте, аналогично, за исключением того, что 0 не может стоять на первом месте, т.е. всего возможных случаев $2^{12} - 2^{11} = 2^{11}(2 - 1) = 2^{11} = 2048$

Итак, всего возможных 18-значных чисел $4096 + 12 \cdot 2048 = 24 \cdot 2048 = 28672$.
 Однако мы не использовали все возможные случаи, когда какая-то цифра не используется ни разу, то есть надо вычесть из каждого случая, когда стоят на 1-13 местах по 2 случая числа (когда только 0 или только 9), т.е. $2 \cdot 13 = 26$ случаев, заметив, что случаи, когда кончатся в начале, при этом все остальные числа нули мы уже вычли, таких случаев 12, то есть надо отнять $(26 - 12) = 14$ случаев.
 Итоговое количество 18-значных чисел, удовлетворяющих условию будет равно 28658

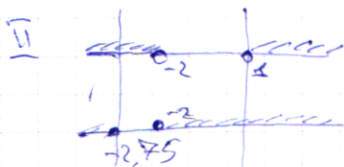
Ответ: 28658

N5

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

$$\begin{cases} \sqrt{x+3}-x > 1 & (1) \\ \sqrt{x+3}-x \neq x+5 & (2) \\ \sqrt{x+3}-x < 1 & (3) \\ \sqrt{x+3}-x \geq x+5 & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3) x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty) \\ 4) x \in (-\infty; -2,75] \cup [-2; +\infty) \end{cases}$$



Решая 2 системы:

$$(-\infty; -2,75] \cup (1; +\infty)$$

Учитывая D, решением неравенства является $[-3; -2,75] \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$

Ответ: $[-3; -2,75] \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$

$$D: \begin{cases} \sqrt{x+3}-x > 0 \\ \sqrt{x+3}-x \neq 1 \\ x+5 > 0 \end{cases}$$

Решая систему, получим что $x \in [-3; -2) \cup (-2; 1) \cup (1; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$

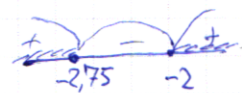
$$1) \begin{cases} \sqrt{x+3} > 1+x \\ x^2+x-2 < 0 \end{cases}$$

$x \in (-2; 1)$

$$2) \begin{cases} \sqrt{x+3}-x \leq x+5 \\ x+3 \leq x^2+25+20x \\ x^2+19x+22 \geq 0 \end{cases}$$

$$D = 361 - 352 = 9$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ x = -2,75 \end{cases}$$



$$I: \begin{cases} x \in [-2,75; -2] \\ \text{в I системе решений нет} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

Перепишем промежутки, из которых Пинокио выбрал по 5 чисел, по-другому:

$$[a_1, \dots, a_{25}] ; [a_1+35, \dots, a_{25}+35] ; [a_1+2 \cdot 35, \dots, a_{25}+2 \cdot 35] ; [a_1+3 \cdot 35, \dots, a_{25}+3 \cdot 35] ; [a_1+4 \cdot 35, \dots, a_{25}+4 \cdot 35]$$

Если Пинокио выбрал k -ое число из какого-либо промежутка, то он не сможет выбрать k -ое число из другого промежутка, т.е. $(a_k + m \cdot 35 - a_k) = 35$, где $m \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Значит, сумма 25 чисел будет равна $S_{25} + n \cdot 35$.

из первого промежутка:

S_{25}

Определим число n .

$$0 \cdot 35 + (1 \cdot 35) \cdot 5 + 2 \cdot 35 \cdot 5 + 3 \cdot 35 \cdot 5 + 4 \cdot 35 \cdot 5 = (35 \cdot 5)(1+2+3+4) = 35 \cdot 50, \text{ т.е. } n = 50$$

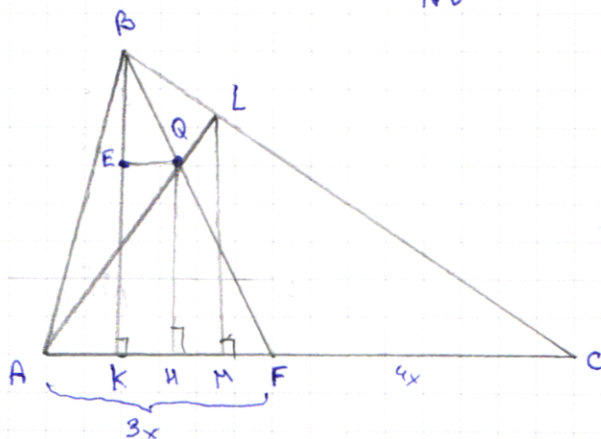
Значит, сумма 25 чисел будет равна $S_{25} + 1750$. Наименьшее значение суммы будет достигаться при наименьших значениях S_{25} , т.е. при $a_1 = 1; a_2 = 2, \dots, a_{25} = 25$.

$$S_{25} = \frac{1+25}{2} \cdot 25 = \frac{650}{2} = 325$$

Тогда сумма 25 чисел будет равна $325 + 1750 = 2075$

Ответ: 2075

№6



Дано: $\frac{AF}{FC} = \frac{3}{4}$

$$\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}} = \frac{1}{16}$$

$$QH = 9$$

Найти: $LM = ?$

Решение:

1) $\triangle AQH \sim \triangle ALM$ (по 2 углам)

$$\frac{AQ}{AL} = \frac{QH}{LM}$$

$$LM = \frac{QH \cdot AL}{AQ} = \frac{9 \cdot AL}{AQ} = \frac{9(AQ+QL)}{AQ} = 9 + \frac{9QL}{AQ}$$

$$\frac{S_{BQL}}{S_{AQF}} = \frac{BQ \cdot QL}{AQ \cdot QF} = \frac{S_{ABC}}{16 S_{AQF}} = \frac{BK \cdot 7x}{16 \cdot 27x} = \frac{7BK}{16 \cdot 27}$$

$$\frac{BQ}{QF} = \frac{QF+BQ}{QF} - 1 = \frac{BF}{QF} - 1 = \frac{BK}{9} - 1$$

$$\frac{QL}{AQ} = \frac{7BK \cdot 8}{16 \cdot 27 \cdot (BK-9)} = \frac{7BK}{48(BK-9)}$$

$$LM = 9 + \frac{63BK}{48(BK-9)} = 9 + \frac{63BK}{48BK} = 12$$

Ответ: 12



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$$\frac{S_{BQL}}{S_{ABC}} = \frac{1}{16}$$

$$S_{BFC} = \frac{4}{7} S_{ABC} = \frac{64}{7} S_{BQL}$$

$$\frac{S_{BFC}}{S_{BQL}} = \frac{64}{7} = \frac{BF \cdot BC}{BQ \cdot BL}$$

$$S_{BAF} = \frac{3}{7} S_{ABC}$$

$$\frac{S_{AQF}}{S_{BAF}} = \frac{QF}{BF} = \frac{27x \cdot 7}{6 \cdot S_{ABC}} = \frac{27x \cdot 7}{6 \cdot 16 S_{BQL}} = \frac{27x \cdot 7}{6 \cdot 16 \cdot BQ \cdot QL}$$

$$\frac{QF}{BF} = \frac{QF}{QF + BQ}$$

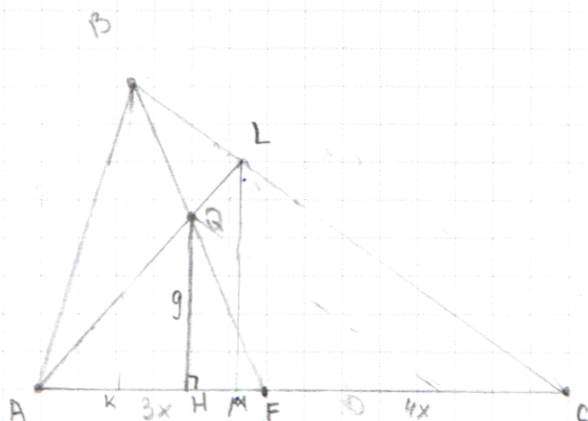
$$\triangle AQH \sim \triangle ALF$$

$$\frac{AQ}{AL} = \frac{QH}{LM} = \frac{g}{LM}$$

$$LM = \frac{QH \cdot AL}{AQ}$$

$$\frac{S_{BQL}}{S_{BFC}} = \frac{7}{64}$$

$$\frac{BQ \cdot BL}{BF \cdot BC} = \frac{7}{64}$$



$$\frac{AQ}{AL} = ?$$

$$\frac{AQ}{AL} = \frac{AQ}{AQ + QL}$$

$$\frac{BQ \cdot BL}{BF \cdot BC} = \frac{16 \cdot 4}{7}$$

$$\frac{AQ}{BF} = \frac{AQ}{BF}$$

$$S_{BAF} = \frac{3}{7} S = BK \cdot 9x \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{BK}{9} = \frac{BQ}{QF}$$

$$LM = \frac{QH \cdot (AQ + QL)}{AQ} = \frac{g(AQ + QL)}{AQ} = g + \frac{gQL}{AQ}$$

$$\frac{QL}{AQ} \cdot \frac{BQ}{QF} = \frac{S}{16 S_{AQF}} = \frac{S}{8 \cdot 27x} = \frac{BK \cdot 7x}{16 \cdot 27x} = \frac{7BK}{16 \cdot 27}$$

$$\frac{BQ}{QF} = \frac{QF + BQ}{QF} - 1 = \frac{BF}{QF} - 1 = \frac{BK}{9} - 1 = \frac{BK - 9}{9}$$

$$\frac{QL}{AQ} \cdot \frac{BK - 9}{9} = \frac{7BK}{16 \cdot 27}$$

$$\frac{QL}{AQ} = \frac{7BK \cdot 9}{16 \cdot 27 \cdot (BK - 9)} = \frac{7BK}{48BK - 432}$$

$$\frac{7}{48} \cdot \frac{BQ}{BF} = \frac{7 \cdot BC}{64 \cdot BL}$$

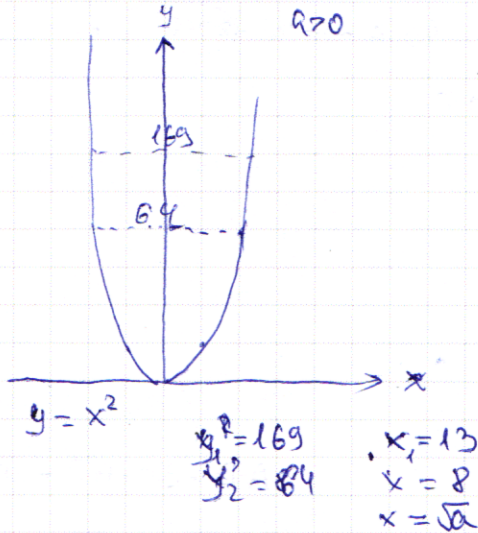
$$\frac{BQ}{BF} = \frac{3 \cdot BC}{4 \cdot BL}$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



первая прямая = 26

вторая равна 16

третья равна $2\sqrt{a}$

Против угла 120° наиб. сторона: 26 или $2\sqrt{a}$ рассмотрим 2 случая

$$26^2 = 16^2 + 4a + 2 \cdot 16 \cdot 2\sqrt{a}$$

$$676 = 256 + 4a + 32\sqrt{a}$$

$$169 - 64 = a + 8\sqrt{a}$$

$$a + 8\sqrt{a} - 105 = 0$$

$$b^2 + 8b - 105 = 0$$

$$D = 64 + 420 = 484 = 22^2$$

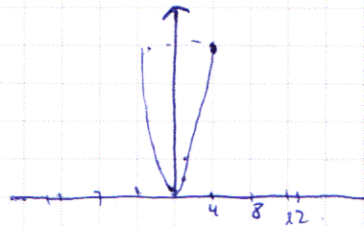
$$b = \frac{-8 \pm 22}{2} = 7, \text{ т.е. } a = 49.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = a^2 + b^2 + ab = (a-b)^2$$

$$c^2 > (a-b)^2$$

$$64 > (169)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + ab = a(a-b) + b^2 - ab + ab = a(a-b) + b(b-a) + ab = (a-b)^2 + ab$$



$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ + 64 \\ \hline 233 \\ + 605 \\ \hline 337 \end{array}$$

$$2) \quad 4a = 26^2 + 26^2 + 16 \cdot 26$$

$$a = 64 + 169 + 4 \cdot 26 = 337$$

$$g(x) = \sin^2 x \cdot \sin^2 9x - \sin^2 7x - \cos^2 x - 3 =$$

$$= \frac{1}{2} (\cos(5x) - \cos(11x)) - \frac{1 - \cos 14x - \cos^2 x - 3}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 14x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 14x - \cos^2 x - 3 =$$

$$= \frac{1}{2} \cos 4x - \cos^2 x - 3,5 = \frac{1}{2} (2 \cos^2 2x - 1) -$$

$$- \cos^2 2x - 1 + \frac{\cos 2x}{2} - 3,5 =$$

$$= \cos^2 2x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x - 3,5 =$$

$$= \cos^2 2x - \frac{1}{2} \cos 2x - 4,5 = (\cos^2 2x - \frac{1}{4}) - \frac{4,5 - 1}{4} =$$

$$= (\cos 2x - \frac{1}{2})^2 - 4,75$$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= -1 \\ 2x &= \pi + 2\pi k \\ x &= \frac{\pi}{2} + \pi k \end{aligned}$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2}$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$$

N3

015;9

первая 5 точек макс. на 1;2;3;4...13 месте. (13 случаев)

когда 5 макс на 1 месте

12 мест (0 или 3)

$$2^{12} = 4096$$

когда 5 макс на 2-13

~~12~~

$$2^{12} - P$$

(P-когда нуля-первая группа)

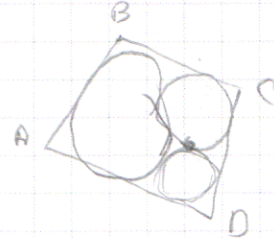
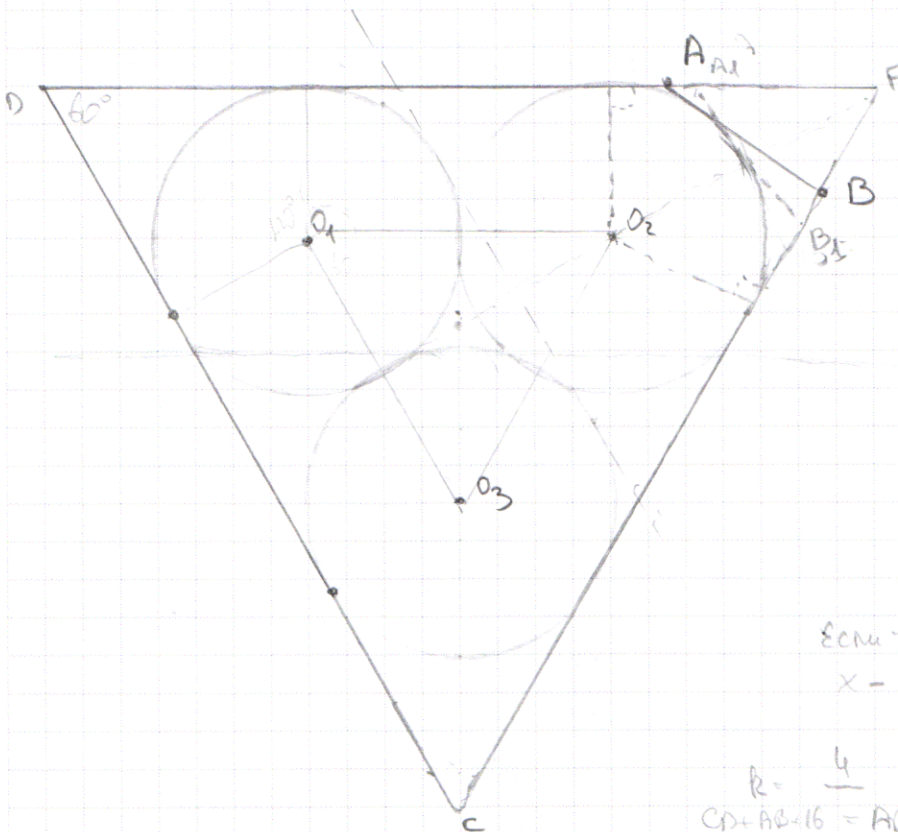
$$P = 2^{11}$$

$$2^{12} - 2^{11} = 4096 - 2048 = 2048$$

$$4096 + 12 \cdot 2048$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 4096 \\ \hline 28672 \end{array}$$

N4



Дано: $AD + BC - AB - CD = 10$

$$AD + BC - AB - CD = 10$$

$\triangle ADF \sim \triangle O_3 O_2$, равнобедренные

$$AD = DF - AF = x - AF$$

$$BC = CF - BF = x - BF$$

$$CD = x$$

$$x - AF + x - BF - AB - x = 10$$

$$x - (AF + BF + AB) = 10$$

Если заставить случаи, то

$$x - 3AF = 10$$

$$R = \frac{4}{3}$$

$$CD + AB = 16 = AD + BC$$

$$CD + AB_1 = AD + BC$$

$$R = \frac{19}{3}$$

r-?

, а.

$$AB - AB_1 = 10$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\log_{\sqrt{x+3}-x} (x+5) \geq 1$$

$$D: \sqrt{x+3} - x > 0$$

$$\sqrt{x+3} - x \neq 1$$

$$x+5 > 0$$

$$x > -3$$

$$x+3 > x^2 \quad \sqrt{x+3} - x > 0$$

$$x+5 > 0$$

$$x > -5$$

$$\sqrt{x+3} - x \neq 1$$

$$\sqrt{x+3} + 1 + x$$

$$x+3 \neq 1+x^2+2x$$

$$x^2+x-2 \neq 0$$

$$D=1+8=9$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{2} = 2; -1$$

$x \neq 2$
 $x \neq -1$

$$\sqrt{x+3} > x$$

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 & x \geq -3 \\ x < 0 & x < 0 \end{cases} \quad x \in [-3; 0)$$

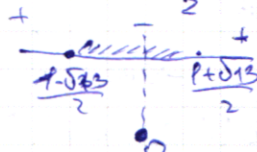
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+3 > x^2 \end{cases}$$

$$x^2 - x - 3 < 0$$

$$D=1+12=13$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x \in [0; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$$



$$x \in [-3; \frac{1+\sqrt{13}}{2})$$

$x \neq 2$
 $x \neq -1$

$$1) \begin{cases} \sqrt{x+3} - x > 1 \\ \sqrt{x+3} - x \leq x+5 \end{cases} \quad I$$

$$2) \begin{cases} \sqrt{x+3} - x < 1 \\ \sqrt{x+3} - x \leq x+5 \end{cases} \quad II$$

$$x^2+x-2 > 0 \quad (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$$

$$1) \sqrt{x+3} \neq 2x+5$$

$$x+3 \geq 4x^2+20x+25$$

$$4x^2+19x+22 \leq 0$$

$$D=361-352=9$$

$$x = \frac{-19 \pm 3}{8} = -2$$

$$x = \frac{-19-3}{8} = -2,75$$

$$a) (-2; 1)$$

$$b) (-3; -2,75) \cup (2; +\infty) \Rightarrow [-2,75; -2)$$

$$[-2,75; -2] \Rightarrow [-2,75; -2)$$

$$(-3; -2) \cup (1; +\infty)$$

$$[-3; -2,75] \cup (1; +\infty)$$

$$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

N7 $[1; 35]$, $[36; 70]$, $[71; 105]$, $[106; 140]$, $[141; 175]$

(1) $[1; 35]$ (2) $[1+35; 35+35]$ (3) $[1+2 \cdot 35; 35+2 \cdot 35]$ (4) $[1+3 \cdot 35; 35+3 \cdot 35]$ (5) $[1+4 \cdot 35; 35+4 \cdot 35]$

сумма $S_{\text{ариф}}$ a_3 (1) $= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

$$a_3(2) = a_6 \dots a_{10} + 35 \cdot 5$$

$$(3) = a_{11} - a_{15} + (35-2) \cdot 5$$

$$(4) = a_{16} - a_{20} + (35-3) \cdot 5$$

$$(5) = a_{21} - a_{25} + (35-4) \cdot 5$$

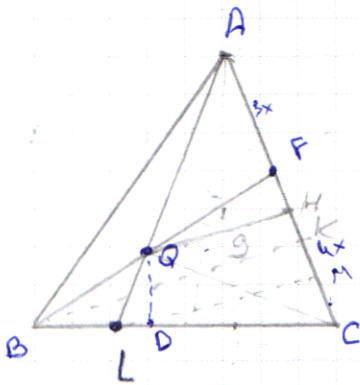
$$\downarrow (35 \cdot 5) (1+2+3+4) = 35 \cdot 5 \cdot 10 = 1750$$

+ $a_1 \dots a_n$ S_{25}

$$S_{\text{ариф}} = \frac{1+25}{2} \cdot 25 = \frac{26 \cdot 25}{2} = \frac{650}{2} = 325$$

$$S = 325 + 1750 = 2075$$

N6



$$\frac{LM}{QM} = \frac{S_{ALC}}{S_{AQC}} = \frac{AL}{AQ} \quad ?$$

$$\frac{S_{BLQ}}{S_{ABC}} = \frac{1}{16}$$

S_{ALC}

$$S_{ALC} = \frac{1}{2} \cdot 7x \cdot 9$$

$\triangle BLQ \sim \triangle AFQ$

$$\frac{LM}{QM} = \frac{S_{ALC}}{S_{AQC}} =$$

$$S_{ALC} = LM \cdot \frac{1}{2} \cdot 7x$$

$$= \frac{S_{ALC}}{S_{ALC} + S_{AQC}}$$

$$\frac{AQ}{QL} = \frac{3x}{BL}$$

$$BL = \frac{3x \cdot QL}{AQ}$$

$$= \frac{S_{ALC}}{S_{BLQ}} = \frac{LC}{BL} = \frac{LC \cdot AQ}{3x \cdot QL}$$

$$S_{BLQ} = \frac{1}{16} S$$

$$\frac{16 S_{ALC}}{S} = \frac{LC \cdot AQ}{3x \cdot QL}$$

$$\frac{32 S_{ALC}}{7x \cdot BL} = \frac{LC \cdot AQ}{3x \cdot QL}$$

$$\frac{AQ}{QL} = \frac{32 \cdot 3 S_{ALC}}{7 LC \cdot BL} = \frac{163 LC \cdot QL}{7 LC \cdot BL^2}$$

$$= \frac{48 QL}{7 BL}$$